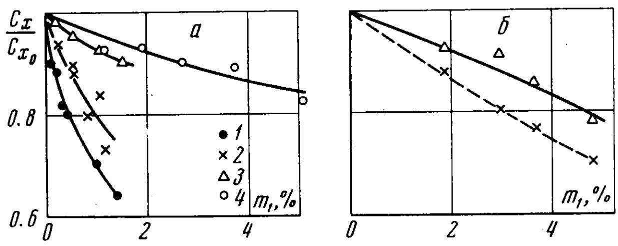
сопротивления данного конуса при наличии и отсутствии вдува, $m_1 = G / \rho_\infty u_\infty f$, G — расход вдуваемого газа, f — площадь донного среза. Из графиков видно, что эффективность вдува вблизи вершины конуса как средства снижения сопротивления падает с увеличением радиуса затупления. Однако снижение сопротивления вслед-



Фиг. 6

ствие вдува заметно даже при относительном затуплении $r / R = 0.5$. Из графика видно также, что вдув более легкого газа, гелия, эффективнее, чем вдув воздуха. Можно предполагать, что вдув легкого газа (гелий, водород) в воздушный поток будет еще более эффективным.

Поступило 12 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Харченко В. Н. Влияние интенсивного поперечного потока массы на сопротивление конуса в гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6.
2. Fernandez F. L., Zukoski E. E. Experiments in supersonic turbulent flow with large distributed surface injection. AIAA paper, 1968, No. 129.
3. Ботт. Экспериментальное исследование интенсивного вдува. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 4.
4. Тейлор, Массон, Фостер. Сверхзвуковое обтекание конуса конечных размеров при интенсивном вдуве газа через его поверхность. Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 7.
5. Фернандес, Лиз. Влияние конечной длины пластины на сверхзвуковой турбулентный пограничный слой с сильным распределенным вдуванием через поверхность. Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 7.
6. Матвеева Н. С., Нейланд В. Я. Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 5.
7. Буковшин В. Г., Шустов В. И. Таблицы параметров течения газа около круглых конусов для чисел M от 2 до 100 и для значений $\varkappa$ от 1.1 до 1.67. Тр. ЦАГИ, 1970, вып.1274.

УДК 532.72

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПЕРЕНОСА В ВЫСШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ

А. В. ГЕНС, Г. А. ТИРСКИЙ

(*Москва*)

В работе получена система уравнений многокомпонентной гидродинамики, разрешенная относительно старших производных, при любом количестве приближений в процедуре Чепмена — Энскога. В обычной постановке [1–3], когда коэффициенты переноса вычисляются в первом приближении, такая система может быть получена при помощи соотношения Стефана — Максвелла [1, 7, 8]. В таком виде система уравнений весьма удобна для фактического решения ряда гидродинамических задач [6–8].

Однако в последнее время было показано [3–5], что коэффициенты переноса некоторых газовых смесей, вычисленные методом Чепмена — Энскога, в первом приближении могут сильно отличаться от этих коэффициентов, вычисленных в высших приближениях. Например, коэффициенты переноса полностью ионизованной водородной плазмы, вычисленные в четвертом приближении методом Чепмена — Энскога, хорошо совпадают с коэффициентами, вычисленными Спицером [3], но отличаются от этих коэффициентов, вычисленных в первом приближении, более чем на 50%, исключая коэффициент сдвиговой вязкости.

При вычислении коэффициентов переноса в высших приближениях соотношения Стефана — Максвелла, замыкающие макроскопическую систему уравнений, перестают быть справедливыми, а выражения для диффузионных потоков, которыми в этих случаях замыкают систему, делают ее неудобной для фактического решения гидродинамических задач. Чтобы получить удобную форму макроскопических уравнений нужно заменить эти выражения для диффузионных потоков соотношениями, разрешенными относительно градиентов концентраций компонент, т. е. соотношениями типа соотношений Стефана — Максвелла. В этой работе такие соотношения будут получены для однотемпературной химически реагирующей газовой смеси произвольного состава со сферически симметричным потенциалом взаимодействия молекул.

В обычной постановке система уравнений гидродинамики для многокомпонентных смесей, приводимая, например, в монографии Гиршфельдера и др. [2], представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, не разрешенную относительно старших производных искомых функций. В настоящее время не существует эффективных методов решения таких систем.

Чтобы записать эту систему в нормальной форме Коши, надо заменить выражения для диффузионных потоков

$$\mathbf{I}_i = \frac{n^2}{\rho}\sum_{j=1}^{\nu} m_i m_j D_{ij}\mathbf{d}_j - D_i^T\nabla \ln T \tag{1}$$

соотношениями, разрешенными относительно градиентов концентраций компонент, или относительно векторов $\mathbf{d}_j$.

Формальное разрешение системы уравнений (1) приводит к большим вычислительным трудностям, поскольку коэффициенты a_{jt} и c_{jt}^{hk}, пропорциональные коэффициентам многокомпонентной диффузии и термодиффузионным коэффициентам соответственно, сами суть решения линейных алгебраических систем уравнений

$$\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{t=0}^{M} \tilde{Q}_{ij}^{mt} a_{jt} = -\frac{15}{2}\pi n_i \left(\frac{2kT}{m_i}\right)^{1/2} \delta_{m1} \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{t=0}^{M} \tilde{Q}_{ij}^{mt} c_{jt}^{hk} = 3\pi \left(\frac{2kT}{m_i}\right)^{1/2} \delta_{m0}(\delta_{ik} - \delta_{jh}) \tag{3}$$

$$(m = 0,\quad 1, \ldots, M;\quad i, h, k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

где коэффициенты $\tilde{Q}^{mt}$ — функции состава смеси и температуры. Выражения для коэффициентов $\tilde{Q}_{ij}^{mt}$ приводятся в работах [1, 2], причем нетрудно заметить, что

$$\tilde{Q}_{ij}^{mt} = \tilde{Q}_{ji}^{tm} \tag{4}$$

Предлагается вместо традиционных выражений для диффузионных потоков (1) и полного потока тепла

$$\mathbf{q} = \frac{5}{2}kT\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\mathbf{I}_j}{m_j} - \lambda\nabla T - nkT\sum_{j=1}^{\nu}\frac{1}{m_j n_j} D_j^T \mathbf{d}_j \tag{5}$$

(которые замыкают гидродинамические уравнения) воспользоваться их параметрическим представлением, в которое коэффициенты переноса уже не входят. Диффузионные потоки компонент, поток тепла и коэффициенты переноса будут функциями этих параметров, значения которых станут известны в процессе решения задачи в целом, а сама система уравнений гидродинамики будет при этом разрешенной относительно старших производных.

Параметры $\boldsymbol{\alpha}_j^t$ введем следующим образом:

$$\boldsymbol{\alpha}_j^t = -a_{jt}\nabla \ln T + n\sum_{l=1}^{\nu} c_{jt}^{lj}\mathbf{d}_l \tag{6}$$

Коэффициенты a_{jt} и c_{jt}^{hk} удовлетворяют линейной алгебраической системе уравнений (2) и (3).

Покажем далее, что выражения для потоков диффузии (1) эквивалентны

$$n_j m_j \boldsymbol{\alpha}_j^0 \left(\frac{2kT}{m_j}\right)^{1/2} = 2\mathbf{I}_j \tag{7}$$

и для полного потока тепла (5) эквивалентны

$$\mathbf{q} = \frac{5}{4} kT \sum_{j=1}^{\nu} n_j \left(\frac{2kT}{m_j}\right)^{1/2} (\boldsymbol{\alpha}_j^\circ - \boldsymbol{\alpha}_j^1) \tag{8}$$

и, наконец, выпишем линейную алгебраическую систему уравнений, которой должны удовлетворять векторы $\boldsymbol{\alpha}_j^t$.

Действительно, умножим (6) на $m_j n_j (2kT / m_j)^{1/2}$. Используя приведенные в монографии [1] выражения для многокомпонентных коэффициентов диффузии и термодиффузии

$$D_{ij} = (\rho n_i / 2nm_j)\ (2kT / m_i)^{1/2} c_{i0}^{ji} \tag{9}$$

$$D_i^T = {}^1/_2 n_i m_i (2kT / m_i)^{1/2} a_{i0} \tag{10}$$

получаем, что при $t = 0$ уравнение (6) совпадает с (1).

Полагая, что $t = 1$, умножим (6) на ${}^5/_4 n_j kT (2kT / m_j)^{1/2}$. Поскольку коэффициент теплопроводности λ определяется через коэффициенты a_{j1} следующим образом:

$$\lambda = -\frac{5}{4} k \sum_{j=1}^{\nu} n_j \left(\frac{2kT}{m_j}\right)^{1/2} a_{j1} \tag{11}$$

то, просуммировав полученные соотношения по j, получим

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{5}{4} n_j kT \left(\frac{2kT}{m_j}\right)^{1/2} \alpha_j^1 = \lambda \nabla T + \frac{5}{4} nkT (2kT)^{1/2} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{l=1}^{\nu} c_{j1}^{lj} \frac{n_j}{\sqrt{m_j}} \mathbf{d}_l \tag{12}$$

Выражения для коэффициентов c_{it}^{hk} и a_{it} можно получить, разрешив систему уравнений (2) и (3)

$$c_{it}^{hk} = 3\pi (2kT)^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{m_k}} \Theta_{ik}^{0t} - \frac{1}{\sqrt{m_h}} \Theta_{ih}^{0t}\right) \tag{13}$$

$$a_{it} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{15}{2} \pi n_j \left(\frac{2kT}{m_j}\right)^{1/2} \Theta_{ij}^{t0} \tag{14}$$

Здесь Θ_{ij}^{tm} — элементы матрицы, обратной к матрице, составленной из элементов $\tilde{Q}_{ij}^{mt}$

$$\left\| \begin{matrix} \Theta_{11}^{00} \ldots \Theta_{1\nu}^{00} & \Theta_{11}^{0M} \ldots \Theta_{1\nu}^{0M} \\ \vdots \quad \vdots \ \cdots \ \vdots \quad \vdots & \\ \Theta_{\nu1}^{00} \ldots \Theta_{\nu\nu}^{00} & \Theta_{\nu1}^{0M} \ldots \Theta_{\nu\nu}^{0M} \\ \vdots & \vdots \\ \Theta_{11}^{M0} \ldots \Theta_{1\nu}^{M0} & \Theta_{11}^{MM} \ldots \Theta_{1\nu}^{MM} \\ \vdots \quad \vdots \ \cdots \ \vdots \quad \vdots & \\ \Theta_{\nu1}^{M0} \ldots \Theta_{\nu\nu}^{M0} & \Theta_{\nu1}^{MM} \ldots \Theta_{\nu\nu}^{MM} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \tilde{Q}_{11}^{00} \ldots \tilde{Q}_{1\nu}^{00} & \tilde{Q}_{11}^{0M} \ldots \tilde{Q}_{1\nu}^{0M} \\ \vdots \quad \vdots \ \cdots \ \vdots \quad \vdots & \\ \tilde{Q}_{\nu1}^{00} \ldots \tilde{Q}_{\nu\nu}^{00} & \tilde{Q}_{\nu1}^{0M} \ldots \tilde{Q}_{\nu\nu}^{0M} \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{Q}_{11}^{M0} \ldots \tilde{Q}_{1\nu}^{M0} & \tilde{Q}_{11}^{MM} \ldots \tilde{Q}_{1\nu}^{MM} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \tilde{Q}_{\nu1}^{M0} \ldots \tilde{Q}_{\nu\nu}^{M0} & \tilde{Q}_{1\nu}^{MM} \ldots \tilde{Q}_{\nu\nu}^{MM} \end{matrix} \right\|^{-1}$$

Из (4) с очевидностью следует, что

$$\Theta_{ij}^{mt} = \Theta_{ji}^{tm} \tag{15}$$

Подставляя (13) в (12), благодаря свойству (15), получаем из (14) и (10), что

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{5}{4} n_j kT \left(\frac{2kT}{m_j}\right)^{1/2} \boldsymbol{\alpha}_j^1 = \lambda \nabla T + nkT \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{m_j n_j} D_j^T \mathbf{d}_j \tag{16}$$

Добавляя к обеим частям (16) по ${}^5/_2 kT \sum_{j=1}^{v} \mathbf{I}_j / m_j$, получим в силу (7) и (5) выражение для полного потока тепла (8) через векторы $\boldsymbol{\alpha}_j^t$.

Наконец поскольку $\sum_{j=1}^{v} \mathbf{d}_j \equiv 0$, из формулы (13) следует, что

$$\sum_{j=1}^{\nu} c_{it}^{jh}\mathbf{d}_j = \sum_{j=1}^{\nu} c_{it}^{jk}\mathbf{d}_j \tag{17}$$

при любых k и h. Тогда, умножая (6) на $\tilde{Q}_{ij}^{mt}$ и суммируя по j и t, получаем из уравнений (2), (3), (17) искомую систему уравнений, которой должны удовлетворять параметры α_j^t

$$-\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{t=0}^{M} \tilde{Q}_{ij}^{mt}\alpha_j^t = (2kT/m_i)^{1/2}[{}^{15}/{}_2\pi n_i \nabla \ln T\delta_{m1} + 3\pi n \mathbf{d}_i \delta_{m0}] \tag{18}$$

$$(m = 0, 1, \ldots, M;\ i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

Используя соотношения (18), эту систему можно переписать так:

$$\left(\frac{2kT}{m_i}\right)^{1/2} 3\pi n \mathbf{d}_i = -\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{t=0}^{M} \tilde{Q}_{ij}^{0t}\alpha_j^t \tag{19}$$

$$\left(\frac{2kT}{m_i}\right)^{1/2} \frac{15}{2}\pi n_i \nabla \ln T = -\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{t=0}^{M} \tilde{Q}_{ij}^{1t}\alpha_j^t \tag{20}$$

$$0 = \sum_{j=1}^{\nu}\sum_{t=0}^{M} \tilde{Q}_{ij}^{mt}\alpha_j^t \tag{21}$$

$$(m = 2, 3, \ldots, M;\ i = 1, \ldots, \nu)$$

Вместе с уравнениями сохранения энергии, импульса и масс компонент и с соответствующим уравнением состояния уравнения (19) — (21) дают замкнутую систему дифференциальных уравнений движения смеси газов в нормальной форме Коши. Выражение для полного потока тепла получаем по формуле (8).

Выражения (7), (8), (18) могут быть получены непосредственно из кинетической теории газов несколько измененным методом Чепмена — Энскога. Для этого невязкую часть функции распределения следует искать в виде рядов по полиномам Сонина с коэффициентами $W_i\alpha_i^t$ [9]

$$\theta_i = W_i \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_i^t S_{3/2}^t(W_i^2)$$

Из интегральных уравнений Чепмена — Энскога получим систему уравнений (19) — (21), а соотношения (7) и (8) получим непосредственно из определения диффузионных потоков и полного потока тепла вследствие ортогональности полиномов Сонина.

Полученную систему уравнений можно, по-видимому, распространить на многотемпературную смесь с учетом внутренних степеней свободы молекул и анизотропности потенциала взаимодействия.

Поступило 2 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен, Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. Devoto R. S. Transport properties of ionized monatomic gases. Phys. Flzids, 1966, vol. 9, No. 6.
4. Devoto R. S. Transport coefficient of partially ionized argon. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 2.
5. Devoto R. S. Transport coefficient of partially ionized hydrogen. J. Plasma Physics, 1968, vol. 2, No. 4.

6. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двоякой кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава. ПМТФ, 1965, № 1.
7. Тирский Г. А. Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями включая реакции ионизации. Отчет Ин-та механ. МГУ, № 1016, 1969.
8. Тирский Г. А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
9. Goldstein M. E. New formulation of the multicomponent laminar boundary layer problem. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, N 4.

УДК 533.6.011

ЗАМЕЧАНИЕ К ВОПРОСУ О ПОЛУЧЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИЗ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ

О. Г. ГОМАН

(*Днепропетровск*)

Приводятся два примера применения к гиперболическим задачам преобразования, связывающего аналитические и p-аналитические функции.

Известно, что выражения вида

$$\Phi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \frac{\varphi(x, r)\, r\, dr}{\sqrt{y^2 - r^2}}, \qquad \Phi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty \frac{\varphi(x, r)\, r\, dr}{\sqrt{r^2 - y^2}} \tag{1}$$

преобразуют гармоническую функцию на плоскости $\Phi(x, y)$ в пространственную осесимметричную гармоническую функцию $\varphi(x, r)$ [1].

Однако, как показала П. Я. Полубаринова-Кочина [2], преобразование (1) не переводит плоский источник в пространственный осесимметричный источник. То же самое можно сказать и о других элементарных особенностях на плоскости и в пространстве. Это вызвано тем, что указанное преобразование меняет вид граничных условий на эквивалентных поверхностях в плоскости и пространстве.

Тем не менее если известен общий вид решения плоской задачи через неизвестные функции, подлежащие определению из граничных условий, то преобразования (1) можно использовать для получения общего решения эквивалентной осесимметричной задачи. Проиллюстрируем сказанное двумя примерами.

1. Сверхзвуковое обтекание тонкого профиля и тела вращения без угла атаки. Потенциал плоского течения удовлетворяет уравнению

$$-\operatorname{ctg}^2 \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (\operatorname{ctg} \mu = \sqrt{M^2 - 1}) \tag{2}$$

и граничным условиям на головной волне Маха и теле

$$\Phi = 0, \quad y \geqslant x \operatorname{tg} \mu; \qquad \partial\Phi / \partial y = UR', \quad y = R(x) \tag{3}$$

Осесимметричное течение описывается уравнением со следующими условиями:

$$-\operatorname{ctg}^2 \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \tag{4}$$

$$\varphi = 0 \quad (r \geqslant x \operatorname{tg} \mu), \qquad \partial\varphi / \partial r = UR' \quad (r = R(x))$$

В данном случае следует применять второе преобразование (1), так как рассматриваемое течение внешнее. Обращением этого преобразования является

$$\varphi(x, r) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{r\, \partial r} \int_r^\infty \frac{\Phi(x, y)\, y\, dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} \tag{5}$$

Если при $y \to \infty$ $\Phi \to 0$ и $\partial\Phi / \partial y \to 0$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} \int_r^\infty \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 - r^2}} \tag{6}$$

Так как решением уравнения (2) (с учетом условия 3)) является

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} f(x - y \operatorname{ctg} \mu) - f(0) & (x - y \operatorname{ctg} \mu \geqslant 0) \\ 0 & (x - y \operatorname{ctg} \mu < 0) \end{cases}$$