

которых равны соответственно

$$V^- = \alpha \rho (1 + 1/\gamma)^{\gamma} a_2^{\gamma} / \beta (m\rho)_{p'} \\ V^+ = \alpha \rho (1 + 1/\gamma)^{\gamma} b_2^{\gamma} / \beta (m\rho)_{p'}$$

Из полученных выше результатов следует, что в момент образования нейтральной поверхности будет двигаться со скоростью, определяемой из следующей формулы:

$$V_1 = 1/2(V^- - V^+)$$

Если  $\beta = 0$  и  $\gamma > 1$ , то к моменту образования нейтральной поверхности пьезометрические кривые справа и слева от нее имеют вид [2]

$$p^{\pm} = p_0 + (\pm \xi)^{\gamma/(\gamma-1)} a_1^{\pm}$$

В этом случае из (13) и (16) следует, что в момент образования нейтральной поверхности будет иметь нулевую скорость.

Поступило 27 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М. Об одной задаче нелинейной нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
2. Поляни и В. Д. О характере движения границы раздела при нелинейной фильтрации. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.

УДК 532.5.013.2

ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА ПРОСТЕЙШЕЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

В. М. АСТАПЕНКО, М. И. ГУРЕВИЧ

(Москва)

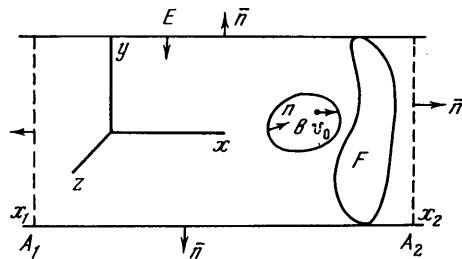
Ламб [1] исследовал звукопроводность плоской решетки, контуры элементов которой образовывались с помощью обтекания бесконечного ряда диполей. Однако Ламб не учел влияния на звукопроводность решетки ее присоединенной массы. Это обстоятельство впервые замечено Г. Д. Малюжинцом [2].

Здесь ищется присоединенная масса элемента решетки, представляющей собой пространственный аналог решетки Ламба. В пространстве  $x, y, z$  в плоскости  $x = 0$  двоякопериодично расположены диполи с периодами  $a$  по оси  $y$  и  $b$  по оси  $z$ . Оси диполей параллельны оси  $x$  и диполи перемещаются со скоростью  $v_0$ . В относительном движении диполи неподвижны, а на них набегают равномерный поток со скоростью  $v_0$ , направленной в отрицательном направлении по оси  $x$  при  $v_0 > 0$ . Когда периоды  $a$  и  $b$  решетки одновременно стремятся к бесконечности, элементы решетки приближаются по своей форме к сферам.

Прежде чем перейти к изучению течения, получим общую формулу для присоединенной массы в бесконечной цилиндрической трубе тела, движущегося параллельно стенкам трубы, нормальное сечение которой имеет произвольную форму. Формула эта аналогична соответствующему выражению для присоединенной массы плоской решетки [3].

Очевидно, что обтекание элемента описанной выше двоякопериодической решетки совпадает с обтеканием в прямоугольной цилиндрической трубе диполя, расположенного на оси трубы.

**1. Вычисление присоединенной массы тела в цилиндрической трубе.** Рассмотрим бесконечную цилиндрическую трубу произвольной формы. Образующие стенок трубы параллельны оси  $x$  (фигура). Пусть площадь сечения трубы равна  $F$ . В трубе со скоростью  $v_0$ , параллельной образующим трубы, движется тело  $B$ . Жидкость, напол-



няющая трубу, идеальна и несжимаема. Потенциал скоростей течения  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$ , причем  $\text{grad } \Phi = 0$  при  $|x| = \infty$ .

Нетрудно видеть [1], что кинетическая энергия  $T$  жидкости плотности  $\rho$  в объеме, ограниченном стенками трубы и поверхностью тела  $S$ , выражается в виде

$$2T = \rho \iint_S (\Phi + v_0 x) \left( \frac{\partial\Phi}{\partial n} + v_0 \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS \quad (1.1)$$

где  $\bar{n}$  — нормаль к поверхности  $S$ , направленная внутрь тела, величина  $\Phi = \varphi - v_0 x$  является потенциалом скоростей потока, набегающего на тело справа налево со скоростью  $v_0$ .

Так как на поверхности тела  $\partial\Phi / \partial n = 0$ , то

$$2T = \rho v_0 \iint_S \Phi \frac{\partial x}{\partial n} dS + \rho v_0^2 \iint_S x \frac{\partial x}{\partial n} dS \quad (1.2)$$

Так как  $\Delta\Phi = 0$  и  $\Delta x = 0$ , то имеем

$$\iint_{S+A_1+A_2+E} \left( \Phi \frac{\partial x}{\partial n} - x \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) d\Sigma = 0 \quad (1.3)$$

где  $E$  — поверхность трубы,  $A_1(x = x_1)$  и  $A_2(x = x_2)$  — нормальные, сколь угодно удаленные сечения трубы (фигура). Так как  $\partial\Phi / \partial n$  и  $\partial x / \partial n$  на поверхности трубы равны нулю, то из (1.3) легко получить

$$\iint_S \Phi \frac{\partial x}{\partial n} dS = \iint_{A_1+A_2} x \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\Sigma - \iint_{A_1+A_2} \Phi \frac{\partial x}{\partial n} d\Sigma$$

или с любой точностью

$$\iint_S \Phi \frac{\partial x}{\partial n} dS = -x_2 v_0 F + x_1 v_0 F - \Phi_2 F + \Phi_1 F = F(\Phi_1 + v_0 x_1) - F(\Phi_2 + v_0 x_2)$$

После перехода к пределу, когда  $x_2 \rightarrow \infty$  и  $x_1 \rightarrow -\infty$ , откуда и из (1.3) следует:

$$\iint_S \Phi \frac{\partial x}{\partial n} dS = F(\varphi_{-\infty} - \varphi_{+\infty})$$

Следовательно, (1.2) принимает вид

$$2T = -\rho F v_0 (\varphi_{+\infty} - \varphi_{-\infty}) + \rho v_0^2 \iint_S x \frac{\partial x}{\partial n} dS \quad (1.4)$$

Но очевидно, что

$$\iint_S x \frac{\partial x}{\partial n} dS = -V_B$$

где  $V_B$  — объем тела  $B$ . Теперь получается окончательная формула для коэффициента  $\lambda_{xx}$  присоединенной массы тела  $B$ , при его движении в направлении оси  $x$

$$\lambda_{xx} = \frac{2T}{v_0^2} = -\frac{\rho F}{v_0} (\varphi_{+\infty} - \varphi_{-\infty}) - \rho V_B \quad (1.5)$$

**2. Потенциал скоростей  $\Phi$  простейший двоякопериодической решетки.** Потенциал скоростей описанной выше решетки, образованной диполями, которые расположены в плоскости  $x = 0$  с периодами  $a, b$  по осям  $y, z$ , имеет вид

$$\Phi = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Qx R_{n,m}^{-3/2}, \quad R_{n,m} = x^2 + (y - an)^2 + (z - bm)^2 \quad (2.1)$$

где суммирование производится по целым значениям  $m$  и  $n$ ,  $4\pi Q$  — момент диполей.

Разобьем двойную сумму, входящую в (2.1), на две части

$$\varphi = -Q \sum_{a^2n^2+b^2m^2 < M^2} \sum x R_{n,m}^{-3/2} - Q \sum_{a^2n^2+b^2m^2 \geq M^2} \sum x R_{n,m}^{-3/2} \quad (2.2)$$

где  $M$  — произвольное положительное число. Очевидно, что при любом фиксированном  $M^2$  и  $|x| \rightarrow \infty$  первая сумма стремится к нулю.

Вычислим асимптотическое значение второй суммы  $I_M$  в (2.2) при  $|x| \rightarrow \infty$  и  $M$  сколь угодно большим.

Прежде всего заметим, что при достаточно большом  $M$

$$I_M \approx \frac{1}{ab} \sum_{a^2n^2+b^2m^2 \geq M^2} \sum \frac{x}{M} \frac{a}{M} \frac{b}{M} / \left[ \frac{x^2}{M^2} + \frac{a^2n^2}{M^2} + \frac{b^2m^2}{M^2} \right]^{-3/2}$$

Эту сумму можно рассматривать как интегральную сумму, и тогда, сделав замену

$$\frac{an}{M} = \xi, \quad \frac{bm}{M} = \eta, \quad \frac{a}{M} = d\xi, \quad \frac{b}{M} = d\eta$$

будем иметь асимптотическое значение  $I_M$

$$I_M \approx \frac{x}{abM} \iint \frac{d\xi d\eta}{(x^2/M^2 + \xi^2 + \eta^2)^{3/2}} \quad (2.3)$$

где интегрирование производится по плоскости  $\xi\eta$ , из которой вырезан круг радиуса 1 с центром в начале координат. Формула (2.3) будет тем точнее, чем больше  $|x|/M$ . Вычисляя интеграл (2.3) в полярных координатах и переходя к пределу при  $|x|/M \rightarrow \infty$ , имеем

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} I_M = \pm \frac{2\pi}{ab} \quad (2.4)$$

Пользуясь (2.4) из (2.2), находим уже точные значения потенциалов скоростей  $\varphi$  в бесконечности

$$\varphi_{+\infty} = -\frac{2\pi Q}{ab}, \quad \varphi_{-\infty} = \frac{2\pi Q}{ab} \quad (2.5)$$

**3. Присоединенная масса  $\lambda_{xx}$  элемента двоякопериодической решетки, образованной диполями.** Вставляя в выражение (1.5) для  $\lambda_{xx}$  значения потенциала скоростей из (2.6) и учитывая, что площади  $F$  нормальных сечений «труб», образованных решеткой, равны  $ab$ , получаем

$$\lambda_{xx} = 4\pi\rho Q / v_0 - \rho V_B \quad (3.1)$$

Когда периоды решетки  $a$  и  $b$  стремятся к бесконечности, элемент решетки обращается в шар. В этом случае формула (3.1) дает известную присоединенную массу шара. Авторы применили изложенный метод для вычисления присоединенной массы плоской решетки Ламба и получили тот же результат, который получил В. М. Астапенко [4] классическими методами.

Для вычисления присоединенной массы с помощью формулы (3.1) остается вычислить объем элемента решетки  $V_B$ . Это вычисление можно выполнить после построения семейства линий тока, выходящих из критической точки перед решеткой при ее обтекании относительным потоком. Кроме того, следует отметить, что в акустике требуется знать не саму присоединенную массу  $\lambda_{xx}$ , а именно величину  $\lambda_{xx} + \rho V_B = 4\pi\rho Q / v_0$ , не требующую вычисления  $\lambda_{xx}$  и  $V_B$  в отдельности [5]. Заметим, что в [5] была также проанализирована задача дифракции для двоякопериодической решетки, однако без конкретных примеров.

**4. Представление потенциалов скоростей  $\varphi$  с помощью определенного интеграла.** Потенциал скоростей  $\varphi$  может быть выражен с помощью определенного интеграла через  $\theta$ -функции. Преобразуем (2.1), пользуясь известным тождеством

$$\int_0^\infty e^{-\beta t^{1/2}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta^{-3/2} \quad (4.1)$$

После очевидных преобразований будем иметь

$$\varphi = -\frac{2Qx}{\sqrt{\pi}} \int \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2anyt - a^2n^2t) \right] \times$$

$$\times \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(2bmz - b^2m^2t) \right] e^{-\rho_0^2 t} \sqrt{t} \, dt \quad (4.2)$$

$$\rho_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Суммы, стоящие в скобках, представляют собой  $\theta$ -функции [6]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(2aynt - a^2n^2t) = \theta_3 \left( iayt \mid i \frac{a^2}{\pi} t \right)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(2bzmt - b^2m^2t) = \theta_3 \left( ibzt \mid i \frac{b^2}{\pi} t \right)$$

$$q_1 = e^{\pi i \tau_1}, \quad q_2 = e^{\pi i \tau_2}, \quad \tau_1 = ia^2t / \pi, \quad \tau_2 = ib^2t / \pi.$$

Таким образом, (4.2) преобразуется в

$$\varphi = -\frac{2Qx}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \theta_3(iayt | \tau_1) \theta_3(ibzt | \tau_2) e^{-\rho_0^2 t} \sqrt{t} \, dt \quad (4.3)$$

Формула (4.3) неудобна для числовых расчетов, так как верхний предел интеграла бесконечен. Разобьем интервал интегрирования на два:  $(0, 1)$  и  $(1, \infty)$ ;  $\theta$ -функции, входящие в интеграл на интервале интегрирования  $(1, \infty)$ , преобразуются при помощи мнимого преобразования Якоби [6]

$$\theta_3(iayt | \tau_1) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{y^2 t} \theta_3 \left( \frac{\pi y}{a} \mid \frac{\pi i}{a^2 t} \right) \quad (4.4)$$

$$\theta_3(ibzt | \tau_2) = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{z^2 t} \theta_3 \left( \frac{\pi z}{b} \mid \frac{\pi i}{b^2 t} \right) \quad (4.5)$$

Заменяя в этом интервале  $t$  через  $1/\xi$ , а затем, переименовывая переменную интегрирования  $\xi$  в  $t$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi = & -\frac{2Qx}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_0^1 \theta_3 \left( iayt \mid \frac{io^2t}{\pi} \right) \theta_3 \left( ibzt \mid \frac{ib^2t}{\pi} \right) e^{-\rho_0^2 t} \sqrt{t} \, dt + \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{ab} \int_0^1 \theta_3 \left( \frac{\pi y}{a} \mid \frac{\pi it}{a^2} \right) \theta_3 \left( \frac{\pi z}{b} \mid \frac{\pi it}{b^2} \right) e^{-x^2/t - t^{-3/2}} \, dt \right] \quad (4.6) \end{aligned}$$

**5. Нахождение точек, из которых выходят семейства линий тока, образующих элемент решетки.** Критические точки  $x = \pm x_1$  в относительном течении, которые совпадают с вершинами тела, образующего элемент решетки, расположенной вдоль оси  $x$ , определяются из уравнения

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y=0, z=0} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y=0, z=0} - v_0 = 0 \quad (5.1)$$

Значение  $x_1$  при заданном  $Q$  определять из этого уравнения сложно. Выгоднее, задаваясь значением  $x_1$ , найти из (5.1) соответствующую величину  $Q$ .

Используя выражение (4.6), вычислим искомую величину  $Q/v_0$

$$\begin{aligned} \frac{Q}{v_0} = & -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ \int_0^1 \theta_3 \left( 0 \mid \frac{ia^2}{\pi} t \right) \theta_3 \left( 0 \mid \frac{ib^2}{\pi} t \right) \times \right. \\ & \left. \times (1 - 2x_1^2 t) e^{-x_1^2 t} \sqrt{t} \, dt + \frac{\pi}{ab} \int_0^1 \theta_3 \left( 0 \mid \frac{\pi it}{a^2} \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \theta_3 \left( 0 \left| \frac{\pi i t}{b^2} \right. \right) \left( 1 - \frac{2x_1^2}{t} \right) e^{-x_1^2/t} e^{-3/2} dt \}^{-1} \quad (5.2)$$

Можно было бы, пользуясь (2.1), получить формулу, аналогичную (5.2), но интегральное представление более удобно для вычисления  $Q/v_0$  на ЭВМ.

Поступило 8 XII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
2. Малюжинец Г. Д. Средние краевые условия на плоскости, определяющие дальнее поле при дифракции длинных волн на частой акустической жесткой решетке. Симпозиум по дифракции волн, Одесса, М., Изд-во АН СССР, 1960.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
4. Астапенко В. М. Асимптотика решения задачи дифракции длинной плоской электромагнитной волны на решетке из произвольных профилей. Радиотехника и электроника, 1971, т. 16, вып. 9.
5. Астапенко В. М. Дифракция плоской звуковой волны на частой двоякопериодической решетке. Тр. Акуст. ин-та, 1970, вып. 11.
6. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1934.

УДК 532.526:533.694.71/72

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ОСТРЫХ И ЗАТУПЛЕННЫХ КОНУСОВ ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГЕЛИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНОГО ВДУВА

В. Н. ХАРЧЕНКО

(Москва)

Приведены результаты оптических и весовых испытаний, а также распределение давления вдоль боковой поверхности конусов с углами полураствора 5 и 10° при равномерно распределенном вдуве через боковую поверхность или сферически затупленные носки конусов. Показано, что сильный вдув приводит к существенному изменению распределения давления и сопротивления.

Эта работа является продолжением работы [1]<sup>1</sup>, в которой были приведены первые результаты экспериментов в гелиевой аэродинамической трубе при числе  $M_\infty \approx 25$  и интенсивном вдуве гелия через боковую поверхность острого конуса.

Таблица 1

Размер	№ модели							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$D$ , мм	30	40	80	120	60	80	80	80
$\beta_1$ , °С	5	5	10	10	10	10	10	10
$l$ , мм	—	—	—	200	27	—	—	—
$L$ , мм	—	—	—	120	120	—	—	—
$r$ , мм	—	—	—	—	—	5	10	20

Последующие опыты, некоторые результаты которых приведены ниже, дополняют имеющиеся в литературе данные экспериментальных [1-3] и теоретических [4-6] работ, а также позволяют выявить некоторые новые характерные особенности течения.

На фиг. 1, а, б, в приведены схематические чертежи трех вариантов моделей: а — острый конус с вдувом через всю боковую поверхность (модели 1-3); б — острый конус с вдувом через часть боковой поверхности вблизи вершины (модели

<sup>1</sup> На фиг. 7 работы [1] допущена опечатка. На оси ординат левого графика вместо 1.5 и 1.8 следует 1.0 и 1.5 соответственно.