УДК 532.5

ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ОДНОМЕРНОГО ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА ВБЛИЗИ НЕЙТРАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Д. ПОЛЯНИН

(*Москва*)

Выводятся некоторые геометрические и кинематические соотношения вблизи нейтральной поверхности, возникающей при нестационарном движении жидкости через пористую среду. По разные стороны от этой поверхности жидкость движется в противоположных направлениях. Рассматривается случай встречного прямолинейно-параллельного потока.

Пусть в области малых скоростей фильтрации жидкость движется согласно закону

$$\begin{aligned} &\mathbf{w} = -\alpha(|\nabla p| - \beta)^{\gamma}\nabla p \,/\, |\nabla p| \qquad \text{для } |\nabla p| \geqslant \beta \\ &\mathbf{w} = 0 \qquad \text{для } |\nabla p| < \beta \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{w}$ — вектор скорости фильтрации, p — давление в жидкости, α — положительная функция давления, $\beta = \mathrm{const} \geqslant 0$ — начальный градиент давления, $\gamma = \mathrm{const} > 0$.

Предполагается, что к моменту времени $t = 0$ нейтральная поверхность Г сформировалась и находится в точке $x = 0$, и что закон ее движения можно представить в виде

$$x_\Gamma = \sum_{q=1}^{\infty} V_q t^q \tag{2}$$

В пористой среде выделяется объем, ограниченный прямым цилиндром с единичной площадью основания, лежащего на Г в момент времени $t = 0$, и ребром длины $\Delta x = \Sigma V_q \Delta t^q$ в направлении перемещения Г (для определенности считаем, что Г перемещается вправо).

Распределения давления справа от нейтральной поверхности p^+ и слева от нее p^- разыскиваются в виде

$$\begin{aligned} &p^- = p_\Gamma + \sum_{i=1}^{\infty} (-\zeta)^{\mu_i} a_i, \qquad \mu_{i+1} > \mu_i > 0 \\ &p^+ = p_\Gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \zeta^{\nu_j} b_j, \qquad \nu_{j+1} > \nu_j > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

где ζ — координата подвижной системы отсчета, начало которой находится на Г. Коэффициенты разложений a_i и b_j, а также p_Γ — давление на Г — предполагаются непрерывными и дифференцируемыми функциями времени t (или, учитывая (2), координаты x)

$$\begin{aligned} &a_i = \sum_{l=0}^{\infty} a_{il} t^l = \sum_{l=0}^{\infty} \bar{a}_{il} x^l \\ &b_j = \sum_{n=0}^{\infty} b_{jn} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_{jn} x^n \\ &p_\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k x^k \end{aligned} \tag{4}$$

Рассматривается баланс массы жидкости в выделенном объеме за малый промежуток времени Δt. Приращение массы за счет изменения давления от $p_\Gamma(x)$ до p^- ($t = 0 + \Delta t$) равно

$$\Delta M^-(p) = \int\limits_{-\Delta x}^{0} m\rho(p^-)\,d\zeta - \int\limits_{0}^{\Delta x} m\rho(p_\Gamma)\,dx \tag{5}$$

Здесь m и ρ — соответственно пористость среды и плотность жидкости, которые полагаются достаточно гладкими функциями давления.

Указанное изменение давления связано с количеством жидкости, которое за время Δt втекает в цилиндр через левое основание. Это количество в соответствии с (1) окажется равным

$$\Delta M^-(t) = \int\limits_{0}^{\Delta t} \rho w \Big|_{\zeta=-x_\Gamma} dt \tag{6}$$

Аналогично выписывается выражение для приращения массы жидкости за счет изменения давления от p^+ $(t = 0)$ до $p_\Gamma(x)$

$$\Delta M^+(p) = \int\limits_{0}^{\Delta x} m\rho(p_\Gamma)\,dx - \int\limits_{0}^{\Delta x} m\rho(p^+)\,d\zeta \tag{7}$$

а также выражение для количества жидкости, которая втекла за время Δt в цилиндр через правое основание

$$\Delta M^+(t) = \int\limits_{0}^{\Delta t} \rho w \Big|_{\zeta=\Delta x - x_\Gamma} dt \tag{8}$$

Разложив входящие в (5)—(8) функции в ряды по возрастающим степеням малых добавок к $p_0 = p_\Gamma$ $(t = 0)$ и проведя интегрирование, легко получить выражения, представляющие собой ряды по возрастающим степеням Δt. Соответствующие формулы здесь не приводятся из-за громоздкости.

Как уже указывалось, правые части выражений (5) и (6) должны быть равны между собой. Точно так же равны правые части выражений (7) и (8)

В случае фильтрации с начальным градиентом $(\beta > 0)$, последовательно приравнивая старшие члены преобразованных выражений, можно получить соотношения

$$\mu_1 = \nu_1 = 1, \qquad a_1 = b_1 = \beta \tag{9}$$

$$\mu_2 = \nu_2 = 1 + 1/\gamma \tag{10}$$

$$p_1 = a\rho(1 + 1/\gamma)^\gamma (a_2^\gamma + b_2^\gamma) / 2(m\rho)_p' \tag{11}$$

$$V_1 = a\rho(1 + 1/\gamma)^\gamma (a_2^\gamma - b_2^\gamma) / 2\beta(m\rho)_p' \tag{12}$$

В работе [1] дано точное решение задачи о встречной фильтрации вязко-пластичной жидкости $(\beta = 1)$, в котором явно фигурируют условия (9). Зная заранее о существовании условий (10) — (12), их оказалось легко выделить из упомянутого решения в явном виде.

При фильтрации без начального градиента $(\beta = 0)$ аналогичным образом получаются следующие соотношения на нейтральной поверхности:

$$\mu_1 = \nu_1 = 1 + 1/\gamma, \qquad a_1 = b_1 \tag{13}$$

$$\mu_2 = \nu_2 = 1 + 2/\gamma, \qquad a_2 = -b_2 \tag{14}$$

$$p_1 = a\rho(1 + 1/\gamma) a_1^\gamma / (m\rho)_p' \tag{15}$$

$$V_1 = a\rho\gamma(1 + 2/\gamma)(1 + 1/\gamma)^{\gamma-1} a_1^{\gamma-2} a_2 / (m\rho)_p' \tag{16}$$

Из полученного следует, что при фильтрации с начальным градиентом, а также в случае $\gamma \neq 1/n$, где n — целое положительное число, нейтральная поверхность является поверхностью слабого разрыва для функции давления.

Как известно (см. например, [2]), если область фильтрации до момента возмущения являлась зоной постоянного давления, то нейтральная поверхность образуется мгновенно лишь при фильтрации без начального градиента, когда $\gamma \leqslant 1$. В остальных случаях возмущение распространяется с конечной скоростью, и нейтральная поверхность может появиться лишь по истечении конечного промежутка времени, когда смыкаются расширяющиеся зоны течения, разделенные до этого зоной покоя.

Если $\beta > 0$, то к моменту образования нейтральной поверхности пьезометрические кривые справа и слева от нее имеют вид [2]

$$p^- = p_0 + (-\zeta)\beta + (-\zeta)^{1+1/\gamma} a_2$$

$$p^+ = p_0 + \zeta\beta + \zeta^{1+1/\gamma} b_2$$

а границы зон возмущения движутся навстречу друг другу со скоростями, модули которых равны соответственно

$$V^- = a\rho(1 + 1/\gamma)^\gamma a_2^\gamma / \beta(m\rho)_p'$$
$$V^+ = a\rho(1 + 1/\gamma)^\gamma b_2^\gamma / \beta(m\rho)_p'$$

Из полученных выше результатов следует, что в момент образования нейтральная поверхность будет двигаться со скоростью, определяемой из следующей формулы:

$$V_1 = {}^1/_2(V^- - V^+)$$

Если $\beta = 0$ и $\gamma > 1$, то к моменту образования нейтральной поверхности пьезометрические кривые справа и слева от нее имеют вид [2]

$$p^\pm = p_0 + (\pm\zeta)^{\gamma/(\gamma-1)} a_1^\pm$$

В этом случае из (13) и (16) следует, что в момент образования нейтральная поверхность будет иметь нулевую скорость.

Поступило 27 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М. Об одной задаче нелинейной нестационарной фильтрации. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 5.
2. Полянин В. Д. О характере движения границы раздела при нелинейной фильтрации. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.

УДК 532.5.013.2

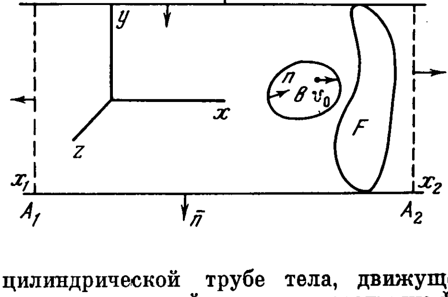
ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА ПРОСТЕЙШЕЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ

В. М. АСТАПЕНКО, М. И. ГУРЕВИЧ

(*Москва*)

Ламб [1] исследовал звукопроводность плоской решетки, контуры элементов которой образовывались с помощью обтекания бесконечного ряда диполей. Однако Ламб не учел влияния на звукопроводность решетки ее присоединенной массы. Это обстоятельство впервые замечено Г. Д. Малюжинцом [2].

Здесь ищется присоединенная масса элемента решетки, представляющей собой пространственный аналог решетки Ламба. В пространстве x, y, z в плоскости $x = 0$ двоякопериодично расположены диполи с периодами a по оси y и b по оси z. Оси диполей параллельны оси x и диполи перемещаются со скоростью v_0. В относительном движении диполи неподвижны, а на них набегает равномерный поток со скоростью v_0, направленной в отрицательном направлении по оси x при $v_0 > 0$. Когда периоды a и b решетки одновременно стремятся к бесконечности, элементы решетки приближаются по своей форме к сферам.



Прежде чем перейти к изучению течения, получим общую формулу для присоединенной массы в бесконечной цилиндрической трубе тела, движущегося параллельно стенкам трубы, нормальное сечение которой имеет произвольную форму. Формула эта аналогична соответствующему выражению для присоединенной массы плоской решетки [3].

Очевидно, что обтекание элемента описанной выше двоякопериодической решетки совпадает с обтеканием в прямоугольной цилиндрической трубе диполя, расположенного на оси трубы.

1. Вычисление присоединенной массы тела в цилиндрической трубе. Рассмотрим бесконечную цилиндрическую трубу произвольной формы. Образующие стенок трубы параллельны оси x (фигура). Пусть площадь сечения трубы равна F. В трубе со скоростью v_0, параллельной образующим трубы, движется тело B. Жидкость, напол-