

УДК 536.25

О КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНОЙ КОНВЕКЦИИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДУЛИРОВАННОМ ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Г. И. БУРДЭ

(Пермь)

Рассматривается плоское конвективное движение, возникающее в подогреваемом снизу слое вязкой несжимаемой жидкости при наличии периодической модуляции силы тяжести. Для решения нелинейных нестационарных уравнений Навье — Стокса и теплопроводности применяется метод разложения по степеням амплитуды движения. Определяются границы устойчивости равновесия (первое приближение) и амплитуда установившихся конвективных колебаний. Проводится сравнение с результатами численного расчета методом сеток.

Известно [1-8], что модуляция поля тяжести может оказывать значительное влияние как на конвективную устойчивость равновесия, так и на конвективные движения, возникающие в результате неустойчивости.

Большая часть работ [1-6] посвящена исследованию устойчивости равновесия жидкости в линейной постановке. Рассмотрение нелинейных параметрических конвективных колебаний производилось только численно [7, 8]. В [9] предлагается метод аналитического решения нелинейных нестационарных уравнений конвекции; однако задача решается в пределе больших чисел Прандтля, в результате чего выпадают из рассмотрения собственно параметрические эффекты.

В данной работе для исследования конечно-амплитудной параметрической конвекции, возникающей в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости при наличии модуляции поля тяжести, применяется модифицированный метод разложения по степеням амплитуды. Метод позволяет найти границы конвективной устойчивости (первое приближение) и определить амплитуду установившихся конвективных колебаний. Из полученных результатов видно, что в зависимости от параметров задачи возможно как «мягкое», так и «жесткое» возбуждение конвективных колебаний. Проводится сравнение с полученными ранее [7, 8] численными результатами.

1. Пусть плоский бесконечный горизонтальный слой вязкой несжимаемой жидкости совершает гармонические колебания вдоль вертикальной оси. Рассмотрим плоское конвективное движение, возникающее в таком слое при подогреве снизу. Толщина слоя a , температура на нижней границе, принята за начало отсчета, на верхней равна $-\Theta$. Начало координат выберем на нижней плоскости и направим ось y вертикально вверх, а ось x — горизонтально.

Колебания слоя приводят к периодической модуляции поля тяжести переменными силами инерции. Запишем уравнения конвекции через функцию тока ψ и температуру T , отсчитываемую от равновесного распределения $-\Theta(y/a)$. После перехода к безразмерным переменным получим

$$\left(\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \Delta\psi + G(1 + \vartheta \cos 2\omega t) \frac{\partial T}{\partial x} = L(\psi, \Delta\psi), \quad G = \frac{g\beta\Theta a^3}{\nu^2}$$

$$\left(\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{P} \Delta\right) T + \frac{\partial \psi}{\partial x} = L(\psi, T), \quad P = \frac{\nu}{\omega} \quad (1.1)$$

$$L(f, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Здесь G — число Грасгофа, P — число Прандтля, 2ω — безразмерная частота модуляции, ϑ — относительная амплитуда модуляции [7]. В качестве единиц измерения длины, времени, функции тока и температуры

выбраны соответственно a , a^2/χ , ν и Θ . Все дальнейшие вычисления будут относиться к наиболее простому для анализа случаю слоя со свободными границами, так что граничные условия к уравнениям (1.1) имеют вид

$$\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad T = 0 \quad (y = 0, y = 1) \quad (1.2)$$

Следуя методу Л. В. Канторовича [10], сведем задачу (1.1), (1.2) к системе нелинейных уравнений для координатных функций. Имея в виду исследование только стационарных колебательных режимов, в качестве базисных функций будем использовать гармоники вида $\sin n\omega t$ и $\cos n\omega t$. При этом в зависимости от периодичности возможны два типа разложений:

для «полуцелых» решений с периодом $2\pi/\omega$

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0(x, y) + \sum_{n=1}^{2N} [\psi_{2n}(x, y) \cos n\omega t + \psi_{2n-1}(x, y) \sin n\omega t] \\ T &= T_0(x, y) + \sum_{n=1}^{2N} [T_{2n}(x, y) \cos n\omega t + T_{2n-1}(x, y) \sin n\omega t] \end{aligned} \quad (1.3)$$

и для «целых» решений с периодом π/ω

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0(x, y) + \sum_{n=1}^N [\psi_{2n}(x, y) \cos 2n\omega t + \psi_{2n-1}(x, y) \sin 2n\omega t] \\ T &= T_0(x, y) + \sum_{n=1}^N [T_{2n}(x, y) \cos 2n\omega t + T_{2n-1}(x, y) \sin 2n\omega t] \end{aligned} \quad (1.4)$$

В этом разделе будем для определенности приводить только формулы для решения целого типа.

Подставляя (1.4) в (1.1), умножая на $\sin 2n\omega t$ и $\cos 2n\omega t$ и усредняя по периоду модуляции π/ω , приходим к системе нелинейных уравнений для координатных функций

$$\begin{aligned} & -\Delta^2 \psi_0 + G \frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{\partial G}{2} \frac{\partial T_2}{\partial x} = K_0(\psi, \Delta \psi) \\ & -\frac{1}{P} \Delta T_0 + \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = K_0(\psi, T) \\ & -\frac{2n\omega}{P} \Delta \psi_{2n} - \Delta^2 \psi_{2n-1} + G \frac{\partial T_{2n-1}}{\partial x} + \frac{\partial G}{2} \left(\frac{\partial T_{2n+1}}{\partial x} + \frac{\partial T_{2n-3}}{\partial x} \right) = K_{2n-1}(\psi, \Delta \psi) \\ & -\frac{2n\omega}{P} T_{2n} - \frac{1}{P} \Delta T_{2n-1} + \frac{\partial \psi_{2n-1}}{\partial x} = K_{2n-1}(\psi, T) \\ & \frac{2n\omega}{P} \Delta \psi_{2n-1} - \Delta^2 \psi_{2n} + G \frac{\partial T_{2n}}{\partial x} + \frac{\partial G}{2} \left(\frac{\partial T_{2n+2}}{\partial x} + \frac{\partial T_{2n-2}}{\partial x} \right) + \\ & + \delta_{n1} \partial G \frac{\partial T_0}{\partial x} = K_{2n}(\psi, \Delta \psi) \\ & \frac{2n\omega}{P} T_{2n-1} - \frac{1}{P} \Delta T_{2n} + \frac{\partial \psi_{2n}}{\partial x} = K_{2n}(\psi, T) \quad (n = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 K_0(\psi, T) &= L(\psi_0, T_0) + \sum_{m=1}^N \frac{1}{2} L(\psi_m, T_m) \\
 K_{2n-1}(\psi, T) &= L(\psi_0, T_{2n-1}) + L(\psi_{2n-1}, T_0) + \\
 &+ \sum_{h,l=1; |h-l|=n}^N \frac{1}{2} (-1)^{h-l} [L(\psi_{2h-1}, T_{2l}) + L(\psi_{2h}, T_{2l-1})] + \\
 &+ \sum_{h,l=1; h+l=n}^N \frac{1}{2} [L(\psi_{2h-1}, T_{2l}) + L(\psi_{2h}, T_{2l-1})] \quad (1.6) \\
 K_{2n}(\psi, T) &= L(\psi_0, T_{2n}) + L(\psi_{2n}, T_0) + \sum_{h,l=1; |h-l|=n}^N \frac{1}{2} [L(\psi_{2h}, T_{2l}) + \\
 &+ L(\psi_{2h-1}, T_{2l-1})] + \sum_{h,l=1; h+l=n}^N \frac{1}{2} [L(\psi_{2h}, T_{2l}) - L(\psi_{2h-1}, T_{2l-1})] \\
 &(n = 1, 2, \dots, N)
 \end{aligned}$$

В формулах (1.5), (1.6) величины ψ_m, T_m с $m < 1$ и $m > 2N$ считаются равными нулю; δ — символ Кронекера.

Решение нелинейной системы (1.5) будем искать в виде разложения по степеням амплитуды движения ε [11, 12]

$$\psi_m = \varepsilon \psi_m^{(1)} + \varepsilon^2 \psi_m^{(2)} + \varepsilon^3 \psi_m^{(3)} + \dots \quad (1.7)$$

$$T_m = \varepsilon T_m^{(1)} + \varepsilon^2 T_m^{(2)} + \varepsilon^3 T_m^{(3)} + \dots$$

При заданных G, P и ω амплитуда движения ε зависит от амплитуды возбуждения ϑ . Можно поэтому записать формальное разложение

$$\vartheta = \vartheta^{(0)} + \varepsilon \vartheta^{(1)} + \varepsilon^2 \vartheta^{(2)} + \dots \quad (1.8)$$

где величины $\vartheta^{(0)}, \vartheta^{(1)}, \vartheta^{(2)}, \dots$ зависят от ω, G, P . Поскольку ϑ есть внешне контролируемый параметр, соотношение (1.8) определяет ε в зависимости от всех параметров задачи.

После подстановки рядов (1.7), (1.8) в систему (1.5) рассматриваем уравнения для каждой степени ε отдельно. Тогда в первом приближении по ε приходим к уравнениям, которые определяют периодическое по времени (см. (1.4)) решение линеаризованной задачи, соответствующее, согласно теореме Флоке, границам областей неустойчивости. Таким образом, применение разложений (1.7), (1.8) эквивалентно рассмотрению параметрической конвекции вблизи границы устойчивости $\vartheta^{(0)}(\omega, G, P)$. В следующих приближениях по ε получается ряд систем линейных неоднородных уравнений, условия разрешимости которых используются для определения $\vartheta^{(k)}$.

В системах, получающихся в каждом приближении, удобно, исключив $\psi_{2n-1}^{(k)}$ и $\psi_{2n}^{(k)}$, перейти к уравнениям только для $T_{2n-1}^{(k)}$ и $T_{2n}^{(k)}$. Запишем в начале уравнения линейной задачи (первый порядок по ε)

$$-\frac{1}{P} \Delta^3 T_0^{(1)} + G \frac{\partial^2 T_0^{(1)}}{\partial x^2} + \vartheta^{(0)} \frac{G}{2} \frac{\partial^2 T_2^{(1)}}{\partial x^2} = 0$$

$$\left(\frac{4n^2\omega^2}{P^2} \Delta^2 - \frac{1}{P} \Delta^3 + G \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_{2n-1}^{(1)} - \frac{2n\omega}{P} \frac{P+1}{P} \Delta^2 T_{2n}^{(1)} +$$

$$+ \vartheta^{(0)} \frac{G}{2} \left(\frac{\partial^2 T_{2n+1}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{2n-3}^{(1)}}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1.9)$$

$$\left(\frac{4n^2\omega^2}{P^2} \Delta - \frac{1}{P} \Delta^3 + G \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) T_{2n}^{(1)} + \frac{2n\omega}{P} \frac{P+1}{P} \Delta^2 T_{2n-1}^{(1)} +$$

$$+ \vartheta^{(0)} \frac{G}{2} \left(\frac{\partial^2 T_{2n+2}^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{2n-2}^{(1)}}{\partial x^2} \right) + \vartheta^{(0)} \delta_{n1} G \frac{\partial^2 T_0^{(1)}}{\partial x^2} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

Введем для краткости $(2N+1)$ -мерный вектор — столбец $\mathbf{T}^{(k)}$ с компонентами $T_n^{(k)}$ и матричный дифференциальный оператор A , соответствующий линейной однородной системе (1.9). Тогда системы уравнений в последовательных приближениях могут быть записаны следующим образом:

$$A\mathbf{T}^{(1)} = 0 \quad (1.10)$$

$$A\mathbf{T}^{(2)} = \vartheta^{(1)} \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)} \quad (1.11)$$

$$A\mathbf{T}^{(3)} = \vartheta^{(1)} \mathbf{f}^{(2)} + \vartheta^{(2)} \mathbf{f}^{(1)} + \mathbf{F}^{(3)} \quad (1.12)$$

Здесь введены вектор-столбцы $\mathbf{f}^{(k)}$ и $\mathbf{F}^{(k)}$

$$\mathbf{f}^{(k)} = \begin{Bmatrix} f_0^{(k)} \\ \dots \\ f_{2n-1}^{(k)} \\ f_{2n}^{(k)} \\ \dots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \begin{Bmatrix} F_0^{(k)} \\ \dots \\ F_{2n-1}^{(k)} \\ F_{2n}^{(k)} \\ \dots \end{Bmatrix}$$

$$f_0^{(k)} = -\frac{G}{2} \frac{\partial^2 T_2^{(k)}}{\partial x^2}$$

$$f_{2n-1}^{(k)} = -\frac{G}{2} \left(\frac{\partial^2 T_{2n+1}^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{2n-3}^{(k)}}{\partial x^2} \right) \quad (1.13)$$

$$f_{2n}^{(k)} = -\frac{G}{2} \left(\frac{\partial^2 T_{2n+2}^{(k)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{2n-2}^{(k)}}{\partial x^2} \right) - \delta_{n1} G \frac{\partial^2 T_0^{(k)}}{\partial x^2}$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

$$F_0^{(k)} = \sum_{l, m=1; l+m=k}^k \left[\Delta^2 K_0(\psi^{(l)}, T^{(m)}) + \frac{\partial}{\partial x} K_0(\psi^{(l)}, \Delta\psi^{(m)}) \right]$$

$$F_{2n-1}^{(k)} = \sum_{l, m=1; l+m=k}^k \left[\frac{2n\omega}{P} \Delta K_{2n}(\psi^{(l)}, T^{(m)}) + \Delta^2 K_{2n-1}(\psi^{(l)}, T^{(m)}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x} K_{2n-1}(\psi^{(l)}, \Delta\psi^{(m)}) \right] \quad (1.14)$$

$$F_{2n}^{(k)} = \sum_{l, m=1; l+m=k}^k \left[-\frac{2n\omega}{P} \Delta K_{2n-1}(\psi^{(l)}, T^{(m)}) + \Delta^2 K_{2n}(\psi^{(l)}, T^{(m)}) + \frac{\partial}{\partial x} K_{2n}(\psi^{(l)}, \Delta\psi^{(m)}) \right] \\ (n = 1, 2, \dots, N)$$

(величины $K_m(\psi, T)$ определены соотношениями (1.6)).

Для слоя со свободными границами система (1.10), соответствующая линейной задаче, допускает периодическое по x решение вида

$$\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{a}^{(1)} \cos \alpha x \sin \pi y \quad (1.15)$$

(при отсутствии модуляции (1.15) соответствует наимизшему уровню неустойчивости). Выражение для $\psi^{(1)}$ находится из линеаризованной системы (1.5)

$$\psi^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)} \sin \alpha x \sin \pi y \quad (1.16)$$

Волновое число α определяет периодичность решения вдоль слоя.

Подставляя (1.15) в (1.10), приходим к системе линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $a_m^{(1)}$

$$B_1 \mathbf{a}^{(1)} = 0 \quad (1.17)$$

где B_1 — матричный оператор, получающийся из дифференциального оператора A формальной заменой $\partial^2 / \partial x^2 \rightarrow -\alpha^2$, $\Delta \rightarrow -(\alpha^2 + \pi^2)$. Однородная система (1.17) имеет нетривиальное решение, если ее определитель $|B_1|$ равен нулю, что возможно лишь при существовании некоторой зависимости между параметрами $\vartheta^{(0)}$, ω , α , G , P . Это соотношение определяет положение границ областей неустойчивости. При заданных ω , α , G , P значения $\vartheta^{(0)}$, которые обращают $|B_1|$ в нуль, образуют дискретный спектр. Число уровней в этом спектре зависит от числа используемых в разложении (1.4) функций и равно N (аналогично для разложения (1.3)). Эти уровни соответствуют N нижним границам областей неустойчивости (отметим, что в $|B_1|$ входит величина $(\vartheta^{(0)})^2$, и поэтому имеется также симметричная система N отрицательных уровней, соответствующих противоположному знаку ϑ ; при некоторых же значениях параметров области неустойчивости могут иметь концевые точки, за которыми уровни $\vartheta^{(0)}$ становятся комплексными).

Если $|B_1| = 0$, то из (1.17) можно найти коэффициенты $a_m^{(1)}$; коэффициенты $b_m^{(1)}$ решения для $\psi_m^{(1)}$ находятся из уравнений (1.5), записанных соответственно в линейном по ϵ приближении. Величины $\psi^{(1)}$ и $\mathbf{T}^{(1)}$ с известными $\mathbf{b}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(1)}$ подставляем в правую часть (1.11), и таким образом приходим к системе линейных неоднородных уравнений для определения $T_m^{(2)}$. Необходимым условием существования решения (1.11) является ортогональность правой части (1.11) к решению сопряженного однородного уравнения

$$\langle \mathbf{T}^+, \vartheta^{(1)} \mathbf{f}^{(1)} \rangle + \langle \mathbf{T}^+, \mathbf{F}^{(2)} \rangle = 0 \quad (1.18)$$

Здесь \mathbf{T}^+ есть решение уравнения

$$A^+ \mathbf{T}^+ = 0 \quad (1.19)$$

а угловые скобки обозначают скалярное произведение, определенное следующим образом:

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle = \int_0^{2\pi/\alpha} \int_0^1 (g_0 h_0 + \dots + g_{2N} h_{2N}) dx dy$$

Переходя к рассмотрению (1.18), отметим прежде всего, что сопряженное уравнение (1.19) так же, как и (1.10), допускает решение вида

$$\mathbf{T}^+ = \mathbf{a}^+ \cos \alpha x \sin \pi y \quad (1.20)$$

с коэффициентами \mathbf{a}^+ , определяемыми из системы $B_1^+ \mathbf{a}^+ = 0$. При этом оказывается, что a_m^+ и $a_m^{(1)}$ находятся в простом соотношении

$$a_{2n-1}^+ = -1/2 a_{2n-1}^{(1)}, \quad a_{2n}^+ = 1/2 a_{2n}^{(1)}$$

(при условии $a_0^+ = a_0^{(1)}$). Вычисляя $\mathbf{F}^{(2)}$, учтем, что

$$L(\psi_m^{(1)}, \Delta \psi_l^{(1)}) = 0, \quad L(\psi_m^{(1)}, T_l^{(1)}) = b_m^{(1)} a_l^{(1)} 1/2 \pi \alpha \sin 2\pi y$$

Тогда из (1.14) и (1.16) следует:

$$\mathbf{F}^{(2)} = \mathbf{S}^{(2)} \sin 2\pi y \quad (1.21)$$

где $\mathbf{S}^{(2)}$ — постоянный вектор, вычисляющийся через коэффициенты $a_m^{(1)}$ и $b_m^{(1)}$. И, наконец, выражение для $\mathbf{f}^{(1)}$ получим из (1.13) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)} &= \mathbf{Q}^{(1)} \cos \alpha x \sin \pi y, \quad Q_0^{(1)} = 1/2 \alpha^2 G a_2^{(1)} \\ Q_{2n-1}^{(1)} &= 1/2 \alpha^2 G (a_{2n+1}^{(1)} + a_{2n-3}^{(1)}) \\ Q_{2n}^{(1)} &= 1/2 \alpha^2 G (a_{2n+2}^{(1)} + a_{2n-2}^{(1)}) + \delta_{n1} \alpha^2 G a_0^{(1)} \\ &(n = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Подставляя (1.21) и (1.22) в условие разрешимости (1.18), найдем

$$\langle \mathbf{T}^+, \mathbf{F}^{(2)} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{T}^+, \mathbf{f}^{(1)} \rangle \neq 0$$

откуда следует:

$$\mathfrak{F}^{(1)} = 0 \quad (1.23)$$

С учетом (1.23) и (1.21) система уравнений второго приближения приобретает вид

$$A \mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{S}^{(2)} \sin 2\pi y$$

Ее частное решение

$$\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{a}^{(2)} \sin 2\pi y \quad (1.24)$$

с коэффициентами $\mathbf{a}^{(2)} = B_2^{-1} \mathbf{S}^{(2)}$, где B_2 есть матричный оператор, получающийся из A заменой $\partial^2 / \partial x^2 \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow -4\pi^2$. Для определения функций $\psi_m^{(2)}$ необходимо записать уравнения (1.5) также во втором приближении по ε , после чего находим

$$\psi_m^{(2)} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, 2N) \quad (1.25)$$

Рассмотрим уравнения третьего приближения (1.12). Условие разрешимости неоднородной системы (1.12) с учетом $\mathfrak{F}^{(1)} = 0$ имеет вид

$$\langle \mathbf{T}^+, \mathfrak{F}^{(2)} \mathbf{f}^{(1)} \rangle + \langle \mathbf{T}^+, \mathbf{F}^{(3)} \rangle = 0 \quad (1.26)$$

При вычислении $\mathbf{F}^{(3)}$ учтем, что

$$\begin{aligned} L(\psi_k^{(1)}, \Delta \psi_l^{(2)}) &= L(\psi_k^{(2)}, \Delta \psi_l^{(1)}) = L(\psi_k^{(2)}, T_l^{(1)}) = 0 \\ L(\psi_k^{(1)}, T_l^{(2)}) &= b_k^{(1)} a_l^{(2)} \pi \alpha \cos \alpha x (\sin 3\pi y - \sin \pi y) \end{aligned}$$

Выделяя из $F^{(3)}$ слагаемые с той же координатной зависимостью, что и у порождающего решения (1.15), получим

$$F^{(3)} = S^{(3)} \cos \alpha x \sin \pi y + O(\cos \alpha x \sin 3\pi y)$$

($S^{(3)}$ здесь вычисляется через коэффициенты $b^{(1)}$, $a^{(2)}$).

Присутствие в $F^{(3)}$ членов, пропорциональных $\cos \alpha x \sin \pi y$, приводит к тому, что

$$\langle T^+, F^{(3)} \rangle \neq 0$$

и, таким образом, условие (1.26) позволяет определить первый неисчисляющий $\vartheta^{(2)}$ в разложении (1.8)

$$\vartheta^{(2)} = - \frac{\langle T^+, F^{(3)} \rangle}{\langle T^+, f^{(1)} \rangle} = - \sum_{m=0}^{2N} a_m + S_m^{(3)} \left(\sum_{m=0}^{2N} a_m + Q_m^{(1)} \right)^{-1} \quad (1.27)$$

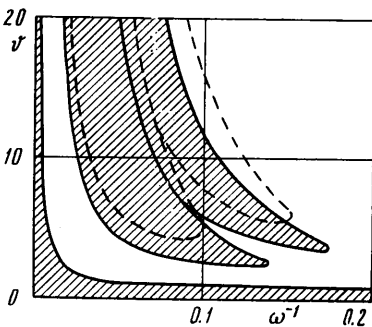
При заданных α , P , G , ω для каждого $\vartheta^{(0)}$, принадлежащего определенной границе области неустойчивости, можно найти соответствующее значение $\vartheta^{(2)}$. Из (1.8), (1.23) и (1.27) следует, что вблизи границы области ε изменяется с ϑ по корневому закону

$$\varepsilon = [(\vartheta - \vartheta^{(0)}) / \vartheta^{(2)}]^{1/2} \quad (1.28)$$

Таким образом, знание величин $\vartheta^{(0)}$ и $\vartheta^{(2)}$ позволяет судить о характере зависимости амплитуды установившихся колебаний ε от амплитуды модуляции ϑ .

Напомним, что все приведенные выше формулы были получены с использованием разложения (1.4), соответствующего решению целого типа. Порядок вычислений при подстановке в (1.1) разложения (1.3) для полуцелого решения аналогичен вышеописанному. Однако при записи рядов (1.7) необходимо учитывать, что полуцелое решение линейной задачи (первый порядок по ε) может содержать только гармоники с нечетным n . Гармоники же с четным n обязаны своим появлением нелинейному взаимодействию, и поэтому при четном n ряды по ε должны начинаться с членов порядка ε^2 . Тем не менее подстановка таких рядов в (1.5) также приводит к (1.23), а следовательно, и к корневому закону (1.28).

2. Перейдем к изложению результатов расчета. Выбор числа базисных функций в разложениях (1.3), (1.4) производился с учетом того, что число определяемых в линейном приближении границ устойчивости равно N . Структура областей неустойчивости исследована ранее [1, 2]. Исходя из результатов [1, 2], для аппроксимации решения целого типа полагалось



Фиг. 1

$N = 3$ (исследуется основная полоса неустойчивости и первая целая резонансная область), а для решения полуцелого типа $N = 2$ (первая полуцелая область). Отметим, что $N = 3$ в целом решении соответствуют семь базисных функций, а $N = 2$ в полуцелом решении — девять функций (добавляются целые гармоники, производимые нелинейными членами, см. (1.3)).

На фиг. 1 показано положение границ устойчивости $\vartheta^{(0)}(\omega)$ на плоскости (ϑ, ω^{-1}) для $\alpha = \pi$ (квадратная конвективная ячейка), числа Прандтля $P = 1$ и $R = 1.11$, где $R = GP / R_0$ (R_0 есть первое критическое значение числа Рэлея в отсутствие моду-

ляции; для слоя со свободными границами $R_0 = \alpha^{-2}(\alpha^2 + \pi^2)^3$). Области неустойчивости на фиг. 1 отмечены штриховкой. К осям координат прилежит основная полоса неустойчивости, описывающая влияние модуля-

ции на стационарную неустойчивость при $R > 1$. Вблизи вертикальной оси расположена первая (полуцелая) область резонансного возбуждения, за ней следует целая резонансная область. Пунктиром на фиг. 1 обозначены границы резонансных областей при тех же α и P , но $R = 0.77$ (при $R < 1$, т. е. в подкритической области, основная полоса неустойчивости отсутствует).

Амплитуда установившихся конвективных колебаний при значениях ϑ , близких к граничному $\vartheta^{(0)}$, определяется квадратичным коэффициентом $\vartheta^{(2)}$ (см. (1.28)). Некоторые черты поведения $\vartheta^{(2)}$ в зависимости от параметров задачи можно понять, исследуя предельный случай очень больших частот.

Рассмотрим вначале результаты по определению $\vartheta^{(0)}$ и $\vartheta^{(2)}$ для полуцелой области неустойчивости. При больших ω положение нижней и верхней границ полуцелой области задается соответственно формулами

$$\vartheta_1^{(0)} = \frac{1.82}{RPk^4} \frac{1}{(\omega^{-1})^2} \quad (2.1)$$

$$\vartheta_2^{(0)} = \frac{19.8}{RPk^4} \frac{1}{(\omega^{-1})^2} \quad (2.2)$$

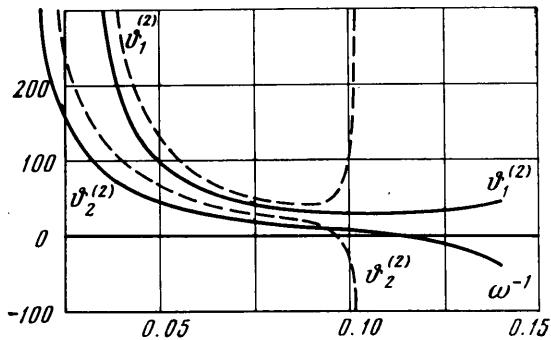
Здесь $k^2 = \alpha^2 + \pi^2$. Используя при вычислении $\vartheta^{(2)}$ значения $\vartheta^{(0)}$, определяемые (2.1) и (2.2), приходим в высокочастотном пределе к следующим соотношениям, соответствующим (2.1) и (2.2)

$$\vartheta_1^{(2)} = \frac{13.9k^2 - 7.51\pi^2}{P(P+1)^2 Rk^8} \frac{1}{(\omega^{-1})^4} \quad (2.3)$$

$$\vartheta_2^{(2)} = \frac{2.26k^2 - 0.464\pi^2}{RPk^4} \frac{1}{(\omega^{-1})^2} \quad (2.4)$$

Из формул (2.3), (2.4) видно, что при больших ω $\vartheta^{(2)}$ положительно как на верхней, так и на нижней границе области, поскольку $k^2 > \pi^2$. Тогда, как следует из (1.28), амплитуда ε вещественна при $\vartheta > \vartheta_1^{(0)}$ (т. е. внутри области неустойчивости и, соответственно, при $\vartheta > \vartheta_2^{(0)}$ (вне области неустойчивости). Таким образом, характер зависимости амплитуды установившихся колебаний ε от амплитуды модуляции ϑ оказывается неодинаковым вблизи нижней и верхней границ полуцелой области.

Для нижней границы $\vartheta_1^{(0)}$ характерно так называемое мягкое возбуждение колебаний, когда по мере изменения параметра от границы внутрь области неустойчивости амплитуда колебаний плавно возрастает от нуля. При жестком же возбуждении, имеющем место на верхней границе $\vartheta_2^{(0)}$, амплитуда скачком меняется от нуля до некоторого конечного значения. В этом случае должны наблюдаться гистерезисные явления, когда при определенном образом задаваемых начальных условиях удастся получить установившиеся колебания с конечной амплитудой за пределами области неустойчивости.



Фиг. 2

Приведем формулы высокочастотного приближения для целых областей неустойчивости. Положение границ основной полосы неустойчивости, нижней границы резонансной области и верхней границы резонансной области определяется соответственно соотношениями

$$\vartheta_0^{(0)} = \frac{2\sqrt{2}(R-1)}{R\sqrt{P}k^2} \frac{1}{\omega^{-1}}, \quad \vartheta_1^{(0)} = \frac{15.2}{RPk^4} \frac{1}{(\omega^{-1})^2}, \quad \vartheta_2^{(0)} = \frac{48}{RPk^4} \frac{1}{(\omega^{-1})^2} \quad (2.5)$$

Отметим, что формула (2.5) была получена в [2] путем применения метода усреднения к уравнениям линейной задачи.

Соответствующие (2.5) значения $\vartheta^{(2)}$ даются при больших ω выражениями

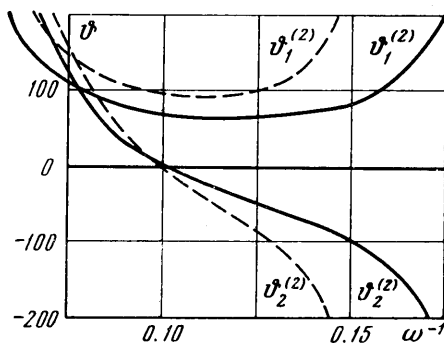
$$\vartheta_0^{(2)} = -\frac{36864}{k^8 RP [2P(R-1)]^{3/2}} \frac{1}{(\omega^{-1})^5} \quad (2.6)$$

$$\vartheta_1^{(2)} = \frac{80.8k^2 + 33.7\pi^2}{RPk^4} \frac{1}{(\omega^{-1})^2}, \quad \vartheta_2^{(2)} = \frac{15.6k^2 + 10.7\pi^2}{RPk^4} \frac{1}{(\omega^{-1})^2} \quad (2.7)$$

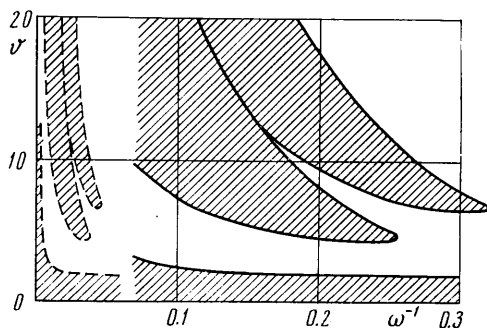
Для основной полосы неустойчивости удается получить и низкочастотное приближение

$$\vartheta_0^{(0)} = \frac{(R-1)\sqrt{2}}{R}, \quad \vartheta_0^{(2)} = -\frac{35k^2}{16\sqrt{2}R} \quad (2.11)$$

Как видно из формул (2.7), для целой резонансной области $\vartheta_1^{(2)} > 0$ и $\vartheta_2^{(2)} > 0$, как и в случае полуцелой области (мягкое возбуждение на



Фиг. 3



Фиг. 4

нижней границе и жесткое — на верхней). Для основной же полосы неустойчивости $\vartheta_0^{(2)} < 0$ (мягкое возбуждение). Напомним, что все эти результаты относятся к предельным случаям высоких и низких частот.

Вычисление величин $\vartheta^{(0)}$ и $\vartheta^{(2)}$ при произвольных частотах модуляции ω производилось для конвективной ячейки квадратного сечения ($\alpha = \pi$). На фиг. 1–7 представлены результаты для трех значений числа Прандтля: $P = 1, 1/7$ и 7.

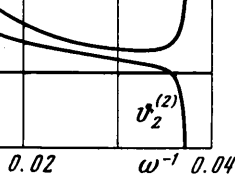
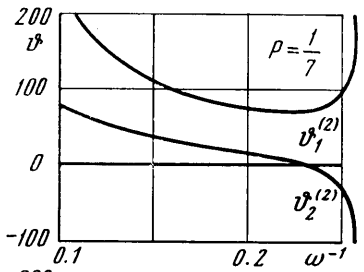
Рассмотрим сначала фиг. 1–3, относящиеся к $P = 1$. На фиг. 1 изображена структура областей неустойчивости $\vartheta^{(0)}(\omega^{-1})$. Показано изменение $\vartheta^{(2)}$ вдоль границ полуцелой (фиг. 2) и целой (фиг. 3) резонансных областей. Сплошные и пунктирные линии на фиг. 1–3 соответствуют

$R = 1.11$ и 0.77 ($R = 1.11$ — надкритическая стационарная ситуация, $R = 0.77$ — подкритическая).

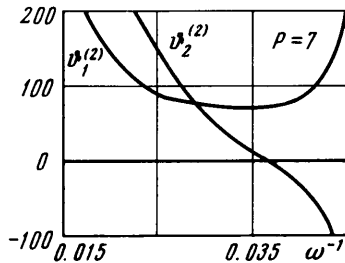
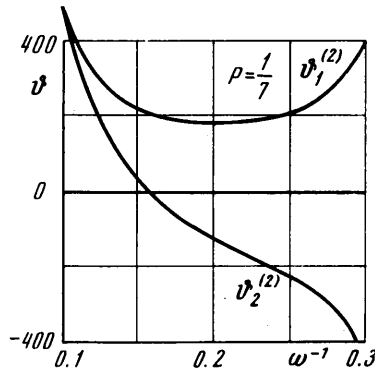
Как видно из фиг. 2, 3, величина $\vartheta_2^{(2)}$, определяющая амплитуду ε вблизи верхней границы, меняет знак при приближении к концевой точке области. Таким образом, вблизи концов резонансных областей мягкое возбуждение колебаний наблюдается на обеих границах. Следует отметить только, что интервал частот, соответствующий мягкому возбуждению на верхней границе, шире в случае целой резонансной области.

Вычисления для основной полосы неустойчивости при $P = 1$ дают $\vartheta_0^{(2)} < 0$ (мягкое возбуждение) при любых значениях частоты ω ; график $\vartheta_0^{(2)}(\omega^{-1})$ не приводится.

Проследим теперь за изменением характера зависимости $\vartheta^{(2)}(\omega^{-1})$ при увеличении и уменьшении числа Прандтля. На фиг. 4—7 сравниваются результаты для $P = 7$ и $1/7$ (при этом $R = 1.33$). Фиг. 4 представляет собой карту устойчивости, соответствующую $P = 1/7$; пунктиром изобра-



Фиг. 5



Фиг. 6

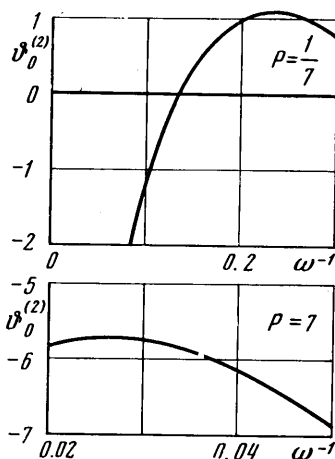
жены границы областей неустойчивости при $P = 7$. Изменение $\vartheta^{(2)}$ в зависимости от ω^{-1} для полужелой области, целой резонансной области и основной полосы неустойчивости показано соответственно на фиг. 5, 6, 7.

Из эффектов, обусловленных изменением числа Прандтля, наибольшего внимания заслуживает появление интервала жесткого возбуждения для основной полосы неустойчивости в случае $P = 1/7$ (см. фиг. 7).

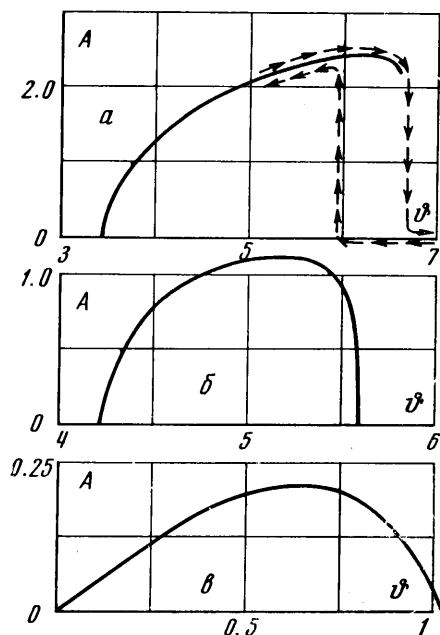
3. Проведем сравнение результатов данного расчета с результатами численного решения исходных уравнений конвекции (1.1) методом сеток. Решение производилось для полости квадратного сечения с твердыми стенками; методика вычислений описана в [7]. Для сопоставления выберем численные данные, относящиеся к $P = 1$ и $R = 1.11$ ($G = 3000 \approx 1.11 G_0$, где G_0 есть критическое значение числа Грасгофа в отсутствие модуляции при $P = 1$).

Карта устойчивости для полости с твердыми границами [7] качественно совпадает с изображенной на фиг. 1. Характерные амплитудные кри-

вые, полученные численным методом, показаны на фиг. 8 (A обозначает амплитуду установившихся колебаний). Гистерезис и жесткое возбуждение колебаний на верхней границе резонансной (получелой) области прослеживается на фиг. 8, *a*; фиг. 8, *b* дает пример мягкого возбуждения колебаний на обеих границах резонансной (целой) области вблизи ее концевой точки; фиг. 8, *в* свидетельствует о мягком возбуждении колебаний на границе основной полосы неустойчивости. Таким образом, существование описанных выше закономерностей возбуждения подтверждается данными численного расчета.



Фиг. 7



Фиг. 8

В заключение автор благодарит Г. З. Гершуни за руководство работой.

Поступило 14 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
3. Gresho P. M., Sani R. L. The effects of gravity modulation on the stability of a heated fluid layer J. Fluid Mech, 1970, vol. 40, pt. 4.
4. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
5. Зеньковская С. М. Исследование конвекции в слое жидкости при наличии вибрационных сил. Изд. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
6. Маркман Г. С. О возникновении конвекции, периодической по времени. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
7. Бурдэ Г. И. Численное исследование конвекции, возникающей в модулированном поле внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
8. Бурдэ Г. И. Численное исследование конвекции в условиях периодической модуляции внешней силы. Уч. зап. Пермск. ун-та, 1971, № 248.
9. Davis S. H. Finite amplitude instability of time dependent flow. J. Fluid Mech., 1970, vol. 45, pt. 1.
10. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.
11. Malkus W. V. R., Veronis G. Finite amplitude cellular convection. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, pt. 3.
12. Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt. 1.