УДК 532.501.34+532.517.2

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ВОЛНИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Я. ЛЕВЧЕНКО, А. С. СОЛОВЬЕВ

(*Новосибирск*)

Исследуется устойчивость по отношению к малым возмущениям течений, скорость которых периодически зависит от пространственной координаты, направленной вдоль течения. Проведены расчеты устойчивости в случае, когда распределение скорости представляет собой решение уравнений пограничного слоя.

1. В исследованиях устойчивости ламинарных течений при больших числах Рейнольдса обычно рассматриваются такие течения, скорость которых либо не меняется при изменении продольной координаты x, либо меняется значительно медленнее скорости возмущающего движения. Расчет устойчивости в линейном приближении сводится при этом к нахождению собственных значений обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Если основное течение меняется достаточно быстро с изменением x, как это происходит в струях, следах, в пограничном слое при отсосе через щели или (в некоторых случаях) на искривленных поверхностях, то в исследованиях устойчивости необходимо учитывать существенную зависимость от x скорости основного течения. В общей постановке проблема очень сложна, и пока не существует общего метода расчета устойчивости таких течений.

Однако, как показано ниже, в важном частном случае, когда основное течение зависит от x периодически, все же удается поставить и решить задачу о собственных значениях путем сведения уравнения в частных производных к некоторой системе обыкновенных дифференциальных уравнений и исследовать таким образом устойчивость по отношению к малым возмущениям быстроменяющегося по x течения. В качестве основного течения в этой работе взято рассмотренное Гертлером [1] периодическое по x течение в пограничном слое над слабо волнистой поверхностью. В технических приложениях часто встречаются волнистые стенки, поэтому решение этой задачи позволяет получить количественные оценки влияния волнистости поверхности на устойчивость ламинарного пограничного слоя. В расчетах устойчивости рассматриваются двумерные возмущения, жидкость считается вязкой и несжимаемой.

2. Двумерное движение вязкой несжимаемой жидкости описывается функцией тока, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)+\frac{\partial(\Delta\psi,\psi)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{R}\Delta\Delta\psi,\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.1}$$

Здесь t — время, R — число Рейнольдса. Для изучения малых возмущений основного установившегося течения функция тока $\psi(x, y, t)$ обычно представляется в виде

$$\psi(x, y, t)=\psi^\circ(x, y)+\psi'(x, y, t)$$

и в уравнении (2.1) оставляют только члены, линейные относительно малого возмущения $\psi'(x, y, t)$ (см., например, [2])

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi')+\frac{\partial(\Delta\psi^\circ,\psi')}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(\Delta\psi',\psi^\circ)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{R}\Delta\Delta\psi'. \tag{2.2}$$

Коэффициенты этого уравнения не зависят от t, и, следовательно, можно принять [2], что $\psi'(x, y, t)$ имеет вид

$$\psi'(x, y, t)=e^{\sigma t}\Psi(x, y) \tag{2.3}$$

где σ комплексно. Подстановка (2.3) в (2.2) дает

$$\sigma\Delta\Psi+\frac{\partial(\Delta\psi^\circ,\Psi)}{\partial(x,y)}+\frac{\partial(\Delta\Psi,\psi^\circ)}{\partial(x,y)}=\frac{1}{R}\Delta\Delta\Psi \tag{2.4}$$

Течение считается устойчивым, если $\operatorname{Re}\sigma<0$ и неустойчивым, если $\operatorname{Re}\sigma>0$.

Пусть основное течение $\psi^\circ(x, y)$ периодично по координате x с периодом $2\pi/\beta$. По аналогии с методом Флоке для обыкновенных дифференциальных уравнений будем искать решение уравнения (2.4) в виде

$$\Psi(x,y)=e^{i\alpha x}\Phi(x,y) \tag{2.5}$$

Здесь α действительно, а $\Phi(x, y)$ — периодическая функция x с периодом $2\pi/\beta$. Так как функция Φ периодична по x, то, если $\psi^\circ(x, y)$ имеет вид

$$\psi^\circ(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(y)e^{ik\beta x}+\sum_{k=0}^{\infty}h_k{}^*(y)e^{-ik\beta x} \tag{2.6}$$

можно представить $\Phi(x, y)$ в виде следующего ряда Фурье:

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n(y)e^{in\beta x} \tag{2.7}$$

Тогда из (2.4) для функций φ_n получаем бесконечную связанную систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(U\alpha_n-\alpha c)A_n-U''\alpha_n\varphi_n-\frac{1}{iR}(\varphi_n{}^{\mathrm{IV}}-2\alpha_n{}^2\varphi_n{}''+\alpha_n{}^4\varphi_n)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k{}'\alpha_{n-k}\varphi_{n-k}+a_k{}^{*\prime}\alpha_{n+k}\varphi_{n+k}-h_k{}'\alpha_{n-k}A_{n-k}-h^{*\prime}\alpha_{n+k}A_{n+k}+$$

$$+k\beta[h_kA_{n-k}'-h_k{}^*A_{n+k}'-a_k\varphi_{n-k}'+a_k{}^*\varphi_{n+k}]\} \tag{2.8}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha_n=\alpha+n\beta,\qquad U=2\operatorname{Re}h_0{}',\qquad \sigma=-i\alpha c,\qquad c=c_r+ic_i$$

$$A_n=\varphi_n{}''-\alpha_n{}^2\varphi_n,\qquad a_n=h_n{}''-(n\beta)^2h_n$$

Звездочка сверху обозначает комплексно-сопряженную величину, штрих — производную по y.

Если граничные условия однородны, то при заданных α, β и R имеем задачу на собственные значения, причем течение устойчиво или неустойчиво в зависимости от того, c_i отрицательно или положительно. Основная трудность при решении системы (2.8) заключается в том, что бесконечная система (2.8) связана. Однако поскольку основное течение известно до решения задачи, то ряд (2.6) можно оборвать, взяв в нем с нужной точностью лишь конечное число членов. Тогда в суммах по k в выражениях (2.6) и (2.8) верхним пределом будет некоторое число p. Предположим, что если ряд (2.7) также оборвать, т. е. принять

$$\Phi(x,y)=\sum_{n=-s}^{n=s}\varphi_n(y)e^{in\beta x} \tag{2.9}$$

где s — положительное число, а в системе (2.8) пренебречь членами, содержащими $\varphi_{s+1}, \varphi_{-s-1}, \varphi_{s+2}, \varphi_{-s-2}, \ldots$, то при этом найденные собственные значения c, начиная с некоторого большого s, практически с нужной точностью не будут зависеть от s. Значение s выбирается в процессе решения конкретной задачи и зависит от вида функции $\psi^\circ(x, y)$.

3. Как показал Гертлер [1], при определенных ограничениях пограничный слой, образующийся на слабо волнистой поверхности, можно характеризовать функцией тока вида

$$\psi^\circ(x, y) = \psi_0(\beta x, y) + \varepsilon\{h(y)e^{i\beta x} + h^*(y)e^{-i\beta x}\} \tag{3.1}$$

Здесь x, y — обычные координаты пограничных слоев, ψ_0 — функция тока пограничного слоя на гладкой поверхности, ε — малая величина, связанная с характеристиками волнистости поверхности, а функция h имеет вид: $h = {}^1/_2(f_1 - ig_1)$. Функции f_1 и g_1 рассчитывались в [1] и более точно в этой работе с применением метода ортогонализации [3]. Соотношение (3.1) совпадает с (2.6), если положить $p = 1$ и $h_1 = \varepsilon h$. Учитывая, что $\varphi^\circ(x, y)$ — решение уравнений пограничного слоя, т. е. производные $\psi^\circ(x, y)$ по x имеют более высокий порядок малости, чем производные по y, в системе (2.8) можно пренебречь членами в квадратных скобках и взять $a_1 = h_1''$. Тогда (2.8) будет иметь вид

$$(U\alpha_n - \alpha c)A_n - U''\alpha_n\varphi_n - \frac{1}{iR}(\varphi_n^{\mathrm{IV}} - 2\alpha_n^2\varphi_n'' + \alpha_n^4\varphi_n) =$$
$$=\varepsilon\{h'''\alpha_{n-1}\varphi_{n-1} + h^{*'''}\alpha_{n+1}\varphi_{n+1} - h'\alpha_{n-1}A_{n-1} - h^{*'}\alpha_{n+1}A_{n+1}\} \quad (n=-s,\ldots,s) \tag{3.2}$$

где U — профиль скорости на гладкой поверхности, т. е. при $\varepsilon = 0$. Граничные условия для системы (3.2) имеют вид

$$\varphi_n = 0, \quad \varphi_n' = 0 \quad (y = 0), \qquad \varphi_n, \varphi_n' \to 0 \quad (y \to \infty) \tag{3.3}$$

и выражают требование обращения в нуль составляющих скорости возмущения на поверхности и на достаточно большом расстоянии от стенки.

Пренебрегая в (3.2) членами, содержащими функции φ_{s+1} и φ_{-s-1}, получающуюся систему уравнений удобно записать в векторной форме

$$Z' = CZ \tag{3.4}$$

где Z — вектор-столбец с компонентами

$$Z(\varphi_{-s}, \varphi_{-s}', \varphi_{-s}'', \varphi_{-s}''', \ldots, \varphi_0, \varphi_0', \varphi_0'', \varphi_0''', \ldots, \varphi_s, \varphi_s', \varphi_s'', \varphi_s''')$$

а C — квадратная размером $4(2s + 1) \times 4(2s + 1)$ соответствующая (3.2) матрица коэффициентов. При $y \to \infty$ (вне пограничного слоя) система (3.4) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, так как U, $f_1 \to 1$ и U'', $g_1 \to 0$. При этом решение системы (3.4), удовлетворяющее второму из граничных условий (3.3), имеет вид

$$Z = \sum_{i=1}^{2(2s+1)} B_i Z^{(i)} e^{\pm\varkappa_i y} \tag{3.5}$$

где $\varkappa_i$ — собственные числа матрицы C, причем знак должен выбираться с учетом того, что Z затухает при $y \to \infty$, B_i — произвольные скалярные постоянные, $Z^{(i)}$ — собственные векторы, соответствующие $\varkappa_i$. $2s + 1$ собственных чисел $\varkappa$ легко находятся и не зависят от чисел R и ε

$$\varkappa_n = \alpha_n, \qquad n = -s, \ldots, s \tag{3.6}$$

Еще $2s+1$ собственных чисел $\varkappa$ зависят от R и ε и при $\varepsilon = 0$ имеют вид

$$\varkappa_n = [iR(\alpha_n - \alpha c) + \alpha_n^2]^{1/2}, \qquad n = -s, \ldots, s \tag{3.7}$$

Легко видеть, что при малых $\varepsilon \neq 0$ собственные числа $\varkappa$, зависящие от R, очень близки к значениям $\varkappa$, найденным при $\varepsilon = 0$.

Рассмотрим для простоты случай $s = 1$. Тогда C — матрица 12-го порядка, и для определения $\varkappa$ получается следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{gathered}[\varkappa^2 - \alpha_{-1}^2 - iR(\alpha_{-1} - \alpha c)][\varkappa^2 - \alpha^2 - i\alpha R(1-c)][\varkappa^2 - \alpha_1^2 - iR(\alpha_1 - \alpha c)] = \\ = -{}^1/_4 \alpha R^2 \varepsilon^2 \{\alpha_{-1}[\varkappa^2 - \alpha_1^2 - iR(\alpha_1 - \alpha c)] + \alpha_1[\varkappa^2 - \alpha_{-1}^2 - iR(\alpha_{-1} - \alpha c)]\}\end{gathered} \tag{3.8}$$

Из уравнения (3.8) сразу видно, что, когда какой-нибудь из сомножителей в левой части близок к нулю ($\varkappa$ — корень), два оставшихся сомножителя имеют порядок R^2 и корни будут иметь вид

$$\varkappa_n = [iR(\alpha_n - \alpha c) + \alpha_n^2 + \varepsilon^2 d(iRa + b)]^{1/2} \tag{3.9}$$

где a, b и d действительны, зависят от α, β и n и имеют порядок единицы. Таким образом, если ε — достаточно малая величина, можно с хорошей точностью использовать выражение (3.7) вместо того, чтобы искать корни из уравнения (3.8). Исключение составляют точки, где $\alpha_n - \alpha c$ либо α_n обращаются в нуль. Аналогичные рассуждения можно провести и для других значений s.

Компоненты собственных векторов $Z^{(i)}$ находятся подстановкой выражения $Z^{(i)}e^{\varkappa_i y}$ в систему уравнений (3.4). Каждый из найденных собственных векторов используется в качестве начальных данных для численного интегрирования системы (3.4) от внешней границы пограничного слоя к стенке. Параметры α, R и c должны быть подобраны таким образом, чтобы удовлетворить на стенке первому из граничных условий (3.3). При интегрировании системы (3.4) возникают трудности, связанные с наличием малого параметра $(\alpha R)^{-1}$ при старшей производной. Эти трудности, как и в работе [4], успешно преодолеваются применением метода ортогонализации.

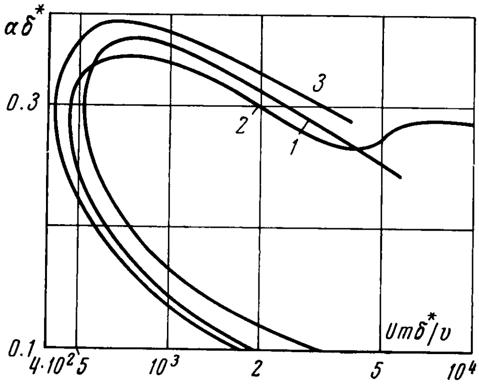
4. Результаты расчетов устойчивости пограничного слоя на волнистой поверхности представлены на фиг. 1—4. Здесь δ^* — толщина вытеснения невозмущенного пограничного слоя, т. е. при $\varepsilon = 0$, ν — вязкость, U_m — характерная скорость вне пограничного слоя. При проведении расчетов оказалось, что практически необходимая точность определения собственных значений достигается уже при $s = 1$ в формуле (2.9). Величины параметров $\beta\delta^*$ и $\sigma_0^{-1} = (2-B)\beta L$, где L — характерная длина от начала поверхности до середины рассматриваемого x-интервала, а B — параметр Фокнера — Скэн, выбраны в соответствии с ограничениями на длину волны волнистости, введенными в [1]. Когда профиль скорости невозмущенного пограничного слоя принадлежит семейству Фокнера — Скэн, как это имеет место в данной работе, эти ограничения гласят (физический смысл ограничений см. в [1])

$$\beta\delta^* \ll 1, \qquad 2\pi(2-B)\sigma_0 \ll 1$$

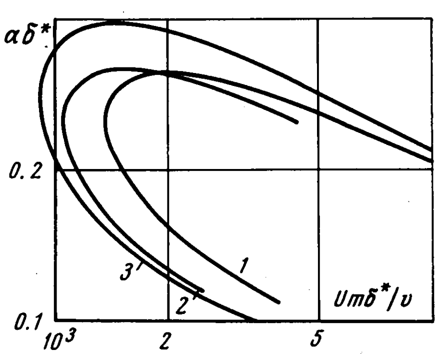
Во всех расчетах значение σ_0 фиксировано и $\sigma_0 = 0.004$.

На фиг. 1 ($B = 0$) приведены нейтральные кривые при $\varepsilon = 0$ (кривая *1*) и $\varepsilon = 0.01$, причем в последнем случае $\beta\delta^*$ принимает значения

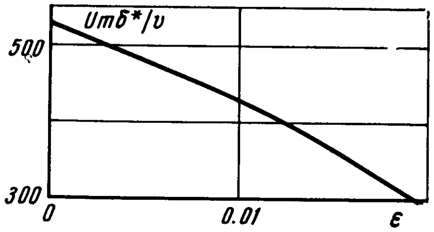
0.108 и 0.292 (кривые *2* и *3* соответственно). Видно, что в присутствии волнистости критическое число Рейнольдса понижается. При $B = 0.1$ (фиг. 2) влияние параметров волнистости на критическое число Рейнольдса сильнее (значения ε и $\beta\delta^*$ на фиг. 2 те же, что и на фиг. 1). Из фиг. 1, кроме того, видно, что при $\varepsilon \neq 0$ $(\beta\delta^* = 0.108)$ поведение нейтральной кривой заметно отличается от поведения нейтральной кривой при $\varepsilon = 0$. В частности, при увеличении числа Рейнольдса, начиная с некоторых значений, величина $\alpha\delta^*$ больше не убывает, что связано, по-видимому, с невязкой неустойчивостью. Фиг. 3 показывает влияние параметра ε $(\beta\delta^* = 0.292)$ на критическое число Рейнольдса.



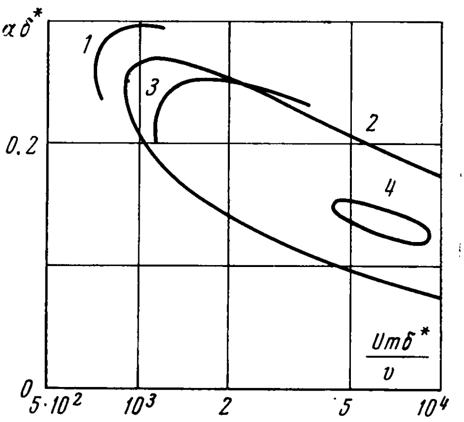
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 4 цифрами *1* и *3* обозначены кривые, построенные для значений $c_i = 0.01$ и 0.0193. В обоих случаях $B = 0$, $\varepsilon = 0.01$ и $\beta\delta^* = 0.108$. Для тех же значений c_i приведены кривые, взятые из работы [5] (они обозначены через *2* и *4*), соответствующие случаю гладкой поверхности. Сравнение показывает, что над волнистой поверхностью коэффициенты роста возмущений значительно превышают значения c_i над гладкой поверхностью при одинаковых значениях R и α. Учитывая, что зона неустойчивости для пограничного слоя над волнистой поверхностью шире, чем для случая гладкой поверхности, можно предположить в соответствии с [6] значительное влияние волнистости на число Рейнольдса перехода.

Поступило 18 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Gortler H. Einfluss einer schwachen Wandwelligkeit auf den Verlauf der laminaren Grenzschichten. Z. angew. Math. Mech., 1947, Bd 25/27, S. 233; 1948, Bd 28, Nr 1, S. 13.
2. Линь Цзя-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. н., 1961, т. 16, вып. 3 (9), стр. 171.
4. Гапонов С. А., Левченко В. Я., Соловьев А. С. Устойчивость пограничного слоя на плоской пластине с однородным отсасыванием. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1970, вып. 2, № 8, стр. 65.
5. Wazzan A. R., Okamura T. T., Smith A. M. O. Spatial stability study of some Falkner — Skan similarity profiles. U. S. Proc. 5. Nat. Congr. Appl. Mech., p. 836, New York, A.S.M.E., Univ. Minnesota, June 1966.
6. Jaffe N. A., Okamura T. T., Smith A. M. O. The determination of spatial amplification factors and their application to predicting transetion. AIAA paper, 1969, No. 10, p. 10.