

УДК 533.6.011.8

ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПЛАСТИНЫ РАЗРЕЖЕННЫМ ГАЗОМ

Е. М. ШАХОВ

(Москва)

Развит метод характеристик для численного решения кинетических уравнений в случае установившихся плоскопараллельных движений газа. Решена задача об обтекании пластины, расположенной нормально к набегающему сверхзвуковому потоку. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

1. Рассмотрим установившееся обтекание пластины бесконечного размаха и конечной ширины L однородным потоком разреженного газа. Скорость потока V направлена по нормали к пластине.

Введем систему координат: ось x направим вдоль пластины, ось y — по нормали к ней, в направлении скорости набегающего потока, ось z — по размаху. Начало координат поместим в середине пластины. Отражательную способность твердой поверхности предполагаем однородной. Тогда функцию распределения можно считать не зависящей от z .

Задачу будем решать для приближенного кинетического уравнения [1], аппроксимирующего уравнения Больцмана согласно методу, развитому автором [2-4]

$$\xi_x \frac{\partial f}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\tau} (f^+ - f) \quad (1.1)$$

$$f^+ = f^{(0)} [1 + {}^{4/5}(1 - \sigma) S_\alpha c_\alpha (c^2 - {}^{5/2})]$$

$$f^{(0)} = \frac{n}{(\pi T)^{3/2}} e^{-c^2}, \quad c_i = \frac{\xi_i - u_i}{\sqrt{T}}, \quad S_i = \frac{1}{n} \int c_i c^2 f d\xi$$

$$\frac{1}{\tau^*} = \frac{8}{5\sqrt{\pi}} \frac{1}{K} \frac{nT}{\mu}$$

Здесь и всюду ниже все величины безразмерные; плотность n , температура T и вязкость μ отнесены к соответствующим значениям n_∞ , T_∞ , μ_∞ в набегающем потоке, молекулярная и массовая скорость — к $\sqrt{2Rt_\infty}$, функция распределения — к $(2RT_\infty)^{3/2}/n_\infty$; в качестве масштаба длины выбрана длина пластины L . Число Кнудсена K определено по длине свободного пробега в невозмущенном потоке

$$K = \frac{\lambda_\infty}{L}, \quad \lambda_\infty = \frac{1}{\sqrt{2} n_\infty \pi d_\infty^2} = \frac{16}{5} \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty \sqrt{2\pi R T_\infty}}$$

σ — число Прандтля.

В набегающем потоке газ находится в статистическом равновесии

$$f \rightarrow f_\infty = \pi^{-3/2} \exp(-c_\infty^2), \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (c_\infty^2 = \xi_x^2 + (\xi_y - V)^2 + \xi_z^2) \quad (1.2)$$

При численном решении задачи условие (1.2) задается на контуре, составленном из отрезков прямых $x = x_-$, $y = y_+$, $x = x_+$, $y = y_-$ (значения x_- , y_- , x_+ , y_+ соответствуют $x = -\infty$, $y = -\infty$, $x = +\infty$, $y = +\infty$) для всех скоростей ξ , направленных внутрь области, к пластине.

Отражение молекул от нижней ($y = -0$) и верхней ($y = +0$) поверхностей пластины будем считать диффузным. Так, для нижней стороны пластины имеем

$$f = f_- = \frac{n_-}{(\pi T_-)^{3/2}} e^{-c_-^2}, \quad c_-^2 = \frac{\xi^2}{T_-}$$

$$\xi_y < 0, \quad y = -0, \quad -1/2 \leq x \leq 1/2 \quad (1.3)$$

Если температура T_- задана, то плотность отраженных молекул n_- определяется условием непротекания

$$\int_{\xi_y > 0} \xi_y f d\xi + \int_{\xi_y < 0} \xi_y f_- d\xi = 0 \quad (1.4)$$

Для теплоизолированной поверхности поток энергии в каждой граничной точке равен нулю

$$\int_{\xi_y > 0} \xi_y \xi^2 f d\xi + \int_{\xi_y < 0} \xi_y \xi^2 f_- d\xi = 0 \quad (1.5)$$

В этом случае температура поверхности тела становится равновесной, T_- определяется вместе с n_- в процессе решения задачи из уравнений (1.4), (1.5).

Аналогично условиям (1.3) — (1.5) записываются граничные условия на верхней стороне пластины $y = +0$.

Основные макроскопические характеристики, которые только и будут использованы в дальнейшем, выражаются в виде интегралов от функции распределения

$$n = \int f d\xi, \quad nu_i = \int \xi_i f d\xi \quad (i = 1, 2)$$

$$M_{ij} = \int \xi_i \xi_j f d\xi, \quad P_{ij} = \int v_i v_j f d\xi \quad (1.6)$$

$$E_i = \int \xi_i \xi^2 f d\xi, \quad nS_i = \int c_i c^2 f d\xi$$

$$v_i = \xi_i - u_i, \quad c_i = v_i T^{-1/2}$$

2. Вместо функции распределения f можно ограничиться двумя интегралами от нее

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} f d\xi_z, \quad \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_z^2 f d\xi_z$$

Уравнения для φ , ψ получаются интегрированием (1.1) по ξ_x и интегрированием по ξ_z уравнения (1.1), умноженного на ξ_z^2

$$\xi_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\tau} (\varphi^+ - \varphi)$$

$$\xi_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi_y \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{\tau} (\psi^+ - \psi) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \varphi^+ &= \varphi^{(0)} [1 + {}^4/5(1 - \sigma) S_\alpha c_\alpha (c_\beta c_\beta - 2)] \\ \psi^+ &= {}^{1/2} T' \varphi^{(0)} [1 + {}^4/5(1 - \sigma) S_\alpha c_\alpha (c_\beta c_\beta - 1)] \\ \varphi^{(0)} &= n (\pi T)^{-1} \exp(-c_\alpha c_\alpha) \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \end{aligned}$$

Предполагается суммирование по греческим индексам.

Функции φ, ψ подчиняются следующим граничным условиям:

1) на контуре $x = x_-, y = y_+, x = x_+, y = y_-$ для всех ξ , направленных внутрь области

$$\varphi = \varphi_\infty^{(0)} = \pi e^{-(\xi_x^2 + \xi_y^2)}, \quad \psi = {}^{1/2} \varphi_\infty^{(0)} \quad (2.2)$$

2) на верхней и нижней сторонах пластины $y = \pm 0, -1/2 \leq x \leq 1/2$

$$\varphi = \varphi_\pm = \frac{n_\pm}{\pi T_\pm} \exp - \frac{\xi_x^2 + \xi_y^2}{T_\pm} \quad (2.3)$$

Величины n_\pm, T_\pm определяются уравнениями, которые следуют из (1.4), (1.5). Запишем их в форме, удобной для применения итераций. Так, для n_-, T_- имеем

$$\begin{aligned} n_- &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{T_-}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_x \int_0^\infty \xi_y \varphi d\xi_y \\ T_- &= \frac{\sqrt{\pi}}{n_- \sqrt{T_-}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_x \int_0^\infty \xi_y [(\xi_x^2 + \xi_y^2) \varphi + \psi] d\xi_y \\ y &= -0, \quad -1/2 \leq x \leq 1/2 \end{aligned}$$

Аналогично записываются уравнения для n_+, T_+ .

3. Для решения задачи использовался метод итераций. Согласно этому методу все макроскопические величины, входящие в правые части уравнений (2.1), определяются по предшествующей итерации. Следовательно, $1/\tau, \varphi^+, \psi^+$ в каждом приближении известны. Известными считаются также величины n_\pm, T_\pm , входящие в граничные условия. Для расчета следующей итерации по известной предыдущей применялся метод численного решения без запоминания функции распределения. Идея численного метода состоит в следующем.

Пусть сетка узлов на плоскости xu образована пересечениями координатных прямых и пусть выбран метод вычисления интегралов по ξ_x, ξ_y . Зададим пару значений ξ_x, ξ_y . Для этой пары определим функции φ, ψ во всех узлах сетки, в соответствии с квадратурными формулами произведем вклады в интегральные суммы интегралов (2.1) и затем перейдем к следующему значению вектора ξ_x, ξ_y .

Обработка узлов производится послойно, от граничного слоя y_- к слою y_+ , если $\xi_y > 0$, и, наоборот, от y_+ к y_- , если $\xi_y < 0$. Вдоль каждого слоя переход от узла к узлу происходит слева направо, если $\xi_x > 0$, и справа налево, если $\xi_x < 0$. Значения φ_{ij}, ψ_{ij} в узле i, j определяются каждый раз интегрированием уравнений (2.1) вдоль отрезка характеристики, лежащего внутри элементарной ячейки. Численное интегрирование уравнений (2.1) вдоль отрезка характеристики выполняется с помощью формулы, использованной ранее в [4].

Начальные данные для интегрирования вычисляются линейным интерполированием между значениями функций в соседних узлах, между ко-

торыми лежит начальная точка отрезка характеристики. Очевидно, через некоторые ячейки проходят линии разрывов функции распределения. Используемый в работе метод предусматривал слежение за разрывами и вычисление φ , ψ по обе стороны от характеристики, несущей разрыв, в точках пересечения этой характеристики с координатными линиями.

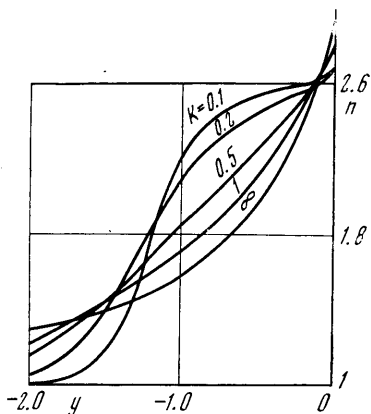
При этом интерполирование выполняется с учетом разрыва функции распределения.

Квадратуры по ξ_x , ξ_y выполнялись методом Симпсона.

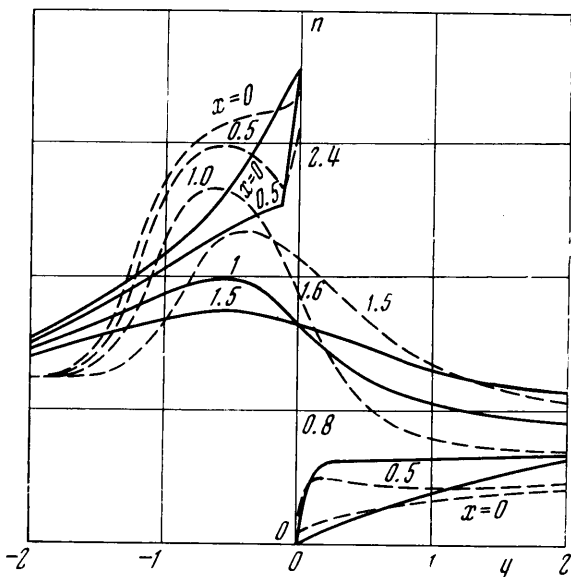
Изложенный метод является общим, универсальным методом численного решения плоских задач для приближенных кинетических уравнений. Заметим, что в [5, 6] был приведен существенно приближенный метод, специально приспособленный для задачи о продольном обтекании пластины потоком газа с большой скоростью.

Экспериментальными расчетами было установлено, что при размере сетки $\Delta x = \Delta y = 0.125$ и при $x_+ = -x_- = 1.625$, $y_+ = -y_- = 2.125$, $\Delta \xi_x = \Delta \xi_y = 0.125$ получаются удовлетворительные (с точностью 1—2%) результаты. Число итераций зависит от числа Кнудсена и равно 10, 20, 45, 75 соответственно при $K = 1, 0.5, 0.2, 0.1$, если $\mu = T$; начальное приближение — свободномолекулярное.

4. Приводимые ниже результаты численных расчетов относятся к двум числам Маха: $M = 2.31$ и 10.09 , для которых в работах [7, 8] сообщаются результаты экспериментов; соответствующие числа V для двухатомного



Фиг. 1



Фиг. 2

газа равны 1.93 и 8.45. Пластина предполагается теплоизолированной. Фиг. 1—6 относятся к решению задачи при $V = 1.93$, $\mu = T$. Число Прандтля σ всюду, за исключением фиг. 3, равно $2/3$.

На фиг. 1 представлена зависимость профилей плотности на линии торможения перед пластиной при числах Кнудсена $K = \infty, 1, 0.5, 0.2, 0.1$. С уменьшением K происходит переход от режима свободно-молекулярного течения к режиму обтекания с ударной волной. Профили плотности для двух чисел Кнудсена $K = 1$ и $K = 0.1$ (пунктир) в сечениях $x = 0, 0.5, 1.0, 1.5$ даны на фиг. 2.

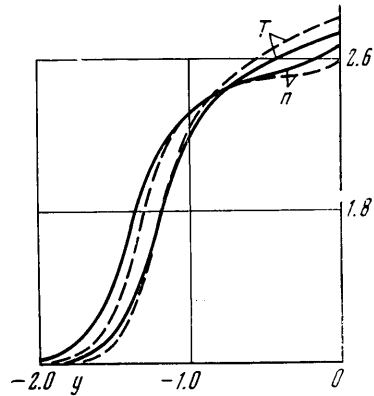
Зависимость плотности и температуры на линии торможения перед пластиной при $K = 0.1$ иллюстрирует фиг. 3. Сплошные линии относятся к $\sigma = 2/3$, пунктиром нанесены кривые для $\sigma = 1$. Влияние числа Прандтля, как видно из фиг. 3, качественно такое же, как в задаче о структуре ударной волны [9].

На фиг. 4 изображено поле скоростей для $K = 0.1$, на фиг. 5 — профили компонентов скорости u_x, u_y по сечениям.

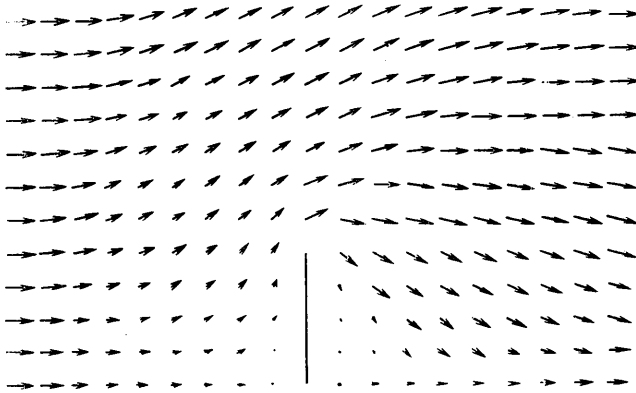
Коэффициент сопротивления

$$C_D = 2V^{-2} \int_{-1/2}^{1/2} P_{yy} dx$$

при поперечном обтекании пластины для $V = 1.93$ по числам Кнудсена представлен на фиг. 6. Треугольниками обозначены опытные данные [7], кривая 1 относится к расчетам по описанному выше методу для $\mu = T$, кривая 2 — для $\mu = \sqrt{T}$, влияние числа σ здесь несущественно. Согласование результатов расчетов для $\mu = T$ с экспериментальными данными в целом можно признать удовлетворительным. Однако заметно и отличие в ходе кривых $C_D(K)$. Так, по экспериментам [7] режим сплошной среды наступает уже при $K \approx 0.3$, в то время как согласно расчетам зависимость $C_D(K)$ стабилизируется для $K < 0.1$. При этом экспериментальные точки для малых K лежат заметно выше расчетных кривых.



Фиг. 3



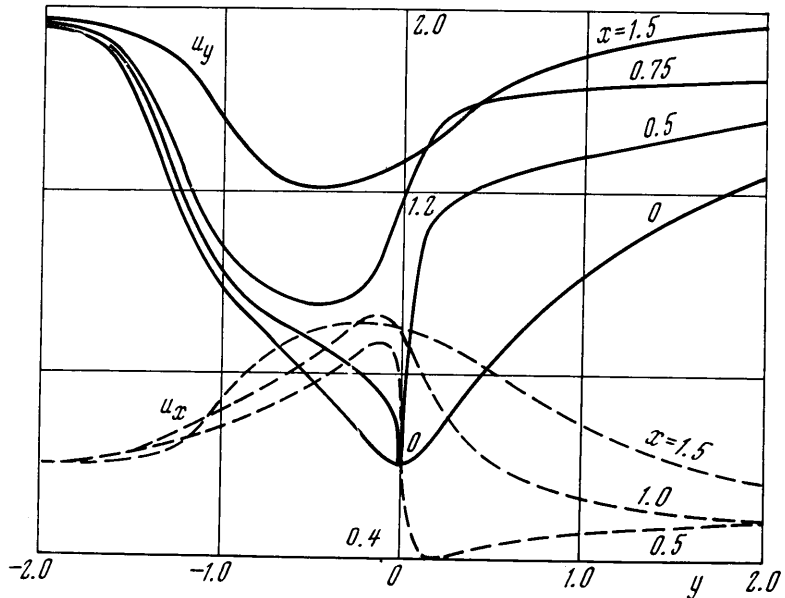
Фиг. 4

Теоретическое значение C_D при $K \rightarrow 0$ легко оценивается

$$C_D(0) \leq C_D^0 = 2p_0 V^{-2}$$

где p_0 — давление торможения. Используя соотношения на прямом скачке уплотнения и уравнения адиабатического сжатия за скачком вплоть до

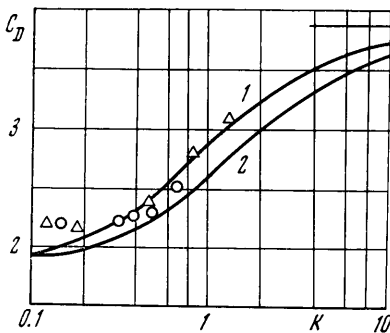
точки торможения [10], можно получить значение C_D^0 . Для $M = 2.31$ и $\gamma = 1.4$ это значение равно 1.97, т. е. заметно ниже полученного в работе [7]. Отличие результатов опытов от расчетных данных объясняется, возможно, некоторым несоответствием условий экспериментов тем параметрам, при которых производился расчет.



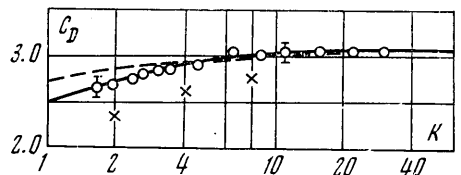
Фиг. 5

Расчетные зависимости в широком диапазоне чисел K изменяются линейно относительно $\ln K$. Так, кривая 1 практически совпадает с прямой на интервале $0.3 < K < 3$. Замена закона вязкости (например, $\mu = T$ на

$\mu = \sqrt{T}$), как и следовало ожидать, по существу может быть компенсирована подходящим выбором числа Кнудсена.



Фиг. 6



Фиг. 7

Весьма интересным оказывается сравнение с экспериментальными результатами [8] при $M = 10.09$. В результате расчетов выяснилось, что для закона вязкости $\mu = T^{0.816}$ расчетная кривая для закона сопротивления практически совпадает с кривой работы [8] (см. также [11]). На фиг. 7 кружочками обозначены результаты опытов, а сплошной линией нанесена расчетная кривая. Результаты расчетов для $\mu = T$ практически ложатся на пунктирную кривую, соответствующую модифицированному модель-

ному уравнению работы [8]. Для сравнения там же крестиками отмечены значения C_D при $\mu = \sqrt{T}$. Влияние числа Прандтля на сопротивление слабое (замена $\sigma = 2/3$ на $\sigma = 1$ при $K \approx 1$ уменьшает C_D на 1–2%).

Поступило 12 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Шахов Е. М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5, стр. 142–145.
2. Шахов Е. М. О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1, стр. 156–161.
3. Шахов Е. М. Метод аппроксимации кинетического уравнения Больцмана. В сб. «Численные методы в теории разреженных газов», М., ВЦ АН СССР, 1969, стр. 84–118.
4. Шахов Е. М. Установившееся течение разреженного газа от сферического источника или стока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2, стр. 58–66.
5. Huang A. B., Hartley D. L. Kinetic theory of the sharp leading edge problem in supersonic flow. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 1, pp. 96–108.
6. Huang A. B., Hwang P. F. Supersonic leading edge problem according to the ellipsoidal model. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 3, pp. 309–317.
7. Coudeville H., Trepaud P., Brun E. A. Drag measurements in slip and transition flow. In: Rarefied gas dynamics, vol. 1, N. Y., Acad. Press., 1965, pp. 444–466.
8. Maslach G. Y., Willis D. R., Tang S., Ko D. Recent experimental and theoretical extensions of hearly free molecular flow. In: Rarefied gas dynamics, vol. 1, N. Y., Acad. Press., 1965, pp. 433–443.
9. Шахов Е. М. Структура скачка уплотнения в одноатомном газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2, стр. 69–75.
10. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1956.
11. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.