

ВЕРОЯТНОСТЬ КОНЦЕНТРАЦИИ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ С ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГОМ

В. Р. КУЗНЕЦОВ

(Москва)

Получено уравнение для плотности вероятности концентрации пассивной примеси в турбулентном потоке с поперечным сдвигом. В той области потока, где отсутствует перемежаемость, решения этого уравнения близки к нормальному закону. В области, где течение носит перемежающийся характер, уравнение имеет нетривиальное решение лишь при определенных значениях входящих в него параметров. Вычислена интенсивность пульсаций концентрации во вполне турбулентной жидкости.

В теории турбулентной диффузии в ряде случаев важно знать не только среднюю концентрацию примеси, но и степень однородности смешения вещества, диффундирующего в турбулентном потоке. Последнюю можно охарактеризовать при помощи распределения вероятностей концентрации. В данной работе сделана попытка получить уравнение для этого распределения.

1. Рассмотрим медленно расширяющийся турбулентный поток. Таким потоком может быть струя, след за телом, течение в трубе или пограничном слое. Одна из характерных черт почти всех течений рассматриваемого типа состоит в перемежаемости турбулентности, т. е. нерегулярном чередовании областей потенциального и завихренного (вполне турбулентного) течений. Заметим, что вещество, находящееся во вполне турбулентной жидкости, не может проникнуть за ее границы.

Поскольку уравнение диффузии линейно, без ограничения общности можно считать, что концентрация пассивной примеси вне вполне турбулентной жидкости равна нулю. В дальнейшем будем также предполагать, что числа Рейнольдса и Пекле, характеризующие рассматриваемое течение, достаточно велики.

Введем величины $\varphi = \exp(i\lambda c)$ и $N = D(\partial c / \partial x_l)^2$, где λ — произвольное действительное число, c — концентрация, D — коэффициент молекулярной диффузии, x_l — координата ($l = 1, 2, 3$). Величина $\langle \varphi \rangle$ — характеристическая функция искомого распределения вероятностей. Параметр $\langle N \rangle$ обычно называют скалярной диссипацией; его можно также интерпретировать как скорость смешения вещества до молекулярных масштабов.

Из уравнения диффузии пассивной примеси

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_l \frac{\partial c}{\partial x_l} = D \Delta c \quad (1.1)$$

получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u_l \varphi}{\partial x_l} = D \Delta \varphi + N \lambda^2 \varphi \quad (1.2)$$

Здесь t — время, u_l — скорость. Осредняя уравнение (1.2), получаем

$$\frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle u_l \varphi \rangle}{\partial x_l} = D \Delta \langle \varphi \rangle + \lambda^2 \langle N \varphi \rangle \quad (1.3)$$

Согласно [1] при больших числах Рейнольдса и Пекле статистические характеристики скалярной диссипации N в основном определяются мелко-масштабной структурой потока. В то же время величина Φ зависит лишь от крупномасштабных возмущений. При этом естественно воспользоваться гипотезой Бэтчелора [2] о статистической независимости вихрей больших и малых масштабов и предположить, что внутри вполне турбулентной жидкости величины Φ и N также статистически независимы. Предположения, из которых следует статистическая независимость величин Φ и N , были высказаны в работах [3, 4].

Поскольку вне вполне турбулентной жидкости примесь отсутствует, то из сказанного выше следует:

$$\langle N\Phi \rangle = \gamma \langle N\Phi \rangle' = \gamma \langle N \rangle' \langle \Phi \rangle' = \langle N \rangle \langle \Phi \rangle' \quad (1.4)$$

Здесь γ — коэффициент перемежаемости, т. е. вероятность наблюдения вполне турбулентной жидкости. Символом $\langle \rangle'$ обозначено осреднение по вполне турбулентной жидкости.

Рассмотрим теперь член $\langle u_i \Phi \rangle$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle u_i \Phi \rangle &= \int \Phi u_i p(u, c) d^3 u = \int \Phi v_i(c) p(c) dc, \\ v_i(c) &= \int u_i p_i(u|c) d^3 u \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $p(u, c)$ — плотность совместного распределения вероятностей скорости и концентрации, $p(c)$ — плотность распределения вероятностей концентрации, $p_i(u|c)$ — плотность распределения вероятностей скорости при условии, что концентрация равна c . Очевидно, что величина $v_i(c)$ есть средняя скорость, с которой в данной точке движется малый объем жидкости, имеющий концентрацию, равную c .

Предположим, что величина $v_i(c)$ — линейная функция концентрации, т. е.

$$v_i(c) = A_i + B_i(c - \langle c \rangle) \quad (1.6)$$

Это предположение будет, в частности, справедливо, если совместное распределение скоростей и концентраций нормальное или если рассматриваются флуктуации концентрации с достаточно малой амплитудой. Умножая левую и правую части (1.6) на $(c - \langle c \rangle)^k p(c)$ ($k = 0, 1$) и интегрируя по c , получаем

$$\begin{aligned} A_i &= \langle u_i \rangle \quad (k = 0), \quad B_i = q_i \sigma^{-2} \quad (k = 1) \\ \sigma^2 &= \langle (c - \langle c \rangle)^2 \rangle, \quad q_i = \langle (u_i - \langle u_i \rangle)(c - \langle c \rangle) \rangle \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь σ — среднеквадратичное отклонение концентрации примеси от среднего значения, q_i — поток вещества.

Из формул (1.5) — (1.7) получаем

$$\langle u_i \Phi \rangle = \langle u_i \rangle \langle \Phi \rangle - i q_i \sigma^{-2} e^{ik\langle c \rangle} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\langle \Phi \rangle e^{-ik\langle c \rangle}) \quad (1.8)$$

Таким образом, из формул (1.3), (1.4) и (1.8) находим

$$\frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle \Phi \rangle}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[q_i \sigma^{-2} e^{ik\langle c \rangle} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\langle \Phi \rangle e^{-ik\langle c \rangle}) \right] = \langle N \rangle \lambda^2 \langle \Phi \rangle' + D \Delta \langle \Phi \rangle \quad (1.9)$$

Наконец из (1.9) при помощи обратного преобразования Фурье имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} (c - \langle c \rangle) p] = - \langle N \rangle \frac{\partial^2 p_i}{\partial c^2} + D \Delta p \quad (1.10)$$

Здесь p_i — плотность вероятности концентрации во вполне турбулентной жидкости.

С точностью до несущественного в большинстве случаев члена Δp соотношение (1.10) представляет собой обратно параболическое уравнение. Как известно, уравнение такого вида имеет решение не со всякими начальными условиями. Например, в нестационарном случае нельзя произвольно задать величину p в начальный момент времени, а если течение стационарно, то нельзя задать произвольно распределение вероятностей в начальном сечении потока. Это — следствие того, что предположения, при которых выведено уравнение (1.10), и в частности гипотеза о статистической независимости величин ϕ и N , не справедливы для турбулентности, находящейся в произвольном начальном состоянии.

Проанализируем теперь ряд частных решений уравнения (1.10).

2. Рассмотрим турбулентный поток, у которого есть ось или плоскость симметрии (струя, след). Вблизи оси или плоскости симметрии перемежаемость отсутствует, т. е. $\gamma = 1$ и, следовательно, $p = p_i$. Кроме того, в рассматриваемой области можно пренебречь молекулярной диффузией и переносом вещества вдоль потока, т. е. можно считать, что $D = 0$ и $q_i = 0$.

Здесь индекс 1 относится к направлению потока. Очевидно, что на оси или плоскости симметрии $q_\alpha = 0$ ($\alpha = 2, 3$). Тогда из (1.10) для стационарного случая получаем

$$\langle u_i \rangle \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{c - \langle c \rangle}{\sigma^2} \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} p = - \langle N \rangle \frac{\partial^2 p}{\partial c^2} \quad (2.1)$$

При выводе уравнения (2.1) было использовано осредненное уравнение (1.1) и очевидная формула $\langle u_\alpha \rangle = 0$ при $x_\alpha = 0$.

Будем искать автомодельное решение уравнения (2.1) в виде $p = f[(c - \langle c \rangle) / \sigma] / \sigma$. Если оно существует, то должны выполняться соотношения

$$m = - \frac{1}{\sigma} \frac{\langle N \rangle}{\langle u_i \rangle} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right)^{-1} = \text{const}, \quad n = \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right)^{-1} = \text{const}$$

$$m f'' + f'(s + n) + f(ns + 1) = 0, \quad s = (c - \langle c \rangle) / \sigma \quad (2.2)$$

Сделаем замену переменных

$$\Pi = f \exp(s + n)^2 / 4m, \quad S = (s + n - 2mn) / \sqrt{m}$$

Тогда уравнение для плотности вероятности приобретет вид

$$\Pi'' + \Pi(-1/4 S^2 + n^2(m - 1) + 1/2) = 0 \quad (2.3)$$

Решения этого уравнения — функции параболического цилиндра. Известно, что при $m > 1$ любое решение уравнения (2.3) имеет по крайней мере один корень и, следовательно, лишено физического смысла. При $m \leq 1$ существуют решения, не меняющие знака и достаточно быстро стремящиеся к нулю при $|s| \rightarrow \infty$. Таким образом, получаем $m \leq 1$.

Заметим далее, что параметр n обычно велик. Действительно в течениях струйного типа величины σ и $\langle c \rangle$ изменяются в зависимости от расстояния x_i по степенным законам и, следовательно, параметр n обратно пропорционален малой величине — интенсивности пульсаций концентрации. Отмеченное обстоятельство позволяет построить сравнительно простое приближенное решение уравнения (2.2). Рассмотрим уравнение для ха-

рактеристической функции. Из (2.2) имеем

$$(\lambda + in)F' = -\lambda(m\lambda + in)F, \quad F = \int f(s)e^{is}ds$$

При очевидном условии $F(0) = 1$ получаем

$$F = \exp\left\{-\frac{1}{2}m\lambda^2 - \frac{1}{2}n^2(1-m) \ln(1 + \lambda^2/n^2) - in^2(1-m)[\lambda/n - \arctg(\lambda/n)]\right\}$$

Отсюда при $n \rightarrow \infty$ с точностью до членов порядка $o(n^{-2})$ имеем

$$F = e^{-\frac{1}{2}\lambda^2} \left\{ 1 - \frac{i(1-m)\lambda^3}{3n} + \frac{1}{n^2} \left[\frac{(1-m)\lambda^4}{4} - \frac{(1-m)^2\lambda^6}{18} \right] \right\} \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что $A = 2(1-m)n^{-1}$, $E = 6(1-m)n^{-2}$ и поскольку $m \leq 1$, то $A \geq 0$ и $E \geq 0$. Здесь A и E — коэффициенты асимметрии и эксцесса соответственно.

Далее из (2.4) для плотности вероятности получаем

$$f = f_0 - \frac{1-m}{3n} \frac{d^3 f_0}{ds^3} + \frac{1}{n^2} \left[\frac{1-m}{4} \frac{d^4 f_0}{ds^4} + \frac{(1-m)^2}{18} \frac{d^6 f_0}{ds^6} \right], \quad f_0 = (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}s^2) \quad (2.5)$$

Поскольку $0 < m \leq 1$ и параметр n велик, то из (2.5) следует, что вероятность концентрации распределена по закону, близкому к нормальному.

Рассмотрим теперь, насколько согласуются сделанные выше выводы с экспериментальными данными. В работе [5] приведены результаты измерений поперечного микромасштаба пульсаций температуры на оси затопленной осесимметричной струи. По значению микромасштаба в предположении об изотропии мелкомасштабной структуры турбулентности можно оценить параметр m . С учетом разброса экспериментальных данных получается оценка $0.4 < m < 1$.

Заметим также, что экспериментальные данные, приведенные в [6], свидетельствуют о том, что распределение вероятностей концентрации на оси затопленной осесимметричной струи очень близко к нормальному, что также подтверждает сделанный ранее вывод.

3. Рассмотрим теперь ту область потока, где перенос вещества в поперечном направлении максимален, т. е. $\partial q_\alpha / \partial x_\alpha = 0$. В этой области потока изменяется лишь средняя концентрация, а среднеквадратичное отклонение концентрации от среднего значения почти постоянно. В силу сказанного можно ожидать, что величина $p(s, x) / \sigma$ ($s = \text{const}$) будет слабо зависеть от x . Тогда имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} \frac{1}{\sigma} \quad (3.1)$$

В рассматриваемой области по-прежнему перемежаемость несущественна, а молекулярная диффузия и продольный перенос вещества малы, т. е. $D\Delta p \approx 0$ и $q_i \ll q_\alpha$. Тогда из (1.10) и (3.1) получаем

$$\frac{1}{\sigma} \langle u_i \rangle \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{\sigma^2} q_i \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} p + \frac{1}{\sigma^2} q_i \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} s \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\langle N \rangle}{\sigma^2} \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \quad (3.2)$$

Используя осредненное уравнение (1.1), приводим это соотношение к виду

$$\frac{\partial \langle sp \rangle}{\partial s} = \left[\langle N \rangle / \left(q_i \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} \quad (3.3)$$

При решении этого уравнения необходимо учесть следующие условия, которые вытекают из определения величин p , s и σ

$$\int p \, ds = 1, \quad \int sp \, ds = 0, \quad \int s^2 p \, ds = \sigma^2 \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) получаем

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(c - \langle c \rangle)^2}{2\sigma^2} \right], \quad \langle N \rangle = -q_i \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x_i}$$

Таким образом, в рассматриваемой области вероятность концентрации распределена по нормальному закону. Этот результат подтверждается данными измерений [6].

4. Проанализируем, наконец, решения уравнения (1.10) в области, находящейся на краю турбулентного потока, т. е. там, где существенна перемежаемость и $\gamma \neq 1$. Покажем, что плотность вероятности концентрации во вполне турбулентной жидкости имеет разрывную производную при $c = 0$, а уравнение (1.10) имеет нетривиальное решение не при всяких значениях входящих в него параметров.

Прежде всего заметим, что $p_i(c) = 0$ при $c < 0$. В силу этого естественно искать решение уравнения (1.10) в виде

$$p_i(c) = f(c)\theta(c) \quad (4.1)$$

$$p(c) = (1 - \gamma)\delta(c) + \gamma f(c)\theta(c) \quad (4.2)$$

Здесь f — бесконечно дифференцируемая функция, $\theta = 1$ при $c > 0$ и $\theta = 0$ при $c < 0$, $\delta(c)$ — дельта-функция Дирака.

В формуле (4.2) член, пропорциональный $\delta(c)$, возникает в силу того, что на краю потоков рассматриваемого типа нулевые значения концентрации наблюдаются с ненулевой вероятностью. Будем по-прежнему рассматривать случай, когда числа Рейнольдса и Пекле велики, а течение стационарно. Тогда из (1.10), (4.1), (4.2) получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ -\langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} (c - \langle c \rangle) (1 - \gamma)] \right\} \delta(c) + \\ & + \left\{ \langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} (c - \langle c \rangle) \gamma f] \right\} \theta(c) = \\ & = -\langle N \rangle \left[\frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \theta(c) + 2 \frac{\partial f}{\partial c} \delta(c) + f \frac{d\delta(c)}{dc} \right] \end{aligned}$$

Умножая левую и правую части этого соотношения на произвольную бесконечно дифференцируемую функцию $\Phi(c)$ и интегрируя по c , получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\{ \langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} (c - \langle c \rangle) \gamma f] + \langle N \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \right\} \Phi \, dc = \\ & = -\langle N \rangle f(0) \Phi'(0) + \left\{ \langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} \langle c \rangle (1 - \gamma)] - \langle N \rangle \frac{\partial f(0)}{\partial c} \right\} \Phi(0) \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности функции Φ следует, что

$$\langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} \langle c \rangle (1 - \gamma)] = \langle N \rangle \frac{\partial f(0)}{\partial c} \quad (4.3)$$

$$f(0) = 0 \quad (4.4)$$

$$\langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} (c - \langle c \rangle) \gamma f] = -\langle N \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} \quad (4.5)$$

Из соотношений (4.1) и (4.4) видно, что функция f непрерывна при $c = 0$, а из формул (4.1) и (4.3) вытекает, что, вообще говоря, $\partial f / \partial c$ имеет разрыв при $c = 0$. Следует также отметить, что соотношение (4.3) есть следствие уравнения (4.5). Чтобы доказать это, достаточно (4.5) проинтегрировать по возможным значениям c .

Далее заметим, что величины, осредненные по вполне турбулентной жидкости, от точки к точке изменяются слабо (см. [7]). В силу этого в уравнении (4.5) можно приближенно положить $\partial f / \partial x_i = 0$. Тогда получаем

$$\langle N \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial c^2} + f \left\{ \langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} (c - \langle c \rangle) \gamma] \right\} = 0 \quad (4.6)$$

Это уравнение нужно решать совместно с граничными условиями $f = 0$ при $c = 0$ и $f \rightarrow 0$ при $c \rightarrow \infty$. Очевидно, что нетривиальное решение существует не при всяких значениях параметров. Фактически в рассматриваемое уравнение входят два параметра, имеющие размерность концентрации. Условие существования нетривиального решения даст одно соотношение, связывающее эти параметры. Таким образом, в решение войдет только один параметр, имеющий размерность концентрации. Следовательно, любые безразмерные комбинации из различных моментов будут некоторыми фиксированными числами. В частности, постоянным числом должна быть интенсивность пульсаций концентрации во вполне турбулентной жидкости. Заметим, что в рамках развиваемой теории для определения интенсивности пульсации концентрации не требуется никакой численной информации из экспериментов.

Из (4.6) имеем

$$d^2 f / dz^2 - z f = 0, \quad z = b^{1/3} (c - a / b) \quad (4.7)$$

$$b = - \frac{1}{\langle N \rangle} \frac{\partial}{\partial x_i} (q_i \sigma^{-2} \gamma), \quad a = \frac{1}{\langle N \rangle} \left[\langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (q_i \sigma^{-2} \langle c \rangle \gamma) \right]$$

Нетрудно видеть, что при $z > 0$ единственным ограниченным решением уравнения (4.7) является функция

$$f = G \sqrt{z} K_{1/3} (2/3 \sqrt{z^3}) \quad (4.8)$$

Здесь G — произвольная постоянная, $K_{1/3}$ — модифицированная функция Бесселя третьего рода порядка $1/3$.

При $z < 0$ решение выражается через функции Бесселя первого рода. Из условия непрерывности функции f и ее производной при $z = 0$ следует, что

$$f = \frac{\pi G}{\sqrt{3}} \sqrt{-z} [J_{1/3} (2/3 \sqrt{-z^3}) + J_{-1/3} (2/3 \sqrt{-z^3})] \quad (z < 0) \quad (4.9)$$

Здесь $J_{1/3}$ и $J_{-1/3}$ — функции Бесселя первого рода.

Из (4.8) и (4.9) видно, что решение уравнения (4.7) имеет бесконечное число корней при $z < 0$, а при $z > 0$ корней не имеет. Это обстоятельство накладывает ограничение на параметры a и b . Действительно, поскольку $f > 0$ при $c > 0$ и $f = 0$ при $c = 0$, то

$$ab^{-2/3} = (3\mu / 2)^{2/3} \quad (4.10)$$

Здесь μ — наименьший положительный корень уравнения

$$J_{1/3}(\mu) + J_{-1/3}(\mu) = 0 \quad (\mu = 2,384 \dots) \quad (4.11)$$

Теперь из условия нормировки $\int_0^\infty f dc = 1$ можно найти постоян-

ную G . Она приближенно равна

$$G = b^{1/2} \sqrt{3} / (3.822\pi)$$

Из соотношений (4.8), (4.9) и (4.11) следует, что интенсивность флуктуаций концентрации, коэффициенты асимметрии и эксцесса во вполне турбулентной жидкости постоянны. Их численные значения оказываются равными 0.555, 0.808, 0.697 соответственно.

Полученное значение интенсивности пульсаций концентрации во вполне турбулентной жидкости удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными работы [8]. В этой работе приведены результаты измерений концентрации дыма в затопленной осесимметричной струе и, в частности, установлено, что во вполне турбулентной жидкости интенсивность пульсаций концентрации составляет 0.5—0.74, что довольно близко к вычисленному выше значению (0.555). Таким образом, можно считать, что предположения, сделанные при анализе поставленной задачи, достаточно правдоподобны.

Автор благодарит В. А. Фроста за критические замечания и внимание к работе.

Поступило 24 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Обухов А. М. Структура температурного поля в турбулентном потоке. Изв. АН СССР, Сер. геогр. и геофиз., 1949, вып. 1, т. 13.
2. Бэтчелор Дж. К. Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
3. Кузнецов В. Р. О плотности вероятности разности скоростей в двух точках однородного изотропного турбулентного потока. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
4. Улинич Ф. Р., Любимов Б. Я. К статистической теории турбулентности в несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 3.
5. Corrsin S., Uberoi M. S. Spectra and diffusion in a round turbulent jet. NASA Rept No. 1040, 1951.
6. Кузнецов В. Р. Распределение вероятностей концентрации пассивной примеси в затопленной осесимметричной струе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, вып. 2.
7. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
8. Becker H. A., Hottel H. C., Williams G. C. The nozzle-fluid concentration field of the round, turbulent, free jet. J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, pt 2.