УДК 532.582.33

О СОПРОТИВЛЕНИИ ЖИДКОСТИ НЕСИММЕТРИЧНОМУ ДЕФОРМИРОВАНИЮ ЦИЛИНДРА И ШАРА

Н. А. СЛЕЗКИН

(Москва)

Показано, что при несимметричной деформации расширения тел простейших форм (цилиндр или шар) возникает сила сопротивления со стороны жидкости, окружающей тело. Под действием этой силы тело может совершать поступательное движение в направлении, обратном среднему направлению деформации расширения границы. В предположении, что передняя точка цилиндра или шара не смещается при изменении радиуса окружности или сферы со временем, сила сопротивления со стороны идеальной и несжимаемой жидкости перед началом движения составляется из двух слагаемых, одно из которых пропорционально ускорению изменения радиуса, а второе — квадрату скорости этого изменения. Во время движения в силу сопротивления включаются два дополнительных слагаемых, одно из которых содержит ускорение, а второе — произведение скоростей расширения и поступательного движения. При постоянной скорости расширения границ скорость поступательного движения тела пропорциональна конечному приращению присоединенных масс.

Предполагается, что расширение тела сменяется далее его сжатием, причем в процессе сжатия не смещается задняя точка тела. В этом случае в формулу для силы сопротивления слагаемые с квадратом скорости сжатия и ускорением изменения радиуса входят с отрицательными знаками. При постоянной скорости сжатия границы скорость поступательного движения убывает пропорционально убыванию присоединенных масс цилиндра или шара.

Если жидкость считать вязкой и несжимаемой и предполагать справедливыми приближенные уравнения Стокса, то стационарная сила сопротивления жидкости несимметричному деформированию шара с неподвижной передней точкой выражается формулой Стокса, в которой скорость поступательного движения заменена на разность скростей поступательного движения и изменения радиуса шара.

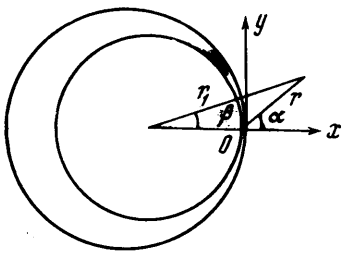
Полученные ниже результаты могут быть применены к объяснению одного из возможных механизмов движения микроорганизмов в жидкой среде. Вопрос о механизме движения любого организма в жидкой среде нельзя рассматривать без учета возможности внутренними усилиями организма создавать специальную деформацию своих некоторых частей еще до начала поступательного движения, поддерживать эту деформацию во все время движения и изменять ее для торможения и прекращения поступательного движения.

1. О сопротивлении идеальной несжимаемой жидкости несимметричному деформированию круглого цилиндра. Пусть до момента $t = 0$ круглый цилиндр радиуса a и окружающая его простирающаяся до бесконечности идеальная и несжимаемая жидкость находятся в покое. Предположим, что в момент $t = 0$ начинается деформация границы, так что к моменту t граница представляет собой окружность с другим значением радиуса b, касающуюся начальной окружности в правом конце горизонтального диаметра (фиг. 1). К указанному виду границы в момент t можно прийти в результате двух последовательных действий: расширения окружности без изменения положения ее центра и поступательного смещения окружности с радиусом b влево до ее касания с окружностью радиуса a. Если применить такое разложение полного смещения границы к двум последовательным ее положениям в моменты t и $t + dt$, то распределение скорости по окружности радиуса b составляется из радиальной скорости и скорости поступательного движения, равных друг другу по модулю. Распределение

одинаковых радиальных скоростей по окружности вызывает движение идеальной жидкости, соответствующее источнику в центре окружности со следующим выражением комплексного потенциала скоростей:

$$W_1 = b\frac{db}{dt}\ln\left(\frac{z+b}{b}\right), \qquad z = x + iy$$

(начало координат x и y совпадает с неподвижной точкой цилиндра). Поступательное движение окружности влево вызывает движение жидкости, отвечающее диполю в центре окружности с комплексным потенциалом в виде



$$W_2 = b^2\frac{db}{dt}\frac{1}{z+b}$$

Таким образом, движение безграничной идеальной жидкости, вызванное указанным несимметричным деформированием границы круглого цилиндра будет представляться следующими выражениями комплексного и действительного потенциалов скоростей:

$$w = b\frac{db}{dt}\left[\ln\frac{z+b}{b} + \frac{b}{z+b}\right] \tag{1.1}$$

$$\varphi = b\frac{db}{dt}\left(\ln\frac{r_1}{b} + \frac{b\cos\beta}{r_1}\right) \tag{1.2}$$

$$z = re^{i\alpha}, \quad r_1^2 = r^2 + 2br\cos\alpha + b^2, \quad \cos\beta = \frac{x+b}{r_1} = \frac{r\cos\alpha + b}{r_1} \tag{1.3}$$

Воспользуемся интегралом Лагранжа — Коши

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = F(t) \tag{1.4}$$

Из равенств (1.3) и (1.2) будем иметь

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{db}{dt}\cos\beta, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\beta}{r_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{r\cos\alpha + b}{r_1^2}\right) = \frac{1}{r_1^2}\frac{db}{dt}(1 - 2\cos^2\beta) \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{2}(V^2)_b = \frac{db}{dt}(1 - \cos\beta) \tag{1.6}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_b = \left[b\frac{d^2b}{dt^2} + 3\left(\frac{db}{dt}\right)^2\right]\cos\beta + \left(\frac{db}{dt}\right)^2(1 - 2\cos^2\beta)$$

Для силы сопротивления жидкости получим следующее равенство:

$$F_x = -b\int_0 p\cos\beta\, d\beta = \pi\rho b\left[2\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + b\frac{d^2b}{dt^2}\right] \tag{1.7}$$

Таким образом результирующее сопротивление безграничной идеальной и несжимаемой жидкости рассматриваемому несимметричному деформированию окружности цилиндра представляется двумя слагаемыми, из которых одно содержит ускорение изменения радиуса, а второе — квадрат скорости этого изменения. Во всех тех случаях, когда ускорение изменения радиуса будет положительным или отрицательным, но таким, что второе

слагаемое в (1.7) по своему модулю не будет превышать первое слагаемое, результирующее сопротивление жидкости будет направлено противоположно среднему несимметричному деформированию окружности цилиндра. При отсутствии внешней силы, обеспечивающей неподвижность правого конца горизонтального диаметра, этот цилиндр под действием силы (1.7) начнет совершать поступательное движение. Следовательно, роль силы (1.7) аналогична роли реактивной силы, но с той существенной разницей, что она возникает только при наличии окружающей жидкости, а переменной будет не масса движущегося объекта, а его ограничивающая поверхность, несимметрично деформируемая внутренними силами. При этом распределение массы внутри поверхности перестает быть однородным. Как только рассматриваемый цилиндр под действием силы (1.7) придет в движение, течение жидкости изменится. Для получения комплексного потенциала скоростей движения, вызванного не только несимметричным деформированием цилиндра, но и его поступательным движением вправо со скоростью начала V_0 подвижной системы отсчета, необходимо к правой части равенства (1.1) присоединить комплексный потенциал диполя в виде

$$W_3 = -V_0 b^2 (z+b)^{-1}$$

Тогда будем иметь

$$w = b\frac{db}{dt}\left[\ln\frac{z+b}{b} + \frac{b}{z+b}\right] - V_0\frac{b^2}{z+b} \tag{1.8}$$

$$\varphi = b\frac{db}{dt}\left(\ln\frac{r_1}{b} + \frac{b\cos\beta}{r_1}\right) - V_0\frac{b^2}{r_1}\cos\beta \tag{1.9}$$

$$(V^2)_b = \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + 2\frac{db}{dt}\left(V_0 - \frac{db}{dt}\right)\cos\beta + \left(V_0 - \frac{db}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_b = \left[3\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + b\frac{d^2b}{dt^2} - 2V_0\frac{db}{dt} - b\frac{dV_0}{dt}\right]\cos\beta +$$

$$+\frac{db}{dt}\left(\frac{db}{dt} - V_0\right)(1 - 2\cos^2\beta) \tag{1.10}$$

Для подсчета результирующей силы воздействия со стороны жидкости используем интеграл Лагранжа — Коши для подвижной системы отсчета и

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}V^2 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}_* + \frac{p}{\rho} = F(t) \tag{1.11}$$

В этом случае дополнительное слагаемое в (1.11) будет представляться в виде

$$\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}_* = (V_x V_0)_b = V_0\frac{db}{dt}\cos\beta + V_0\left(\frac{db}{dt} - V_0\right)(1 - 2\cos^2\beta) \tag{1.12}$$

После подстановки (1.10) и (1.12) в равенство (1.11), а затем и в интегральную формулу (1.7), получим следующее выражение для результирующей силы, действующей на несимметрично деформируемый и поступательно движущийся круглый цилиндр

$$F_x = \pi\rho b\left[2\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + b\left(\frac{d^2b}{dt^2} - \frac{dV_0}{dt}\right) - 2V_0\frac{db}{dt}\right] \tag{1.13}$$

Правая часть (1.13) отличается от правой части (1.7) двумя слагаемыми, содержащими ускорение поступательного движения и произведение

скоростей поступательного движения и изменения радиуса границы цилиндра.

Если обозначить массу единицы длины цилиндра через M, и предположить, что центр масс при деформации не смещается, то для скорости поступательного движения получим следующее дифференциальное уравнение:

$$(M+\pi\rho b^2)\frac{dV_0}{dt}=2\pi\rho b\left[\left(\frac{db}{dt}\right)^2-V_0\frac{db}{dt}\right]+\pi\rho b^2\frac{d^2b}{dt^2} \qquad (1.14)$$

В простейшем случае постоянной скорости увеличения радиуса окружности цилиндра решение уравнения (1.14) будет иметь вид

$$V_0=\frac{db}{dt}\frac{\pi\rho(b^2-a^2)}{M+\pi\rho b^2} \qquad (1.15)$$

Таким образом, в этом случае скорость поступательного движения цилиндра будет расти пропорционально росту его присоединенной массы. Однако, как следует из формулы (1.15), скорость поступательного движения не может превзойти по своему модулю величину скорости увеличения радиуса окружности цилиндра.

Если придерживаться аналогии полученной силы (1.14) с реактивной силой, то для торможения скорости поступательного движения цилиндра необходимо среднее направление несимметричного деформирования границы изменить на противоположное тому, которое обеспечивало возрастание скорости поступательного движения. Выбор именно такого направления деформирования при условии неподвижности левого конца горизонтального диаметра целесообразен еще и потому, что встречное относительное движение среды будет способствовать сжатию границы.

Для изучения движения цилиндра с момента начала торможения выберем начало подвижной системы координат x и y в левом конце горизонтального диаметра. Так как при сжатии окружности $db/dt<0$, то для обеспечения неподвижности левого конца диаметра окружности при несимметричном ее деформировании необходимо изменить знак множителя комплексного потенциала скоростей соответственного диполя. Тогда для комплексного и действительного потенциалов скоростей движения идеальной жидкости будем иметь

$$w=b\frac{db}{dt}\left[\ln\frac{z-b}{b}-\frac{b}{z-b}\right]-V_{01}\frac{b^2}{z-b} \qquad (1.16)$$

$$\varphi=b\frac{db}{dt}\left(\ln\frac{r_1}{b}-\frac{b\cos\beta}{r_1}\right)-V_{01}\frac{b^2}{r_1}\cos\beta \qquad (1.17)$$

$$z=re^{i\alpha},\qquad r_1^2=r^2+b^2-2br\cos\alpha,\qquad \cos\beta=(r\cos\alpha-b)/r_1 \qquad (1.18)$$

Вместо равенств (1.5) будем иметь

$$\frac{dr_1}{dt}=-\frac{db}{dt}\cos\beta,\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\beta}{r_1}\right)=-\frac{1}{r_1^2}\frac{db}{dt}(1-2\cos^2\beta) \qquad (1.19)$$

а вместо равенств (1.10) и (1.12) получим

$$(V^2)_b=\left(\frac{db}{dt}\right)^2+2\frac{db}{dt}\left(V_{01}+\frac{db}{dt}\right)\cos\beta+\left(V_{01}+\frac{db}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{dt}\right)_b=-\left[3\left(\frac{db}{dt}\right)^2+b\frac{d^2b}{dt^2}+2V_{01}\frac{db}{dt}+b\frac{dV_{01}}{dt}\right]\cos\beta+$$

$$+\frac{db}{dt}\left(\frac{db}{dt}+V_{01}\right)(1-2\cos^2\beta) \tag{1.20}$$

$$(V_xV_{01})_b = V_{01}\frac{db}{dt}\cos\beta - V_{01}\left(\frac{db}{dt}+V_{01}\right)(1-2\cos^2\beta)$$

Для результирующей силы получим выражение

$$F_x = -\pi\rho b\left[2\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + b\frac{d^2b}{dt^2} + b\frac{dV_{01}}{dt} + 2V_{01}\frac{db}{dt}\right] \tag{1.21}$$

Если составить дифференциальное уравнение для скорости V_{01} и решить его в предположении постоянства скорости сжатия границы, получим

$$V_{01} = \frac{\pi\rho b^2|db/dt| + C_1}{M+\pi\rho b^2}$$

Пренебрегая временем, необходимым для перестройки деформации границы, можно принять для скорости к моменту начала торможения следующее выражение:

$$(V_{01})_{b0} = \frac{\pi\rho(b_0^2-a^2)}{M+\pi\rho b_0^2}\left|\frac{db}{dt}\right|$$

Скорость цилиндра во все последующее время торможения будет представляться тогда равенством

$$V_{01} = \frac{\pi\rho(b^2-a^2)}{M+\pi\rho b^2}\left|\frac{db}{dt}\right|$$

Таким образом скорость цилиндра будет убывать пропорционально убыванию присоединенной массы.

2. О сопротивлении жидкости несимметричному деформированию шара. Пусть с момента $t=0$ находящийся в безграничной идеальной и несжимаемой жидкости шар претерпевает под действием внутренних усилий несимметричную деформацию того же вида, что и круглый цилиндр в п. 1. Повторяя прежние рассуждения, приходим к выводу, что несимметричное деформирование шара при наличии неподвижной точки в правом конце горизонтального диаметра вызовет движение идеальной несжимаемой жидкости с потенциалом скоростей

$$\varphi = b^2\frac{db}{dt}\left(-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{2}b\frac{\cos\beta}{R_1^2}\right) \tag{2.1}$$

$$R_1^2 = R^2 + 2Rb\cos\alpha + b^2, \qquad \cos\beta = (b+R\cos\alpha)/R_1 \tag{2.2}$$

Из равенств (2.2) и (2.1) будем иметь

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{db}{dt}\cos\beta, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos\beta}{R_1^2}\right) = \frac{1}{R_1^3}\frac{db}{dt}(1-3\cos^2\beta) \tag{2.3}$$

$$(V^2)_b = \left(\frac{db}{dt}\right)^2\left[(1-\cos\beta)^2+\frac{1}{4}\sin^2\beta\right] \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_b = -\frac{1}{b}\frac{d}{dt}\left(b^2\frac{db}{dt}\right)+\frac{1}{2}\left[5\left(\frac{db}{dt}\right)^2+b\frac{d^2b}{dt^2}\right]\cos\beta+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{db}{dt}\right)^2(1-3\cos^2\beta)$$

Проекция на ось x результирующей сил давлений на шар определяется формулой

$$F_x = -2\pi b^2 \int_0^\pi p \cos\beta \sin\beta \, d\beta \tag{2.5}$$

Используя равенства (1.4) и (2.4), получим

$$F_x = \frac{2}{3}\pi\rho b^2 \left[3\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + b\frac{d^2b}{dt^2} \right] \tag{2.6}$$

Таким образом, формула для силы сопротивления идеальной и несжимаемой жидкости несимметричному деформированию шара по своей структуре совпадает с формулой (1.7).

Если внешняя сила, обеспечивающая неподвижность правого конца горизонтального диаметра шара, отсутствует, шар начнет поступательное движение под действием силы (2.6), т. е. для потенциала скоростей жидкости необходимо использовать выражение

$$\varphi = b^2 \frac{db}{dt}\left(-\frac{1}{R_1} + \frac{b}{2R_1^2}\cos\beta \right) - \frac{b^3 V_0}{2R_1^2}\cos\beta \tag{2.7}$$

Используя равенства (2.7) и (2.3), получим

$$(V^2)_b = \left(\frac{db}{dt}\right)^2 + 2\frac{db}{dt}\left(V_0 - \frac{db}{dt}\right)\cos\beta + \left(V_0 - \frac{db}{dt}\right)^2 \left(\cos^2\beta + \frac{1}{4}\sin^2\beta\right)$$

$$(V_0 V_x)_b = V_0 \frac{db}{dt}\left(\cos\beta + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cos^2\beta\right) - \frac{1}{2}V_0^2(1 - 3\cos^2\beta) \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_b = -\frac{1}{b}\frac{d}{dt}\left(b^2\frac{db}{dt}\right) + \frac{1}{2}\left[5\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + b\frac{d^2b}{dt^2} - \right.$$

$$\left. - 3V_0\frac{db}{dt} - b\frac{dV_0}{dt}\right]\cos\beta + \frac{1}{2}\left(\frac{db}{dt}\right)^2(1 - 3\cos^2\beta) - \frac{1}{2}V_0\frac{db}{dt}(1 - 3\cos^2\beta)$$

Учитывая (2.8) в равенстве (1.11) и в формуле (2.4), получим выражение для силы воздействия неограниченной идеальной и несжимаемой жидкости на поступательно перемещающийся и несимметрично деформирующийся шар

$$F_x = \frac{2}{3}\pi\rho b^2 \left[3\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + b\frac{d^2b}{dt^2} - 3V_0\frac{db}{dt} - b\frac{dV_0}{dt} \right] \tag{2.9}$$

По структуре формула (2.9) сходна с формулой (1.13) для цилиндра.

Для скорости поступательного движения шара с массой M получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(M + \frac{2}{3}\pi\rho b^3\right)\left(\frac{dV_0}{dt}\right) = 2\pi\rho b^2 \left[\left(\frac{db^2}{dt}\right) - V_0\frac{db}{dt} \right] + \frac{2}{3}\pi\rho b^3 \frac{d^2b}{dt^2} \tag{2.10}$$

Решение этого уравнения для простейшего случая постоянной скорости увеличения радиуса шара будет иметь вид

$$V_0 = \frac{2}{3}\pi\rho\frac{db}{dt}\frac{b^3 - a^3}{M + {}^2/_3\pi\rho b^3} \tag{2.11}$$

Таким образом, скорость поступательного движения шара будет расти пропорционально росту его присоединенной массы, но не превзойдет по модулю величину скорости увеличения радиуса шара.

Если деформация расширения шара прекратится и начнется деформация его сжатия при неподвижности левого конца горизонтального диаметра шара, то для потенциала скоростей движения идеальной несжимаемой жидкости нужно взять следующее выражение:

$$\varphi = b^2 \frac{db}{dt}\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{b}{2R_1^2}\cos\beta\right) - \frac{b^3 V_{01}}{2R_1^2}\cos\beta \tag{2.12}$$

В этом случае сила воздействия жидкости на шар в стадии торможения его поступательного движения представится в виде

$$F_x = -\frac{2}{3}\pi\rho b^2\left[3\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + b\frac{d^2b}{dt^2} + 3V_{01}\frac{db}{dt} + b\frac{dV_{01}}{dt}\right] \tag{2.13}$$

Если предполагать скорость уменьшения радиуса шара постоянной, то для скорости поступательного движения шара получим формулу (2.11), в которой производная по времени от радиуса шара заменена на ее модуль.

3. О сопротивлении вязкой несжимаемой жидкости несимметричному деформированию шара. При осесимметричном течении вязкой несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости в пренебрежении инерционными членами имеем для функции тока дифференциальное уравнение Стокса

$$DD\psi = 0 \tag{3.1}$$

где D — оператор Стокса, имеющий в сферических координатах вид

$$D = \frac{\partial^2}{\partial R_1^2} + \frac{\sin\beta}{R_1^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\right) \tag{3.2}$$

При этом проекции вектора скорости представляются равенствами

$$V_{R_1} = \frac{1}{R_1^2\sin\beta}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}, \qquad V_\beta = -\frac{1}{R\sin\beta}\frac{\partial\psi}{\partial R} \tag{3.3}$$

При равномерном расширении сферы радиуса b вязкость не оказывает влияния на течение, и поэтому соответствующее решение уравнения (3.1) имеет вид

$$\psi_1 = b^2(db\,/\,dt)\,(1 - \cos\beta) \tag{3.4}$$

Решение уравнения (3.1), соответствующее поступательному движению сферы со скоростью $V_0 - db\,/\,dt$, будет иметь вид

$$\psi_2 = \frac{1}{4}\left(V_0 - \frac{db}{dt}\right)\sin^2\beta\left(3bR_1 - \frac{b^3}{R_1}\right) \tag{3.5}$$

Функция тока течения, вызванного поступательным движением и несимметричной деформацией шара, будет представляться суммой правых частей равенств (3.4) и (3.5).

Для проекции на ось x вектора силы результирующего воздействия жидкости на шар получим

$$F_x = \iint\left(-p\cos\beta + \mu\frac{\partial V_x}{\partial R_1}\right)dS = -6\pi\mu b\left(V_0 - \frac{db}{dt}\right) \tag{3.6}$$

Таким образом, сила представляется формулой Стокса с заменой поступательного движения на разность $V_0 - db\,/\,dt$.

Составляя дифференциальное уравнение движения шара под действием силы (3.6) и решая его в предположении, что скорость изменения радиуса шара постоянна, получим следующее выражение для скорости поступа-

тельного движения шара:

$$V_0 = \frac{db}{dt}\left\{1 - \exp\left[-\frac{3\pi\mu}{M(db/dt)}(b^2 - a^2)\right]\right\} \tag{3.7}$$

Для малых изменений радиуса шара его скорость представляется в виде

$$V_0 = 3\pi\mu M^{-1}(b^2 - a^2) \tag{3.8}$$

Таким образом, несимметричная деформация расширения шара вызывает его поступательное движение, скорость которого в первом приближении не зависит от скорости расширения границы и пропорциональна коэффициенту вязкости жидкости.

Для стадии торможения поступательного движения шара будет справедлива формула (3.6), но при условии, что радиус шара убывает от некоторого значения b до первоначального значения a.