

УДК 532.529.5

## ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

В. Е. НАКОРЯКОВ, В. В. СОБОЛЕВ. И. Р. ШРЕЙБЕР

(Новосибирск)

На основе квазигомогенной модели рассматривается распространение длинноволновых возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа. Для возмущений скорости получено уравнение Бюргерса — Кортевега — де Фриза, найдены нестационарные решения этого уравнения. Установлено, что вязкость приводит к дестабилизации волны. Стационарные решения могут описывать структуру фронта слабой ударной волны, которая при определенных условиях может иметь осциллирующий характер.

Акустические свойства газожидкостных смесей исследовались в [1]. В работе [2] получено уравнение Кортевега — де Фриза, описывающее распространение возмущений давления в газожидкостной среде, и отмечена аналогия между акустическими волнами в системе жидкость — пузырьки газа и гравитационными волнами на поверхности тяжелой жидкости.

В этой работе задача о распространении длинноволновых возмущений скорости в двухфазной смеси с малым газосодержанием рассмотрена на основе уравнений квазигомогенной модели движения двухфазных сред. При выводе уравнений используются методы нелинейной волновой динамики [3, 4], позволяющие провести раздельное рассмотрение распространения возмущений скорости, давления и плотности с учетом диссипативных эффектов.

**1. Основные уравнения и соотношения.** Рассмотрим смесь газа и жидкости с малым газосодержанием  $\alpha \ll 1$ , предполагая, что газовая фаза содержится в виде пузырьков малого размера.

Если характерный линейный размер возмущения  $l$  много больше расстояний между пузырьками, распределение пузырьков можно не детализировать и рассматривать газожидкостную смесь как газ с плотностью, приблизительно равной плотности жидкости, и сжимаемостью газовой фазы. Если, кроме того, расстояние между пузырьками много больше радиуса  $R$  пузырька, то можно пренебречь взаимодействием между пузырьками и использовать уравнение Рэлея для пульсаций одиночного пузырька при получении уравнения состояния газа, моделирующего газожидкостную смесь. Процесс распространения возмущений определяется процессом колебания пузырька и для длинных волн его можно считать изотермическим [1, 2].

В качестве исходной системы уравнений квазигомогенной модели используются уравнения, полученные Цвиком [5]

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\rho^{-1} \nabla p + \eta [\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \mathbf{u})] \quad (1.1)$$

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \rho = (1 - \alpha) \rho_1 + \alpha \rho_2$$

$$\rho \mathbf{u} = \rho_2 \alpha \mathbf{u}_2 + \rho_1 (1 - \alpha) \mathbf{u}_1, \quad \alpha = \frac{4}{3} \pi R^3 N \rho \quad (N = \text{const})$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — скорость,  $p$  — давление,  $t$  — время,  $\eta$  — вязкость жидкости,  $\rho$  — плотность смеси,  $\rho_1$  — плотность жидкости,  $\rho_2$  — плотность газа,  $N$  — число пузырьков в единице массы смеси.

В квазигомогенной модели при  $\alpha \ll 1$  скорость жидкости равна скорости смеси  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$ .

Необходимо дополнить систему (1.1) уравнением состояния. Обычно связь между изменением давления  $\delta p$  и плотности  $\delta \rho$  с учетом адиабатичности процесса имеет вид  $\delta p = c^2 \delta \rho$  и представляет собой уравнение состояния.

В принятой модели газожидкостной смеси изменение плотности смеси  $\delta \rho$  происходит в основном за счет изменения объема пузырька и плотности газа внутри пузырька. Согласно сделанному выше допущению движение каждого пузырька можно рассматривать независимо от остальных пузырьков и использовать уравнение Рэлея для описания изменения объема газа в смеси в виде [6]

$$m \delta v'' + \lambda m \delta v' + \frac{3p_0}{4\pi R_0^2 N} \delta v = -\delta p \quad (1.2)$$

Здесь  $\delta v'$  и  $\delta v''$  — полные производные по времени

$$\delta v = \frac{4}{3} \pi N (R^3 - R_0^3), \quad m = \rho_1 / 4\pi R_0 N, \quad \lambda = 2\Lambda \omega$$

где  $\omega$  — частота волны. Нетрудно показать [1], что

$$\delta \rho = \frac{-(1 - \alpha_0) \alpha_0 \delta v}{v_0} \quad \left( v_0 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 N \right)$$

Здесь  $v$  — объем газа в смеси,  $\Lambda$  — логарифмический декремент затухания. Индекс 0 относится к величинам в невозмущенном состоянии.

Тогда уравнение состояния принимает вид, характерный для сред с релаксацией

$$\delta p = c_0^2 \delta \rho + \frac{\lambda R_0^2}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \delta \rho' + \frac{R_0^2}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \delta \rho'', \quad c_0^2 = \frac{p_0}{\rho_1 \alpha_0 (1 - \alpha_0)} \quad (1.3)$$

Здесь  $c_0^2$  — скорость распространения низкочастотного звука в двухфазной среде. В безразмерной форме уравнение состояния имеет вид

$$\delta p (\rho_0 c_0^2)^{-1} = \delta (\rho / \rho_0) + 2\nu \delta (\rho' / \rho_0) + 2\chi \delta (\rho'' / \rho_0) \quad (1.4)$$

$$2\nu = \frac{\lambda R_0^2}{3L\alpha_0(1 - \alpha_0)}, \quad 2\chi = \frac{R_0^2}{3L^2\alpha_0(1 - \alpha_0)}$$

Так как  $R_0 \ll l$ , то  $\nu \sim \chi \sim \varepsilon \ll 1$ , и если  $\delta p \sim \delta \rho \sim \varepsilon$ , то диссипативный или дисперсионный члены уравнения состояния имеют порядок  $\varepsilon^2$ .

В дальнейшем будем рассматривать все уравнения и соотношения с точностью до  $\varepsilon^2$ . Это даст возможность учесть нелинейные, диссипативные и дисперсионные эффекты, существенные при распространении волн в двухфазной смеси, и использовать формализм нелинейной волновой динамики [3, 4].

Найдем выражения для  $\rho'$  и  $\rho''$  из уравнения непрерывности и волнового уравнения, написанных с точностью до  $\varepsilon$

$$\rho' = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} + O(\varepsilon^2), \quad \rho'' = c_0^2 \Delta \rho + O(\varepsilon^2) \quad (1.5)$$

Систему уравнений (1.1) — (1.3) можно переписать, таким образом, в виде системы уравнений Буссинеска

$$\begin{aligned} \rho_t - (\mathbf{u} \nabla) \rho &= -c_0^2 \rho^{-1} \nabla \rho + \eta [\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \mathbf{u})] + \\ &+ \frac{\lambda R_0^2}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \nabla (\nabla \mathbf{u}) - \frac{R_0^2 c_0^2}{3\alpha_0(1 - \alpha_0)} \Delta \nabla \rho \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

Рассмотрим одномерный случай. Тогда

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \frac{c_0^2}{\rho} \rho_x &= 2\mu u_{xx} - \frac{2\beta c_0}{\rho} \rho_{xxx} \\ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0 \\ \mu &= \frac{\lambda R_0^2}{6\alpha_0(1-\alpha_0)} + \frac{2}{3} \eta \quad \beta = \frac{R_0^2 c_0}{6\alpha_0(1-\alpha_0)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Следуя [3], будем искать возмущение плотности  $\delta\rho$  в виде квазипростой волны

$$\delta\rho = f(u) + \Psi(x, t) \quad (1.8)$$

Здесь  $f(u)$  — решение системы уравнений (1.7) без диссипации и дисперсии (простая волна), а  $\Psi(x, t)$  — функция, зависящая от диссипативных и дисперсионных эффектов. Положив  $\mu = \beta = \Psi = 0$ , определяем  $f(u)$

$$df/du = \pm \rho / c_0 \quad (1.9)$$

В дальнейшем для определенности будем рассматривать возмущения, распространяющиеся «вправо», т. е. вдоль характеристики  $x - c_0 t = \text{const}$ , что соответствует знаку плюс в правой части (1.9).

Подставляя (1.8), (1.9) в (1.7), получим систему уравнений, из которой следует, что

$$-c_0^2 \rho^{-1} \Psi_x + c_0 \rho^{-1} \Psi_t + 2\mu u_{xx} - 2\beta u_{xxx} = 0 \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) легко проинтегрировать вдоль  $x - c_0 t = \text{const}$ , введя переменную  $\xi = x - c_0 t$ . Тогда

$$\Psi_\xi = \rho c_0^{-2} (\mu u_\xi - \beta u_{\xi\xi}) \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в исходную систему, получаем уравнение Бюргера — Кортевега — де Фриза (БКФ) для возмущений скорости в системе координат, движущейся со скоростью  $c_0$

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0 \quad (1.12)$$

Найдя из (1.12) величину  $u$ , можно при помощи (1.8), (1.9) определить возмущение давления и плотности.

**2. Анализ решений.** Приведем уравнение БКФ (1.12) к безразмерному виду, вводя новые переменные

$$H = u / u_0, \quad z = x / L, \quad \tau = tu_0 / L$$

Здесь  $u_0$  — амплитуда начального возмущения скорости,  $L$  — его характерный линейный размер. Тогда

$$H_\tau + HH_z - \nu H_{zz} + \chi H_{zzz} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nu = \mu / u_0 L, \quad \chi = \beta / L^2 u_0$$

При  $\nu = 0$  имеем уравнение КФ

$$H_\tau + HH_z + \chi H_{zzz} = 0 \quad (2.2)$$

Численные расчеты показывают [7, 8], что уравнение (2.2) имеет решение в виде кноидальных и уединенных волн.

Известно [3], что солитонное стационарное решение уравнения КФ имеет вид

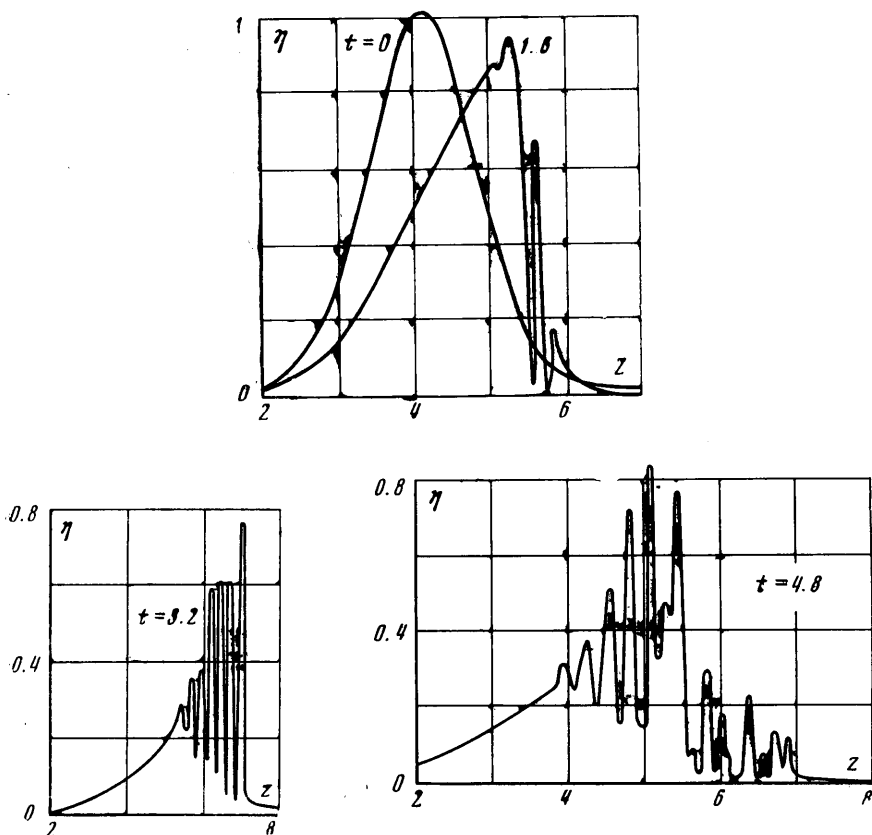
$$H = \text{sech}^2(1/12\chi)^{1/2} (z - V\tau), \quad V = 1/3 \quad (2.3)$$

Кноидальные решения можно записать в виде эллиптической функции Якоби [2, 3]

$$H(z) = \frac{1}{s^2} \operatorname{dn}^2(\xi, s), \quad s^2 = \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3}, \quad \xi = \left(\frac{1}{6\chi}\right)^{1/2} \frac{z}{s} \quad (2.4)$$

где  $b_1, b_2, b_3$  — константы интегрирования (2.1).

Уравнение БКФ в безразмерном виде (2.1) интегрировалось численно. Оно аппроксимировалось явной конечно-разностной схемой второго поряд-



Фиг. 1

ка по времени и координате. Начальное условие задавалось в виде

$$H(z, 0) = \exp[-(z - z_0)^2] \quad (2.5)$$

Бесконечная среда моделировалась при помощи периодических краевых условий [7]

$$\eta(z, \tau) = \eta(z + L, \tau) \quad (L \gg 1) \quad (2.6)$$

Интегрируя уравнение (2.1) по  $z$  на сегменте  $[0, L]$  с учетом периодичности функций  $H, H_z, H_{zz}$ , получим закон сохранения импульса

$$\frac{\partial I_1}{\partial \tau} = 0, \quad I_1 = \int_0^L u \, dz \quad (2.7)$$

Если  $\nu = 0$ , то, как известно [3], уравнение КФ имеет бесконечное число законов сохранения.

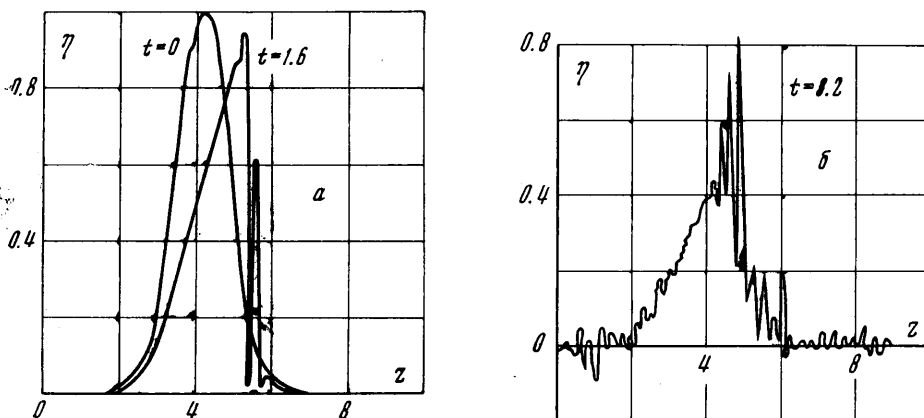
В процессе вычислений контролировался закон сохранения импульса (2.7), а в случае  $\nu = 0$  и закон сохранения энергии

$$I_2 = \int_0^L u^2 dz$$

Максимальные относительные погрешности были следующие:

$$\frac{\Delta I_1}{I_1} = 2 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\Delta I_2}{I_2} = 2 \cdot 10^{-3}$$

Для проверки правильности счета при  $\nu = 0$  в качестве начального распределения задавалось солитонное стационарное решение (2.3) урав-



Фиг. 2

нения КФ, его изменение с течением времени не превышало погрешности интегрирования исходного дифференциального уравнения. Шаги по времени и координате выбирались после ряда пробных вычислений из соображений устойчивости и экономичности разностной схемы. Результаты вычислений с различным числом расчетных точек совпадают с достаточной точностью.

На фиг. 1, а, б, в показано поведение  $H(z, \tau)$  при  $\nu = 0$ ,  $\chi = 4 \cdot 10^{-4}$ . Видно, что начальные возмущения распадаются на ряд солитонов, число которых довольно велико, так как параметр подобия [3]  $\sigma = 1/\chi = 2500$ .

При учете диссипации  $\nu \neq 0$  характер решения существенно меняется. На фиг. 2, а, б приведены результаты численного интегрирования уравнения (2.1) при  $\chi = 0.0004$ ,  $\nu = 0.0001$ . На профилях  $H(z, \tau)$  появляются характерные осцилляции, амплитуда которых увеличивается со временем. Рост амплитуды ведет к усилению роли нелинейных эффектов, что в свою очередь приводит к раскачке высокочастотных осцилляций. Наблюдается дестабилизация волны возмущения. Счет проводился до тех пор, пока длины волн колебаний были много больше шага интегрирования по  $z$ . Явление, аналогичное дестабилизации волны, было, по-видимому, впервые обнаружено при исследовании устойчивых ламинарных течений [9].

Дисперсионное соотношение, соответствующее линеаризованному уравнению (1.12), имеет вид

$$\omega = c_0 k + i\mu k^2 - \beta k^3$$

а выражение для фазовой скорости

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = c_0 \left[ 1 + i \left( \frac{2}{3} \frac{\Lambda R_0^2}{L^2 \alpha_0 (1 - \alpha_0)} + \text{Re} \right) - \frac{R_0^2}{2L^2 \alpha_0 (1 - \alpha_0)} \right], \quad \text{Re} = \frac{2}{3} \frac{\eta}{u_0 L}$$

где  $Re$  — число Рейнольдса. При  $L \rightarrow R_0[2\alpha_0(1 - \alpha_0)]^{-1/2}$  возможно лишь поглощение и дробление сигнала на высокочастотные осцилляции (фиг. 2).

**3. Уравнение волны в двухфазной смеси.** Качественные соображения о структуре ударной волны в двухфазной газожидкостной смеси были высказаны в [1], теоретически этот вопрос рассмотрен также в [10]. Исходя из общих результатов нелинейной волновой динамики в [1, 10], показана возможность образования ударной волны с осциллирующим профилем.

По-видимому, ударные волны небольшой интенсивности в двухфазной смеси можно исследовать с помощью стационарных решений БКФ, отвлекаясь от влияния процессов теплопроводности, испарения, взаимодействия пузырьков газа и т. д., подобно тому, как это сделано в [11] при исследовании бесстолкновительных ударных волн в плазме.

Если ввести в уравнение (1.12) новые переменные  $\varphi = x - Vt$  и  $u = u(\varphi)$ , легко получить

$$\beta \frac{d^3 u}{d\varphi^3} - \mu \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - \frac{du}{d\varphi}(u - V) = 0 \quad (3.1)$$

Здесь  $V = \Delta u$  — скачок скорости в ударной волне.

В [3] показано, что ударная волна имеет осциллирующий профиль при условии

$$\mu^2 < 4\beta\Delta u \quad (3.2)$$

В случае, когда диссипация обусловлена только потерями на пузырьках, условие (3.2) можно переписать в виде

$$\Lambda < L(2R_0)^{-1}[24M\alpha_0(1 - \alpha_0)]^{1/2}, \quad M = \Delta u / c_0$$

где  $\Lambda$  — логарифмический декремент затухания.

Поступило 27 IV 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, М., «Мир», 1968.
2. Van Wijngaarden L. On the equations of motion for mixtures of fluid and gas bubbles. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, No. 3.
3. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. Новосибирск, Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 1968.
4. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. Нелинейные волны. Усп. физ. н., 1971, т. 103, вып. 2.
5. Zwick S. A. Behavior of small permanent gas bubbles in a liquid. J. Mathem. and Phys., 1958, vol. 37, No. 3, 1959, vol. 37, No. 4.
6. Devin Ch. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No. 12.
7. Zabusky N. I., Kruskal M. D. Interaction of «Solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. letters, 1965, vol. 15, No. 6.
8. Березин Ю. А., Карпман В. И. О нелинейной эволюции возмущений в плазме и других диспергирующих средах. ЖЭТФ, 1965, т. 51, вып. 5.
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
10. Van Wijngaarden L. On the structure of shock waves in liquid-bubble mixtures. Appl. Sci. Res., 1970, vol. 22, No. 5, pp. 366—381.
11. Сагдеев Р. З. О тонкой структуре фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, вып. 10.