

УДК 532.529:538.4

**УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ МНОГОФАЗНЫХ
СРЕД.
ОБ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ, РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ
И ЗАТУХАНИИ СЛАБЫХ ВОЛН**

В. В. ГОГОСОВ, Н. Л. ФАРБЕР

(Москва)

Выписываются уравнения движения многофазной среды: газ, заряженные капли (или твердые частицы) и свободные ионы в приближении электротидродинамики. Используя принципы термодинамики неравновесных процессов, в случае слабого отклонения от равновесия выводятся формулы для силы трения, потока тепла в газовой фазе, обмена энергией между компонентами и скорости рождения или исчезновения капель.

Предлагаются способы упрощения выписанной системы уравнений. Получены различные формы закона Ома для капель в такой среде, выведена простая формула для вычисления разницы температур фаз. Показано, что закон Ома для капель, вообще говоря, отличается от соответствующего выражения в обычной электротидродинамике: связь плотности тока со скоростью среды и электрическим полем нелинейна.

Получен интеграл «вмороженности» для жидкой фазы, справедливый, когда скорости газовой и жидкой фаз совпадают. Рассмотрена задача об одномерном, стационарном течении с усложненным законом Ома для жидкой фазы. Показано, что, когда электрическое поле можно считать постоянным, решение задачи сводится к решению соответствующей задачи в обычной электротидродинамике путем введения новых обозначений.

Выписана система соотношений на разрыве в двухфазной среде газ — заряженные капли с усложненным законом Ома. Проведена классификация разрывов. Показано, что для определения параметров за фронтом ударной волны недостаточно задать величины всех параметров перед разрывом и скорость распространения разрыва. Неопределенным при этом остается интенсивность поверхностного заряда на разрыве и связанный с ним величина нормальной составляющей электрического поля за фронтом разрыва. Выписывается необходимое уравнение, замыкающее систему соотношений на фронте ударной волны. Как и в обычной электротидродинамике, вид этих формул зависит от величины нормальной к фронту разрыва скорости, а также от знака и величины нормальной к разрыву составляющей напряженности электрического поля перед волной. Однако в отличие от обычной электротидродинамики связь между этими параметрами может быть нелинейной. Показано, что образование поверхностного заряда связано с накоплением объемного заряда в окрестности фронта разрыва. Указан класс ударных волн, для существования структуры которых необходимо, чтобы электрическое поле и скорость перед волной были связаны определенным соотношением. При этом нормальную к фронту волны составляющую электрического поля за волной нужно задавать.

Изучается распространение слабых волн в случае, когда влиянием жидкой фазы на газовую можно пренебречь. Вычисляется декремент затухания. Показано, что может существовать специфический механизм затухания в волне, связанный с обменом энергией между компонентами, возникающим из-за того, что вследствие различия механических свойств компонент, изменение температур и химических потенциалов компонент в результате прохождения волны различно.

1. Уравнения электротидродинамики многофазных сред. Рассмотрим движение смеси, состоящей из трех компонент: газа, заряженных капель и свободных ионов в электрическом поле. Будем обозначать цифрами 1, 2, 3 параметры, относящиеся к газу, каплям и ионам соответственно. Пусть ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 плотности газа, капель и ионов. Предположим, что плотность

ионов мала $\rho_3^0 \ll \rho_1^0$ и введем средние плотности газа, капель и ионов по формулам

$$\rho_1 = a\rho_1^0, \quad \rho_2 = (1 - a)\rho_2^0, \quad \rho_3 = a\rho_3^0$$

(a — объемная концентрация газа). Будем считать, что на каждой капле имеется заряд Ze , где e — заряд иона, равный заряду протона. Обозначая через n_2 , n_3 , q_2 , q_3 , j_2 , j_3 , d число капель и число ионов в единице объема, плотность заряда капель и плотность заряда ионов, плотность тока переносимого каплями, плотность ионного тока и средний диаметр капель, легко установить связи

$$q_2 = Zen_2, \quad q_3 = en_3, \quad j_2 = q_2 v_2, \quad j_3 = q_3 v_3, \quad 1 - a = \frac{1}{6\pi}d^3 n_2 \quad (1.1)$$

Уравнения, описывающие движение такой среды, запишем в виде

$$\partial \rho_1 / \partial t + \operatorname{div} \rho_1 \mathbf{v}_1 = J^+ - J^-, \quad \partial \rho_2 / \partial t + \operatorname{div} \rho_2 \mathbf{v}_2 = J^- - J^+ \quad (1.2)$$

$$\partial n_2 / \partial t + \operatorname{div} n_2 \mathbf{v}_2 = \zeta^- - \zeta^+, \quad \partial q_3 / \partial t + \operatorname{div} q_3 \mathbf{v}_3 = Ze(\zeta^+ - \zeta^-) \quad (1.3)$$

$$\partial \rho_1 \mathbf{v}_1 / \partial t = -\operatorname{div} \rho_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1 - \nabla p + \rho_1 \mathbf{f}_{12} + \rho_1 \mathbf{f}_{13} + J^+ \mathbf{v}_2^* - J^- \mathbf{v}_1^* \quad (1.4)$$

$$\partial \rho_2 \mathbf{v}_2 / \partial t = -\operatorname{div} \rho_2 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2 - \nabla (1 - a)p + \rho_2 \mathbf{f}_{21} + q_2 \mathbf{E} - J^+ \mathbf{v}_2^* + J^- \mathbf{v}_1^* \quad (1.5)$$

$$\rho_3 \mathbf{f}_{31} = -q_3 \mathbf{E} \quad (1.6)$$

$$(\partial / \partial t) (\frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 + \rho_1 \epsilon_1) = -\operatorname{div} [\rho_1 \mathbf{v}_1 (\frac{1}{2} v_1^2 + \epsilon_1) + a p \mathbf{v}_1 + a \mathbf{q}] + \rho_1 \mathbf{f}_{12} \mathbf{v}_1' + j_3 \mathbf{E} + W_{12} + J^+ (\frac{1}{2} v_2^{*2} + \epsilon_2^*) - J^- (\frac{1}{2} v_1^{*2} + \epsilon_1^*), \quad T_1 = T_3 \quad (1.7)$$

$$(\partial / \partial t) (\frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 + \rho_2 \epsilon_2) = -\operatorname{div} [\rho_2 \mathbf{v}_2 (\frac{1}{2} v_2^2 + \epsilon_2) + (1 - a)p \mathbf{v}_2 + (1 - a)\mathbf{q}] + \rho_2 \mathbf{f}_{21} \mathbf{v}_2' + j_2 \mathbf{E} + W_{21} - J^+ (\frac{1}{2} v_2^{*2} + \epsilon_2^*) + J^- (\frac{1}{2} v_1^{*2} + \epsilon_1^*) \quad (1.8)$$

$$p = \rho_1^0 R T_1 = a^{-1} \rho_1 R T_1, \quad \rho_2^0 = \text{const} \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(q_2 + q_3), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (1.10)$$

Здесь v_k — скорость, T_k — температура, p — давление газа, ϵ_k — внутренняя энергия, отнесенная к единице массы k -й фазы, R — газовая постоянная, \mathbf{f}_{ik} — сила, с которой на единицу массы i -й компоненты действует k -я компонента; W_{ik} — энергия, передаваемая в единицу времени единице объема i -й компоненты со стороны k -й компоненты, \mathbf{q} — вектор потока тепла, \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля, J^+ — масса газа, возникающая за счет испарения капель в единицу времени в единице объема. Предполагается, что при испарении в газ вносится импульс $J^+ \mathbf{v}_2^*$ и энергия $J^+ (v_2^{*2}/2 + \epsilon_2^*)$. J^- — масса жидкости, родившаяся в единице объема в единицу времени за счет конденсации газа. Предполагается, что при этом из газа уносится импульс $J^- \mathbf{v}_1^*$ и энергия $J^- (v_1^{*2}/2 + \epsilon_1^*)$, ζ^+ , ζ^- — число капель, исчезающих (рождающихся) в единице объема в единицу времени.

Уравнения (1.2) есть уравнения для размазанной плотности газовой и жидкой фаз соответственно. Первое уравнение (1.3) описывает изменение числа капель в единице объема. Отметим, что это уравнение не совпадает со вторым уравнением (1.2), так как масса капли при испарении и конденсации изменяется. Второе уравнение (1.3) — уравнение изменения плотности заряда ионной компоненты. При написании уравнений (1.3) предполагалось, что, когда капля полностью испаряется, все ионы, сидящие на ней, переходят в ионную компоненту, а при рождении каждой капли из ионной компоненты на нее переходит заряд Ze . Закон исчезновения капель вследствие испарения, а также закон рождения новых капель должны задаваться из эксперимента. После того, как все капли испарят-

ся, уравнения (1.2)–(1.10) переходят в уравнения обычной электрогидродинамики.

Уравнения (1.4), (1.5) есть уравнения движения для газовой и жидкой фаз соответственно. Предполагается, что концентрации ионов и капель не велики, так что сила взаимодействия этих фаз друг с другом мала по сравнению с взаимодействием с газовой фазой. Давление капель предполагается равным нулю.

При выводе уравнений использовалось, что поверхностная концентрация капель равна объемной: сила, с которой давление p газа действует на единичный элемент поверхности, окружающей выделенный объем смеси, равна $a p + (1 - a)p$. При этом составляющая силы $a p$ действует на газ, а $(1 - a)p$ — на капли.

Уравнение (1.6) — закон Ома — упрощенное уравнение движения ионов в электрогидродинамическом приближении [1]. Притоком импульса в ионную компоненту при исчезновении капель за счет испарения и уноса импульса при рождении капель пренебрегается. Уравнение (1.7) — уравнение энергии для смеси газа и ионов в электрогидродинамическом приближении [1]. Температуры газа и ионов предполагаются одинаковыми. Уравнение (1.8) есть уравнение энергии для жидкой фазы. При написании последних двух уравнений предполагалось, что работа сил давления над газом, протекающим через единичный элемент поверхности за единицу времени, равна $a p v_{1n}$, а работа сил давления над жидкой фазой равна $(1 - a)p v_{2n}$. Поток тепла к газовой фазе через единичный элемент поверхности за единицу времени полагается равным $a q_n$, к жидкой фазе — равным $(1 - a)q_n$. Кроме того, предполагается, что концентрация ионов мала, так что энергия смеси газ — ионы совпадает с энергией газа, а вклад ионов, сидящих на каплях, в энергию капель пренебрежимо мал. Когда капли исчезают вследствие испарения и рождаются вследствие конденсации, в ионную компоненту притекает или уходит из нее поток энергии. Этот поток энергии предполагается малым и при написании уравнений (1.7), (1.8) не учитывается. Обмен энергией ионов с каплями и капель с ионами также не учитывается. Члены $\rho_1 f_{12} v'_1$ и $\rho_2 f_{21} v'_2$ — работа силы взаимодействия между газом и каплями. Вообще говоря, $v'_1 \neq v_1$, а $v'_2 \neq v_2$.

Уравнения (1.2)–(1.10) записаны в приближении электрогидродинамики [1], когда слагаемые, связанные с магнитным полем, можно опустить при написании силы Лоренца и уравнений Максвелла.

Нетрудно видеть, что выполняются следующие равенства:

$$\rho_1 f_{12} + \rho_2 f_{21} = 0, \quad \rho_1 f_{13} + \rho_3 f_{31} = 0, \quad \rho_1 f_{12} v'_1 + \rho_2 f_{21} v'_2 + W_{12} + W_{21} = 0 \quad (1.11)$$

Для замыкания системы уравнений нужно знать выражения для J^+ , J^- , ζ^+ , ζ^- , f_{ik} , W_{ik} , q , ϵ_k , ϵ_k^* , v_k^* , v'_k . В получаемые из теоретических соображений или эксперимента формулы для некоторых из перечисленных величин в качестве параметров может входить размер частиц, который связан с параметрами a и n_2 формулой (1.1). При наличии конденсации и испарения размер капель может изменяться так, что, вообще говоря, нужно задавать закон изменения a . Когда капли можно считать несжимаемыми ($\rho_2^0 = \text{const}$), второе уравнение (1.2) есть уравнение для a . Пусть m_2 — средняя масса одной капли. Из второго уравнения (1.2), первого уравнения (1.3) и последнего уравнения (1.1) получим уравнение для изменения среднего диаметра капель

$$\frac{d}{dt} d^3 = \frac{6}{\pi \rho_2^0 n_2} [J^- - m_2 \zeta^- - (J^+ - m_2 \zeta^+)]$$

Когда конденсации и испарения не происходит, а размер капель постоянный, первое уравнение (1.3) отделяется от системы остальных уравнений.

Умножая уравнения (1.4), (1.5) на v_1 и v_2 соответственно, вычитая из уравнений (1.7), (1.8) и используя (1.6), получим уравнения притока тепла для газовой и жидкой фаз

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_1 \varepsilon_1 &= -\operatorname{div} \rho_1 \varepsilon_1 v_1 - ap \operatorname{div} v_1 - \operatorname{div} a q + \rho_1 f_{12}(v_1' - v_1) + (j_3 - q_3 v_1) E + \\ &\quad + W_{12} + J^+ [\varepsilon_2^* + \frac{1}{2}(v_2^* - v_1)^2] - J^- [\varepsilon_1^* + \frac{1}{2}(v_1^* - v_2)^2] \quad (1.12) \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho_2 \varepsilon_2 &= -\operatorname{div} \rho_2 \varepsilon_2 v_2 - (1-a)p \operatorname{div} v_2 - \operatorname{div}(1-a)q + \rho_2 f_{21}(v_2' - v_2) + \\ &\quad + W_{21} - J^+ [\varepsilon_2^* + \frac{1}{2}(v_2^* - v_2)^2] + J^- [\varepsilon_1^* + \frac{1}{2}(v_1^* - v_2)^2] \end{aligned}$$

Запишем тождество Гиббса для газовой и жидкой фаз

$$d\varepsilon_1 = T_1 ds_1 - pd \frac{1}{\rho_1^\circ}, \quad d\varepsilon_2 = T_2 ds_2 \quad (1.13)$$

Здесь s_h — энтропия, отнесенная к единице массы фазы. Выражение для $d\rho_i^\circ / dt$ можно записать в виде

$$\frac{a}{\rho_1^\circ} \frac{d\rho_1^\circ}{dt} = -\operatorname{div} [av_1 + (1-a)v_2] + (J^+ - J^-) \left(\frac{1}{\rho_1^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right) \quad (1.14)$$

Подставляя в формулы (1.13) выражения для $d\rho_1^\circ / dt$, $d\varepsilon_1 / dt$ и $d\varepsilon_2 / dt$ из (1.12) и (1.14), вычислим частные производные по времени от энтропий компонент. Вводя энтропию смеси формулой

$$\rho s = \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2 + \rho_3 s_3 \approx \rho_1 s_1 + \rho_2 s_2,$$

легко вычислить частную производную по времени от энтропии смеси, находящейся в объеме τ . В формулах, приведенных ниже, предполагается, что на поверхности ограничивающей объем τ , скорости фаз и градиенты температур равны нулю

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho s d\tau = - \int_{\tau} \left\{ \frac{v_2 - v_1}{T_1} p \nabla a - \frac{v_1' - v_1}{T_1} \rho_1 f_{12} - \frac{v_2' - v_2}{T_2} \rho_2 f_{21} + \right. \\ &\quad + \frac{v_3 - v_1}{T_1} \rho_3 f_{31} + \frac{q \nabla T_1}{T_1^2} - \frac{W_{12}}{T_1} - \frac{W_{21}}{T_2} - \\ &\quad - \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} [\operatorname{div}(1-a)q + (1-a)p \operatorname{div} v_2] - J^+ \left[\frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_1}{T_1} - \frac{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2}{T_2} - \right. \\ &\quad - \frac{p}{T_1} \left(\frac{1}{\rho_1^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right) + s_1 - s_2 + \frac{(v_2^* - v_1)^2}{2T_1} - \frac{(v_2^* - v_2)^2}{2T_2} \left. \right] + \\ &\quad + J^- \left[\frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_1}{T_1} - \frac{\varepsilon_1^* - \varepsilon_2}{T_2} - \frac{p}{T_1} \left(\frac{1}{\rho_1^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right) + \right. \\ &\quad \left. + s_1 - s_2 + \frac{(v_1^* - v_1)^2}{2T_1} - \frac{(v_1^* - v_2)^2}{2T_2} \right] \} d\tau \end{aligned}$$

Предположим, что отклонения от равновесия малы, так что разности $|v_1^* - v_1|$, $|v_2^* - v_1|$, $|v_2^* - v_2|$, $|v_1^* - v_2|$ много меньше $\min(|v_1^*|, |v_2^*|, |v_1|, |v_2|)$. Кроме того, будем считать, что

$$|T_2 - T_1| \ll \min(T_1, T_2), |\varepsilon_1^* - \varepsilon_2| \sim |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, |\varepsilon_2^* - \varepsilon_2| \lesssim |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$$

Тогда выражение для S можно записать в виде

$$\begin{aligned} \dot{S} = & - \int_{\tau} \left\{ (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \left(\frac{p}{T_1} \nabla \alpha + \frac{\rho_2 \mathbf{f}_{21}}{T_1} \right) + (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \frac{\rho_3 \mathbf{f}_{31}}{T_1} + \frac{\mathbf{q}}{T_1^2} \nabla T_1 + \right. \\ & + (T_2 - T_1) \frac{W_{21} - \operatorname{div}(1-\alpha)\mathbf{q} - (1-\alpha)p \operatorname{div} \mathbf{v}_2 + (J^- - J^+) s_2 T_2}{T_1 T_2} + \\ & \left. + (\mu_2 - \mu_1) T_2 \frac{J^- - J^+}{T_1 T_2} \right\} d\tau \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$(\mu_1 = \varepsilon_1 + p / \rho_1^o - s_1 T_1, \quad \mu_2 = \varepsilon_2 + p / \rho_2^o - s_2 T_2)$$

Применяя теорему Кюри и правило Онзагера, получим следующие выражения для потоков:

$$\begin{aligned} \rho_2 \mathbf{f}_{21} / T_1 + (p / T_1) \nabla \alpha &= -a_{(11)}^* (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = a_{(12)}^* \nabla T_1 - a_{(13)}^* (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \\ \mathbf{q} / T_1^2 &= -a_{(21)}^* (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - a_{(22)}^* \nabla T_1 - a_{(23)}^* (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \\ \rho_3 \mathbf{f}_{31} / T_1 &= -a_{(31)}^* (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - a_{(32)}^* \nabla T_1 - a_{(33)}^* (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \quad (1.16) \\ [W_{21} - \operatorname{div}(1-\alpha)\mathbf{q} - (1-\alpha)p \operatorname{div} \mathbf{v}_2 + (J^- - J^+) s_2 T_2] T_1^{-1} T_2^{-1} &= \\ &= -\gamma_{(11)}^* (T_2 - T_1) - \gamma_{(12)}^* T_2 (\mu_2 - \mu_1) \\ (J^- - J^+) T_1^{-1} T_2^{-1} &= -\gamma_{(21)}^* (T_2 - T_1) - \gamma_{(22)}^* T_2 (\mu_2 - \mu_1) \end{aligned}$$

Здесь и далее индексами 1, 2, 3, взятыми в скобки, пронумерованы соответствующие коэффициенты в соотношениях (1.16) в отличие от тех же индексов написанных без скобок и обозначающих сорт частиц. Из соотношений взаимности Онзагера следует:

$$a_{(12)}^* = -a_{(21)}^*, \quad a_{(13)}^* = a_{(31)}^*, \quad a_{(23)}^* = -a_{(32)}^*, \quad \gamma_{(12)}^* = \gamma_{(21)}^*$$

Так как по предположению взаимодействие капель и ионов пренебрежимо мало, а сила воздействия ионов на газ равна

$$\rho_1 \mathbf{f}_{13} = q_3 \mathbf{E} = q_3 (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) / b_3$$

в соотношениях (1.16) нужно положить

$$a_{(13)}^* = a_{(31)}^* = a_{(23)}^* = a_{(32)}^* = 0, \quad a_{(33)}^* = q_3 / b_3 T_1$$

Здесь b_3 — коэффициент подвижности ионов. Введем также обозначения

$$a_{(1k)} = a_{(1k)}^* T_1, \quad a_{(2k)} = a_{(2k)}^* T_1^2, \quad \gamma_{(k1)} = \gamma_{(k1)}^* T_1 T_2, \quad \gamma_{(k2)} = \gamma_{(k2)}^* T_1 T_2^2$$

Уравнения (1.16) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \rho_2 \mathbf{f}_{21} + p \nabla \alpha &= -a_{(11)} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - a_{(12)} \nabla T_1 \\ \mathbf{q} &= -a_{(21)} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - a_{(22)} \nabla T_1 \\ b_3 q_3 \mathbf{E} &= q_3 (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$W_{21} - \operatorname{div}(1-\alpha)\mathbf{q} - (1-\alpha)p \operatorname{div} \mathbf{v}_2 = -\chi(T_2 - T_1) - \psi(\mu_2 - \mu_1)$$

$$J^+ \sim J^- \sim J^- - J^+ = -\gamma_{(21)} (T_2 - T_1) - \gamma_{(22)} (\mu_2 - \mu_1)$$

$$\chi = \gamma_{(11)} - \gamma_{(21)} T_2 s_2, \quad \psi = \gamma_{(12)} - \gamma_{(22)} T_2 s_2$$

При написании этих соотношений использовано, что J^+ и J^- малые первого порядка $J^+ \sim J^- \sim J^- - J^+$. Соотношения (1.17) есть выражения для сил взаимодействия и обмена энергией между компонентами, скорости рождения частиц и потока тепла в газовой фазе, которые нужно подставить в систему уравнений (1.2) — (1.10). При подстановке членов W_{12} и W_{21} в уравнения (1.7), (1.8) после сокращения оказывается, что поток

тепла q в уравнение энергии для капель не входит, а в уравнение энергии для газа входит без множителя a (член $\operatorname{div} q$). Соответствующие сокращения произойдут и в других уравнениях. Для замыкания системы необходимо задать коэффициенты $a_{(ik)}$, $\gamma_{(ik)}$, χ , ψ , а также v_k' , v_k^* , ε_k , ε_k^* , ζ^+ , ζ^- ($i, k = 1, 2$). Будем считать, что

$$v_k' = v_2, \quad v_k^* = v_k, \quad \varepsilon_k^* = \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k = c_{vk} T_k$$

В случае, когда фазовые переходы не происходят, капли не рождаются и не погибают и объемная концентрация жидкой фазы $1 - a \ll 1$, система уравнений (1.2)–(1.8), (1.17) упрощается. Ниже записаны упрощенные уравнения (1.2)–(1.8), а вместо уравнений энергии записаны уравнения притока тепла для фаз (в уравнениях (1.17) при этом следует положить $1 - a = 0$)

$$\partial \rho_1 / \partial t + \operatorname{div} \rho_1 v_1 = 0, \quad \partial \rho_2 / \partial t + \operatorname{div} \rho_2 v_2 = 0 \quad (1.18)$$

$$\partial n_2 / \partial t + \operatorname{div} n_2 v_2 = 0, \quad \partial q_3 / \partial t + \operatorname{div} q_3 v_3 = 0 \quad (1.19)$$

$$\partial \rho_1 v_1 / \partial t = -\operatorname{div} \rho_1 v_1 v_1 - \nabla p - \rho_2 f_{21} + q_3 E \quad (1.20)$$

$$\partial \rho_2 v_2 / \partial t = -\operatorname{div} \rho_2 v_2 v_2 + \rho_2 f_{21} + q_3 E \quad (1.21)$$

$$j_3 = q_3 v_1 + q_3 b_3 E \quad (1.22)$$

$$(\partial / \partial t) \rho_1 c_{vk} T_1 = -\operatorname{div} \rho_1 v_1 c_{vk} T_1 - p \operatorname{div} v_1 - \operatorname{div} q - \rho_2 f_{21} (v_2 - v_1) + \\ + (j_3 - q_3 v_1) E + \chi (T_2 - T_1), \quad \chi = \gamma_{(11)} \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_2 c_{vk} T_2 = -\operatorname{div} \rho_2 v_2 c_{vk} T_2 - \chi (T_2 - T_1) \quad (1.24)$$

Система уравнений, описывающая движение многофазной среды, впервые выписана в работе [2]. Уравнения энергии для смеси выписывались в работах [3, 4]. Соответствующая система с учетом фазовых превращений предлагалась в работах [5–7]. Подробная библиография по данному вопросу приведена в названных работах. В случае, когда электрическое поле равно нулю, ионы отсутствуют, а капли не заряжены, выражения для потоков, а потому и уравнения, полученные в данной работе, не совпадают с результатами работ [5–7]. В отличие от этих работ здесь учитывается зависимость силы трения от градиента температуры газа, зависимость обмена энергией между компонентами от разницы химических потенциалов фаз, а также зависимость членов, соответствующих фазовым превращениям, от разницы температур фаз. При выводе уравнений в работах [5–7] делается ряд предположений о структуре различных членов, входящих в уравнения. Специальным образом выбирается вид силы трения между компонентами и структура членов, описывающих работу внутренних сил и приток энергии, связанный с химическими реакциями. В данной работе структура всех членов выводится из соображений термодинамики необратимых процессов.

Уравнения, описывающие течение двухфазной среды с заряженными частицами без учета фазовых превращений, выписывались в работе [8]. При этом предполагалось, что объемное содержание твердых частиц $1 - a$ мало, а сила, действующая на частицы, есть электрическая сила, равная qE , и сила, пропорциональная разности скоростей.

Отметим, что в случае, когда $1 - a \ll 1$, уравнения, описывающие многофазную среду, совпадают с уравнениями для многокомпонентной среды, в которых давление жидкой или твердой фазы полагается равным нулю. Отличие состоит в разнице выражений для обмена импульсом и энергией между фазами.

Некоторые вопросы, связанные с течением смесей газов с заряженными каплями в каналах электрогидродинамических генераторов, обсуждались в работах [9, 10].

2. Упрощение полученных уравнений. Система уравнений (1.17)–(1.24) (1.9), (1.10) весьма сложна, любые разумные упрощения ее представляют интерес. Введем плотность смеси ρ , среднюю скорость v и диф-

фузионную скорость v_{12} по формулам

$$\rho = \sum_{\alpha=1}^3 \rho_\alpha \approx \rho_1 + \rho_2, \quad \rho v = \sum_{\alpha=1}^3 \rho_\alpha v_\alpha \approx \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2, \quad v_{12} = v_1 - v_2 \quad (2.1)$$

Складывая уравнения (1.2), а также (1.4) и (1.5) и используя (2.1), получим уравнения неразрывности и движения для смеси в целом

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0 \quad (2.2)$$

$$(\partial / \partial t) \rho v = -\operatorname{div} \rho v v - \nabla p - \operatorname{div} \rho_1 \rho_2 \rho^{-1} v_{12} v_{12} + q E, \quad q = q_2 + q_3 \quad (2.3)$$

Отношение по порядку величины третьего и второго членов правой части уравнения (2.3) равно

$$v_{12}^2 / v_t^2 K, \quad K = 2a(1-a)\rho_2^\circ [a\rho_1^\circ + (1-a)\rho_2^\circ]^{-1}$$

Здесь v_t — тепловая скорость. Легко видеть, что $K \ll 1$; в случае, когда $v_{12}^2 K / v_t^2 \ll 1$, третьим членом можно пренебречь, и уравнение (2.3) принимает вид уравнения движения в обычной электротехнике

$$(\partial / \partial t) \rho v = -\operatorname{div} \rho v v - \nabla p + q E \quad (2.4)$$

Отношение третьего члена правой части уравнения (2.3) к первому порядку $\rho_1 \rho_2 v_{12}^2 / \rho^2 v^2$. Когда это отношение много меньше единицы, третьим членом можно пренебречь и по сравнению с первым.

Полезно выделить важный для приложений случай, когда объемная концентрация жидкой фазы мала, так что $a \sim 1$ и $a\rho_1^\circ \gg (1-a)\rho_2^\circ$. Предположим, что при этом $a\rho_1^\circ v_1 \gg (1-a)\rho_2^\circ v_2$. Тогда $\rho = \rho_1$, $v = v_1$ — плотность и скорость смеси совпадают со скоростью и плотностью газовой фазы.

Укажем возможные способы упрощения уравнения движения (1.21) для заряженных капель. Для оценки членов в этом уравнении воспользуемся выражением для силы трения f_{21} [11]

$$f_{21} = \frac{3c_x \rho_1^\circ v_{12}^3}{4d \rho_2^\circ |v_{12}|}, \quad c_x = \begin{cases} 24R_{12}^{-1}, & R_{12} = \frac{d |v_{12}|}{v_1} \leq 1 \\ 24R_{12}^{-1}(1 + 1/6R_{12}^{2/3}), & 1 < R_{12} < 400 \end{cases} \quad (2.5)$$

Здесь v_1 — кинематическая вязкость газа. Удобно ввести безразмерное время $\tau = d^2 \rho_2^\circ / 18v_1 \rho_1^\circ$, характеризующее обмен импульсом газа с частицами, и параметр взаимодействия $qEL / \rho_2 v_2^2$. Пусть изменение скорости жидкой фазы на величину, сравнимую по порядку с самой скоростью, происходит за время t и на длине L ($L/t = v_2$ — характерная скорость жидкой фазы). Отношение конвективных членов уравнения (1.21) к силе трения и электрической силе равно по порядку величины соответственно $t|v_2| / (t|v_{12}|)$, $\rho_2 v_2^2 / (qEL)$.

В случае, когда хотя бы одно из написанных соотношений мало, конвективными членами в уравнении (1.21) можно пренебречь; уравнение принимает вид

$$\rho_2 f_{21} + q_2 E = 0 \quad (2.6)$$

Разумеется, при этих предположениях слагаемые, соответствующие импульсу и потоку импульса жидкой фазы, входящие в уравнение (2.4), могут также быть опущены по сравнению с членом $q_2 E$, так что в уравнении (2.4) $\rho = \rho_1$, $v = v_1$.

Используя выражение (2.5) для f_{21} (случай $R_{12} > 1$), вводя плотность тока $j_2 = q_2 v_2$ и учитывая формулы (2.1), уравнение (2.6) можно записать в виде

$$\frac{\rho}{\rho_1} (j_2 - q_2 v) = q_2 b_2 E + B \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{5/3} (q_2 v - j_2)^{5/3} \quad (2.7)$$

$$b_2 = \frac{Ze}{3\pi d v_1 \rho_1}, \quad B = \frac{1}{6} \left(\frac{d}{q_2 v_1} \right)^{2/3}$$

Для малого, в указанном выше смысле, объемного содержания жидкой фазы $\rho = \rho_1$ уравнение (2.7) принимает вид

$$j_2 = q_2 v + q_2 b_2 E + B (q_2 v - j_2)^{5/3} \quad (2.8)$$

Деля обе части уравнения (2.8) на q_2 , получим удобное соотношение для разности скоростей жидкой и газовой фаз

$$v_2 - v = b_2 E - A (v_2 - v)^{5/3}, \quad A = \frac{1}{6} (d/v_1)^{2/3} \quad (2.9)$$

Уравнения (2.7) — (2.9) есть различные виды «закона Ома» для капель в электрогидродинамике двухфазной среды. Эти уравнения отличаются от закона Ома в обычной электрогидродинамике нелинейной зависимостью электрического поля от плотности тока и скорости.

Легко видеть, что, когда $R_{12} \ll 1$ и коэффициент $c_x = 24/R_{12}$ (формула (2.5)), закон Ома (2.8) для капель принимает такой же вид, как и в обычной электрогидродинамике

$$j_2 = q_2 v + q_2 b_2 E \quad (2.10)$$

Введем электрическое число Рейнольдса для жидкой фазы $R_{q2} = v/b_2 E$; при $R_{q2} \rightarrow \infty$ закон Ома принимает вид $j_2 = q_2 v$, а это означает, что скорость жидкой фазы v_2 совпадает со скоростью смеси v . Капли, а значит, и заряженные частицы, сидящие на них, перемещаются вместе со средой аналогично тому, как в обычной электрогидродинамике при $R_q \rightarrow \infty$ скорость ионов совпадает со скоростью газа [1].

Укажем некоторые возможные способы упрощения уравнений притока тепла (1.23), (1.24), для жидкой и газовой фаз. Складывая эти уравнения и используя (2.1), получим уравнение притока тепла для смеси в целом

$$\begin{aligned} \partial \rho \epsilon / \partial t = & -\operatorname{div} [\rho \epsilon v + \rho_1 \rho_2 \rho^{-1} (\epsilon_1 - \epsilon_2) v_{12}] - p \operatorname{div} (v + \rho_2 \rho^{-1} v_{12}) - \\ & - \operatorname{div} q + (j_3 - q_3 v - q_3 \rho_2 \rho^{-1} v_{12}) E + \rho_2 f_{21} v_{12} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь ϵ — внутренняя энергия смеси

$$\rho \epsilon = \rho_1 \epsilon_1 + \rho_2 \epsilon_2 + \rho_3 \epsilon_3 \approx \rho_1 \epsilon_1 + \rho_2 \epsilon_2$$

Вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь по сравнению с первым, а член $\rho_2 v_{12} / \rho$ в правой части можно опустить по сравнению с v , если выполняются соответственно следующие неравенства:

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2} \frac{|\epsilon_1 - \epsilon_2|}{\epsilon} \frac{|v_{12}|}{|v|} \ll 1, \quad \frac{\rho_2}{\rho} \frac{|v_{12}|}{|v|} \ll 1 \quad (2.12)$$

Отметим, что, когда объемная концентрация жидких частиц мала ($\alpha \rho_1 \gg (1 - \alpha) \rho_2$), то отношение

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho^2} \sim \frac{\rho_2}{\rho} \sim \frac{(1 - \alpha) \rho_2}{\alpha \rho_1} \ll 1$$

Используя формулу (2.6), последний член уравнения (2.11) можно записать в виде

$$\rho_2 f_{21} v_{12} = \rho \rho_1^{-1} (j_2 - q_2 v) E$$

Для малой концентрации жидких частиц $\rho \approx \rho_1$, $v \approx v_1$ уравнение притока тепла (2.11) переходит при выполнении неравенств (2.12) в соответствующее уравнение притока тепла в обычной электротехнике [1]

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho ev + q) - p \operatorname{div} v + (j - qv) E, \quad j = j_2 + j_3 \quad (2.13)$$

Рассмотрим далее случай, когда объемная концентрация жидких частиц настолько мала, что

$$\rho_1 \epsilon_1 \gg \rho_2 \epsilon_2, \quad \rho e \approx \rho_1 e_1.$$

При этом уравнение (2.13) совпадает с уравнением (1.23), если в последнем пренебречь членом $\chi(T_2 - T_1)$. Физический смысл сделанного приближения ясен: концентрация жидких частиц столь мала, что приток тепла от частиц к газу за счет разницы температур фаз несуществен. Уравнение (1.24) для распределения температуры жидких частиц отделяется от системы определяющих уравнений и после нахождения T_1 и v_2 может быть решено независимо.

Рассмотрим другой возможный случай упрощения уравнения притока тепла для газовой фазы (1.23). Выражение для коэффициента χ — множителя при разнице температур — можно записать в виде [12] (формула Ранца — Маршалла)

$$\chi = \frac{6\rho_2 \kappa_1 \text{Nu}}{\rho_2^2 d^2}, \quad \text{Nu} = \begin{cases} 2, & R_{12} \leq 1 \\ 2 + 0,6R_{12}^{1/2} \text{Pr}^{1/3}, & 1 < R_{12} < 400. \end{cases}$$

Здесь κ_1 — теплопроводность газа, Nu — число Нуссельта, Pr — число Прандтля для газовой фазы. Представим коэффициент χ в виде $\chi = \rho_1 c_{v1} / \tau^*$. Здесь τ^* — характерное время обмена энергией газовой и жидкой фаз за счет разницы их температур. Пусть t — характерное время изменения температуры газа. Отношение членов левой части уравнения (1.23) к последнему члену правой части порядка $T_1 \tau^* / t |T_1 - T_2|$. Ясно, что, когда $\tau^* / t \ll 1$ и $\operatorname{div} q$ мала, уравнение притока тепла для газа можно записать в виде

$$(j - qv_1) E = \chi (T_1 - T_2) \quad (2.14)$$

Неравенство $\tau^* / t \ll 1$ означает, что передача тепла от капель к газу идет гораздо быстрее конвективного переноса тепла в газе. Формула (2.14) аналогична формуле, предложенной Керреброком для вычисления температуры электронов [13] в разнотемпературной плазме.

Для определения температуры жидкой фазы нужно при этом пользоваться формулой (2.14). Когда $\tau^* \rightarrow 0$, температуры газовой и жидкой фаз совпадают. Для определения суммарной температуры нужно при этом пользоваться суммарным уравнением притока тепла (2.13) или (2.11).

3. Интеграл вмороженности. В п. 2 было показано, что, когда $R_{q2} \gg 1$, скорости газовой и жидкой фаз совпадают $v_1 = v_2$. При этом из уравнений (1.18), как и в обычной электротехнике [14] следует:

$$\rho_2 / \rho_1 = \beta_1 = \text{const}, \quad n_2 / \rho_1 = \beta_2 = \text{const} \quad (3.1)$$

В формулах (3.1) величины β постоянны в частице. Другими словами, имеет место вмороженность заряженных частиц в нейтральную среду, в стационарном случае β не меняются вдоль линии тока. Разумеется, инте-

гравитации (3.1) справедливы и в отсутствие электрического поля, когда $\tau/t \ll 1$.

В п. 4—6 рассматриваются движения двухфазной среды газ — заряженные капли; свободные ионы отсутствуют.

4. Одномерные течения. Пусть характерные параметры таковы, что в качестве уравнений, описывающих движение двухфазной среды, можно выбрать уравнения (2.2), (2.4), (2.8), (2.13), (1.9), (1.10) и второе уравнение (1.18). Предположим, что температуры компонент одинаковы. Будем называть для определенности перечисленные уравнениями электрогидродинамики двухфазной среды в диффузионном приближении. Критерии, указывающие, при каких параметрах полная система уравнений (1.2) — (1.10) записывается в диффузионном приближении, выписаны в п. 2. Отметим, что эти уравнения отличаются от уравнений обычной электрогидродинамики лишь усложненной формой закона Ома (2.8).

Рассмотрим стационарное течение невязкой, нетеплопроводной среды с объемным зарядом в электрическом поле. Будем считать, что все величины зависят только от x , а электрическое поле имеет одну компоненту, направленную вдоль оси x . Соответствующая задача в обычной электрогидродинамике рассматривалась в работе [15].

Разрешая уравнения относительно производных, получим

$$\frac{dv_x}{dx} = \frac{qEM^2(v_x - v^*)}{mv_x(M^2 - 1)} \quad \frac{dM}{dx} = \frac{(\gamma + 1)qEM^3(v_x - v^{**})}{2mv_x^2(M^2 - 1)} \quad (4.1)$$

$$m = \rho v_x, \quad v^* = (\gamma - 1) \frac{j_0 - qv_x}{q}, \quad v^{**} = v^*(\gamma + 1)^{-1}(1 + \gamma M^2) \quad (4.2)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad M^2 = \frac{\rho v_x^2}{\gamma p}$$

Видно, что полученная система уравнений отличается от соответствующих уравнений (1.3) работы [15] выражением для v^* . В самом деле, в работе [15] использовался закон Ома в форме (2.10), а потому $v^* = (\gamma - 1)bE$. В рассматриваемом случае величина v^* есть нелинейная функция электрического поля, удовлетворяющая уравнениям (2.8) и (2.9).

Пусть $Q \ll 1$, при этом поле E можно считать постоянным. Предположим, что коэффициенты A и b_2 в уравнении (2.9) не меняются, тогда величина V_2 — v также постоянна. Вводя безразмерную скорость $U = v_x/v^*$, из уравнений (4.1) легко получить уравнение для dM/dU , в точности совпадающее с уравнением (2.1) работы [15]. Таким образом, в случае $Q \ll 1$ решение задачи об одномерном течении двухфазной среды совпадает с решением этой задачи в обычной электрогидродинамике, только вместо u_1 в формулы работы [15] нужно подставить выражение v^* из (4.2).

В случае переменного электрического поля анализ режимов течения можно провести в плоскости $E v_x$ аналогично тому, как это делалось в работе [15]. Картина областей, в которых осуществляются те или иные режимы течения, при этом частично изменится.

5. Разрывные решения. Разрывные решения в электрогидродинамике исследовались в работах [16, 17]. Рассмотрим разрывные решения в электрородинамике двухфазной среды в диффузионном приближении (с усложненным законом Ома). Система соотношений на плоском стационарном разрыве примет вид (обозначения работы [16])

$$\begin{aligned} \rho v_x = m = \text{const}, \quad m\{v_n\} + \{p\} - (8\pi)^{-1}\{E_n^2\} = 0, \quad m\{v_t\} = 0 \\ m\{\gamma / (\gamma - 1)p / \rho + 1/2v_n^2 + 1/2v_t^2\} = 0, \quad \{E_n\} = 4\pi\sigma, \quad \{j_n\} = 0 \quad (5.1) \\ j_n = qv_n + qb_2E_n - B(j_n - qv_n)^{1/3}, \quad j_t = qv_t + qb_2E_t - B(j_t - qv_t)^{1/3}. \end{aligned}$$

Здесь для простоты принято $E_{rt} = 0$. Обобщение на случай $E_{rt} \neq 0$ элементарно. Цифрами I и II обозначаются состояния перед и за фрон-

том ударной волны. Написанные уравнения отличаются от соответствующей системы в обычной электротехнике двумя последними уравнениями. Удобно расклассифицировать разрывы на три типа: тангенциальные разрывы, когда $m = 0, j_n = 0$, ударно-контактные разрывы, когда $m \neq 0, j_n \neq 0$, и ударные волны, когда $m \neq 0, j_n \neq 0$.

Рассмотрим более подробно случай ударных волн. Как и в обычной электротехнике, системы соотношений (5.1) недостаточно для определения параметров за фронтом ударной волны по заданным параметрам перед фронтом волны и скорости волны. Неопределенной при этом остается величина поверхностного заряда σ и связанная с ней величина нормальной составляющей электрического поля E_{nII} за фронтом разрыва.

Выведем недостающее соотношение. Пусть

$$q > 0, v_{nI} > 0, E_{nI} < 0, v_{2nI} > 0 (j_n = j_{n2} > 0).$$

Скорость внутри структуры ударной волны падает (ясно, что такая ситуация всегда осуществляется, когда параметр взаимодействия мал). С уменьшением скорости v_n скорость v_{2n} , определяемая уравнением (2.9), также, вообще говоря, может уменьшаться до нуля. Но нормальная составляющая плотности тока на фронте ударной волны

$$j_n = qv_{2n} = j_{nI} = \text{const} \neq 0.$$

В области, где $v_{2n} \rightarrow 0$, величина $q \rightarrow \infty$. Только в этом месте и может образоваться поверхностный заряд. Непосредственно за фронтом ударной волны получим из (2.9) [16, 17]

$$v_{nII} + b_2 E_{nII} + A v_{nII}^{5/3} = 0 \quad (5.2)$$

Это уравнение и является недостающим соотношением на фронте ударной волны, замыкающим систему (5.1). Когда $A = 0$, уравнение (5.2) переходит в уравнение (3.8) работы [16]. Интенсивность поверхностного заряда

$$4\pi\sigma = E_{nII} - E_{nI} = -(v_{nII} + A v_{nII}^{5/3}) / b_2 - E_{nI} \quad (5.3)$$

Если v_{2n} не обращается в нуль внутри структуры ударной волны, то $q \neq \infty, \sigma = 0$, на фронте волны, а $E_{nI} = E_{nII}$.

В случае, когда $q > 0, v_{nI} > 0, E_I < 0, v_{2nI} < 0 (j_{n2} < 0)$, как и в обычной электротехнике [17], имеется класс ударных волн, у которых электрическое поле перед волной не может быть задано произвольно: должна выполняться связь

$$v_{nI} + A v_{nI}^{5/3} + b_2 E_{nI} = 0 \quad (5.4)$$

При этом поле за фронтом волны может принимать любые значения, удовлетворяющие неравенствам

$$-v_{nI} - A v_{nI}^{5/3} < E_{nII} b_2 < -v_{nII} - A v_{nII}^{5/3}$$

и для замыкания условий на ударной волне должно быть задано. Интенсивность поверхностного заряда определяется из формулы

$$4\pi\sigma = E_{nII} - E_{nI} = E_{nII} + v_{nI} / b_2 + A v_{nI}^{5/3} / b_2$$

В случае, когда равенство (5.4) не выполняется, плотность поверхностного заряда $\sigma = 0$, а $E_{nI} = E_{nII}$.

Из эволюционности следует, что перед и за фронтом ударной волны выполняются соотношения $v_{nI} > a_I, v_{nII} < a_{II}$, где a — скорость звука.

6. Слабые волны. Нетрудно видеть, что задача о распространении слабых возмущений в среде газ — заряженные капли в диффузионном приближении совпадает с соответствующей задачей в обычной электрогидродинамике [18]. Нелинейные члены в усложненном законе Ома (2.8) при линеаризации можно не учитывать, так что уравнения, описывающие слабые возмущения в обоих случаях совпадают. Существуют две скорости распространения возмущений в покоящейся среде [18]: обычная газодинамическая скорость звука и скорость, равная скорости движения ионной компоненты.

Рассмотрим распространение слабых волн по покоящейся среде газ — заряженные капли в случае, когда диффузионное приближение не выполняется, а капли не влияют на движение и температуру газа. Как показано в п. 2, это может быть, когда $\rho_2 \ll \rho_1$. При этом по газу будет распространяться обычная звуковая волна со скоростью $a = \sqrt{\gamma p / \rho_1}$. Будем считать, что влияние сил электрического поля на жидкую фазу не существенно, так что капли движутся лишь под действием силы трения с газом.

Пусть ось x совпадает с направлением движения звуковой волны, тогда

$$v_1' = v_{10} \cos(kx - \omega t), \quad T_1' = T_{10} \cos(kx - \omega t) \quad (6.1)$$

Изменение температуры в звуковой волне связано с изменением скорости соотношением [19]

$$T_1' = \eta v_1', \quad \eta = \beta a T_1 / c_{p1} \quad (6.2)$$

Здесь β — коэффициент теплового расширения.

Газ за счет силы трения и обмена энергией между компонентами вовлекает в движение жидкую фазу, изменяя ее температуру. Линеаризованные уравнения движения и притока тепла (1.21), (1.24) для жидкой фазы, когда не происходит испарения и конденсации и α близко к единице, могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \rho_2 \partial v_2' / \partial t &= a_{(11)}(v_1' - v_2') - a_{(12)} \nabla T_1', \quad C_{v2} \rho_2 \partial T_2' / \partial t = \chi(T_1' - T_2') \\ \chi &= c_{v2} \rho_2 / \tau^*, \quad a_{(11)} = \rho_2 / \tau \end{aligned} \quad (6.3)$$

Будем считать коэффициенты $a_{(11)}$, c_{v2} , η , χ постоянными. Тогда решение уравнений (6.3), описывающее изменение скорости и температуры жидкой фазы в волне, имеет вид

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{1 + (a_{(12)} \eta \tau^2 \omega k / \rho_2)}{1 + \omega^2 \tau^2} v_{10} \cos(kx - \omega t) - \frac{\omega t - (a_{(12)} \eta \tau k / \rho_2)}{1 + \omega^2 \tau^2} v_{10} \sin(kx - \omega t) \\ T_2' &= \frac{T_{10}}{1 + \omega^2 \tau^{*2}} \cos(kx - \omega t) - \frac{T_{10} \omega \tau^*}{1 + \omega^2 \tau^{*2}} \sin(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Трение и обмен энергией между компонентами, возникающие вследствие разницы скоростей и температур компонент и теплопроводность приводят к диссипации энергии звуковой волны, в связи с чем звук поглощается. Будем считать, что распространяется звуковая волна заданной действительной частоты. Тогда интенсивность волны падает с проиленным расстоянием по закону $\exp(-2\delta x)$, амплитуда волны уменьшается по закону $\exp(-\delta x)$. Нетрудно видеть, что [19]

$$\delta = \frac{|\dot{\Sigma}|}{(2a\bar{\Sigma})}, \quad \dot{\Sigma} = - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial S} \right) \dot{S} = - TS \quad (6.5)$$

Здесь Σ — механическая энергия звуковой волны, $\dot{\Sigma}$ — изменение энергии звуковой волны со временем; $\partial \Sigma / \partial S$ — температура, которую имела бы среда, если бы она находилась в состоянии термодинамического равновесия; черта сверху означает осреднение по времени.

Используя теорему о том, что во всякой системе совершающей малые колебания, среднее во времени значение полной потенциальной энергии равно среднему значению полной кинетической энергии, можно написать

$$\bar{\Sigma} = \int_{\tau} \overline{\rho v^2} d\tau \approx \int_{\tau} \overline{\rho_i v_i^2} d\tau = \frac{1}{2} \rho_i v_{10}^2 \tau \quad (6.6)$$

Здесь интегрирование ведется по всему объему τ , занимаемому двухфазной средой. Формула для необратимой энтропии (1.15) в рамках принятых предположений имеет вид

$$S = \int_{\tau} [a_{(11)} * (v_2' - v_1')^2 + \gamma_{(11)} * (T_2' - T_1')^2 + a_{22} * (\nabla T_1')^2] d\tau \quad (6.7)$$

Используя формулы (6.1), (6.4) и осредняя выражение (6.7) по времени, получим окончательно

$$\begin{aligned} \bar{S} = & \frac{v_{10}^2}{2} \left\{ \frac{a_{(11)} *}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2} \left[\left(\frac{a_{(12)} \eta \tau^2 \omega k}{\rho_2} - \omega^2 \tau^2 \right)^2 + \left(\frac{a_{(12)} \eta \tau k}{\rho_2} - \omega \tau \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + (1 + \omega^2 \tau^2)^{-1} \gamma_{(11)} * \eta^2 \omega^2 \tau^2 + a_{(22)} * \eta^2 k^2 \right\} \tau \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из формул (6.5), (6.6), (6.8) нетрудно получить выражение для декремента затухания δ . Ясно, что это выражение будет справедливо, когда δ мало — относительное убывание амплитуды на расстояниях порядка длины волны должно быть невелико [19].

Отметим специфический механизм поглощения, который уже встречался при изучении распространения звука в двухфазной системе [20] и в многокомпонентной плазме с разными температурами компонент [21, 22]. Этот механизм состоит в обмене энергией между компонентами, поскольку ввиду различия термодинамических свойств фаз изменение температур компонент при прохождении звуковой волны различно. Наличие фазовых превращений даст дополнительное затухание, которое вычисляется аналогично проделанному выше.

Институт механики МГУ
Институт высоких температур
АН СССР

Поступило 30 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

- Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электротидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
- Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
- Марон В. И., Медведев В. А. К выводу уравнений энергии взаимопроникающих движений газовых сред. Вестн. МГУ, Сер. 1, Матем. и механ. 1963, № 1.
- Крайко А. Н., Стерин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
- Нигматулин Р. И. Уравнение гидродинамики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
- Нигматулин Р. И. Некоторые соотношения неравновесной термодинамики для двухтемпературного и двухскоростного газа с фазовыми переходами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
- Нигматулин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. ПММ, 1970, вып. 6.
- Trezek G. J., France D. M. One-dimensional particulate electrogasdynamics. AIAA Journal, 1970, vd. 8, No. 8. (Рус. перев.: Одномерная электротермодинамика с частицами. Ракетная техника и космонавтика, 1970, № 8.)

9. Marks A., Baretto E., Chu C. K. Charged aerosol converter. AIAA Journal, 1964, vд. 2, No. 1. (Руск. перев.: Преобразователь энергии на заряженных аэрозолях. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 1.)
10. Felici N. J. Physical background and performance of a supersonic electroaerodynamic high voltage generator. Proc. Internat Sympos. on electrohydrodynamics. March — April, 1969.
11. Клячко Л. С. Уравнение движения пылевых частиц в пылеприемных устройствах. Отопление и вентиляция, 1934, № 4.
12. Фукс Н. А. Механика аэрозолей. М., Изд-во АН СССР, 1955.
13. Keggebrok I. L. Conducting in Gases with Elevated electron temperature. Proc. 2d Sympo on the Engng. Asp. of M.H.D. Univ. Pennsylvania, March, 1961.
14. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Исследование электрогазодинамических течений при больших электрических числах Рейнольдса. ПМТФ, 1969, № 1.
15. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Одномерные течения в электрогидродинамике. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
16. Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
17. Гогосов В. В. Одномерные электрогидродинамические течения с переменным коэффициентом подвижности. Скачки испарения и конденсации. ПММ, 1972, в 4.
18. Гогосов В. В., Полянский В. А. О слабых волнах, характеристиках и задаче об обтекании тонкого профиля в электрогидродинамике. МЖГ, 1972, № 3.
19. Ландау Л. Д., Лишшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
20. Исаакович М. А. О распространении звука в эмульсиях. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 10.
21. Брагинский С. Н. Явления переноса в плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, М., Атомиздат, 1963.
22. Гогосов В. В. О затухании слабых волн в неизотермической плазме. Доклад на 3-й конференции по магнитной гидродинамике и динамике плазмы. Тезисы конференций. Вопросы магнитной гидродинамики, т. 4, АН Латв. ССР, Рига, 1964.