

УДК 532.526.2:538.4

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ ПОЛНОСТЬЮ ИОНИЗОВАННОЙ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ НА НЕПРОВОДЯЩЕЙ СТЕНКЕ МГД КАНАЛА

В. М. КОРОВИН

(Москва)

В связи с исследованием теплообмена на стенках магнитогидродинамических устройств все большее внимание стали привлекать задачи учета и оценки влияния двухтемпературности плазмы на процессы вблизи стенок. Появилось несколько работ, в которых методом локальной автомодельности проведен расчет течения двухтемпературной частично ионизованной плазмы в пограничных слоях. Однако исследовались лишь частные случаи. Пограничные слои на непроводящей стенке МГД канала изучались в области, где магнитное поле и электрический ток отсутствуют [1]. Задача о пограничных слоях на электроде рассматривалась в упрощенной постановке — в уравнении энергии для электронной компоненты не учитывались конвективные члены [2], или для вычисления температуры электронов использовалась формула Керреброка [3]. Исследовались также пограничные слои полностью ионизованной двухтемпературной плазмы при обтекании электрода в случае, когда температуры компонент вдоль канала не изменяются [4, 5].

В данной работе изучается течение двухтемпературной плазмы в пограничных слоях на непроводящей стенке канала в присутствии электрического и магнитного полей. При этом используется полное уравнение энергии для электронной компоненты [6]; учитывается также изменение параметров внешнего потока. В аналогичной постановке задача о пограничных слоях на электроде рассматривалась в работе [7].

1. Исходные уравнения. Характерной чертой полностью ионизованной плазмы является малая величина отношения (порядка $\epsilon = m_e/m_i$, где m_e , m_i — массы электрона и иона) плотностей составляющих ее компонент. В силу этого можно считать, что плотность плазмы равна плотности ионной компоненты $\rho = m_i n_i$, а средняя массовая скорость совпадает со скоростью ионного газа

$$\mathbf{v} = \rho^{-1}(m_e n_e \mathbf{v}_e + m_i n_i \mathbf{v}_i) \approx \mathbf{v}_i$$

Для описания явлений, протекающих в двухтемпературной полностью ионизованной квазинейтральной плазме, воспользуемся системой уравнений, полученных в работах [6, 8], при этом эффектом Холла, а также анизотропией коэффициентов переноса будем пренебрегать

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_\alpha \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p_i}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{5}{2} p_i \mathbf{v} + \mathbf{q}_i \right) = \mathbf{v} \cdot \nabla p_i - \pi_{\alpha\beta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \gamma (T_e - T_i) \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial p_e}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{5}{2} p_e \mathbf{v} - \frac{5}{2e} T_e \mathbf{j} + \mathbf{q}_e \right) &= \mathbf{v} \cdot \nabla p_e + \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \\ &- \frac{1}{en_e} \mathbf{j} (\nabla p_e + \beta \nabla T_e) - \gamma (T_e - T_i) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$p = p_e + p_i, \quad p_e = n_e T_e, \quad p_i = n_i T_i \quad (1.5)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e \right) \quad (1.6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.7)$$

$$\mathbf{q}_i = -\kappa_i \nabla T_i, \quad \mathbf{q}_e = -\kappa_e \nabla T_e - \frac{\beta}{en_e} T_e \mathbf{j}$$

Индексом e обозначены величины, относящиеся к электронам, индексом i — к ионам.

Предполагается, что температуры компонент не слишком сильно различаются между собой ($T_e/T_i \ll e^{-1/6}$) и градиенты плотности тока много меньше градиентов средней массовой скорости. Легко показать, что в этом случае тензор вязких напряжений для смеси $\pi_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\pi_{\alpha\beta} = -\mu \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{v} \right), \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

При записи уравнения энергии для электронной компоненты (1.4) нагревом за счет вязкости электронов пренебрегается. Так как при этом используются средняя массовая скорость и плотность тока, то наряду с конвективным потоком $2.5p_e \mathbf{v}$ в уравнение (1.4) входит также диффузионный поток энтальпии электронов $2.5e^{-1} T_e \mathbf{j}$, переносимой электрическим током. Члены $\gamma(T_e - T_i)$ в уравнениях (1.3), (1.4) описывают обмен энергией между электронами и ионами при упругих столкновениях. Заметим, что члены $e^{-1} n_e^{-1} \mathbf{j} \cdot \nabla p_e$ и $\beta e^{-1} n_e^{-1} \mathbf{j} \cdot \nabla T_e$ в правой части уравнения энергии для электронов изменяют знак с изменением направления тока или градиентов ∇p_e , ∇T_e . Первый из них представляет собой работу сил электронного давления при протекании тока, а второй связан с эффектом Томсона [9]. Эффективное электрическое поле, входящее в закон Ома (1.6), определяется электрическим полем $\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$ в собственной системе координат и силой электронного давления $e^{-1} n_e^{-1} \nabla p_e$.

Ограничимся рассмотрением однократно ионизованной плазмы. В этом случае коэффициенты переноса имеют вид

$$\begin{aligned} \kappa_e &= 3.1616 m_e^{-1} n_e T_e \tau_e, & \kappa_i &= 3.906 m_i^{-1} n_i T_i \tau_i, & \mu &= 0.96 n_i T_i \tau_i \\ \beta &= 0.711 n_e, & \sigma &= 1.9497 m_e^{-1} e^2 n_e \tau_e, & \gamma &= 3 n_e e \tau_e^{-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\tau_e = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{m_e}{2\pi}} \frac{T_e^{3/2}}{\lambda e^4 n_i}, \quad \tau_i = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{m_i}{\pi}} \frac{T_i^{3/2}}{\lambda e^4 n_i}$$

$$\lambda = \ln \left(\frac{3}{4e^3} \sqrt{\frac{T_e T_i (T_e + T_i)}{\pi n_e}} \right)$$

2. Постановка задачи о пограничном слое. Рассмотрим течение плазмы в МГД канале со сплошными электродами, изолированными друг от друга непроводящими стенками (фиг. 1). Ось x направлена вдоль канала, ось y перпендикулярна электродам. Противоположные стенки канала параллельны между собой. К электродам от внешнего источника приложена некоторая разность потенциалов. Считаем, что плазма поступает в канал с постоянным по сечению распределением скорости плотности и температур

компонент. Обозначим через H_1 магнитное поле, создаваемое полным током, протекающим между электродами. Предполагается, что имеется внешнее поле H_2 , распределенное таким образом, чтобы в области, ограниченной стенками канала, суммарное поле $H = H_1 + H_2$ было однородно и направлено вдоль оси z нормально непроводящим стенкам. В тех случаях, когда $E \sim c^{-1}vH$, а магнитное число Рейнольдса $R_m \ll 1$, индуцированным полем H_1 можно пренебречь [10] и считать, что H_2 однородно и имеет лишь составляющую вдоль оси z .

Будем считать, что вдали от стенок в ядре потока градиенты скорости и температур компонент малы по сравнению с градиентами у стенок, так что рассматриваемое течение можно разделить на внешнее течение невязкой и нетеплопроводной среды и узкие пограничные слои, в которых существенную роль играют процессы вязкости и теплопроводности. Рассмотрим течение вблизи стенок канала. Пусть δ_μ — толщина вязкого пограничного слоя, а δ_i, δ_e — толщины температурных пограничных слоев ионов и электронов, причем $\delta_\mu/L \ll 1, \delta_i/L \ll 1, \delta_e/L \ll 1$, где L — характерный размер вдоль пограничных слоев — длина канала. В пограничных слоях силы вязкости в уравнении движения и диссипативные члены в уравнениях энергии имеют тот же порядок величины, что и конвективные члены. Приравнявая порядки соответствующих величин, легко оценить толщины пограничных слоев

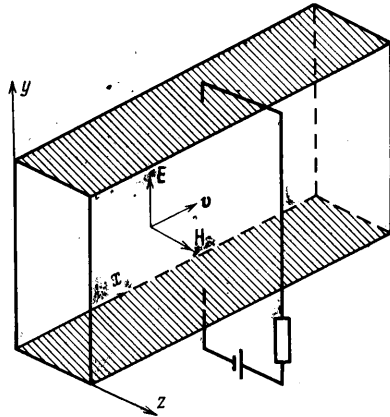
$$\delta_\mu \sim LR^{-1/2}, \quad \delta_i \sim L(\text{Pr}_i R)^{-1/2}$$

$$\delta_e \sim L(\text{Pr}_e R)^{-1/2}$$

$$R = \rho_0 v_0 L / \mu_0, \quad \text{Pr}_i = c_p \kappa_i / \mu,$$

$$\text{Pr}_e = c_p \kappa_e^0 / \mu_0 \sim \varepsilon^{1/2} (T_i^0 / T_e^0)^{3/2}$$

$$c_p = 2.5 / m_i$$



Фиг. 1

Здесь R — характерное число Рейнольдса, Pr_i — число Прандтля ионной компоненты, Pr_e — число Прандтля электронной компоненты, c_p — теплоемкость ионного газа при постоянном давлении.

Индексом нуль здесь и в дальнейшем отмечаются значения параметров на входе в канал. В рассматриваемом случае для полностью ионизованной двухтемпературной плазмы $\text{Pr}_i = 0.61$, а $\text{Pr}_e \ll 1$. Таким образом, если $(\text{Pr}_e R)^{1/2} \gg 1$, то вблизи стенок могут существовать узкие пограничные слои — вязкий и температурные пограничные слои ионов и электронов. Если же $R^{1/2} \gg 1$, а $(\text{Pr}_e R)^{1/2} \ll 1$, то по-прежнему можно выделить вязкий и температурный пограничный слой ионов, однако электронную теплопроводность требуется учитывать во всей области течения. В дальнейшем будем рассматривать течения с таким диапазоном параметров, когда $(\text{Pr}_e R)^{1/2} \gg 1$. Пользуясь малостью отношения $\delta_e/L \ll 1$, проведем оценки в исходных уравнениях. Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} x &= x^* L, \quad z = z^* L (\text{Pr}_e R)^{-1/2}, \quad \rho = \rho^* \rho_0, \quad v_x = v_x^* v_0, \quad v_z = v_z^* v_0 (\text{Pr}_e R)^{-1/2} \\ n_k &= n_k^* n_k^0, \quad T_k = T_k^* T_i^0, \quad p_k = p_k^* \rho_0 v_0^2, \quad p = p^* \rho_0 v_0^2, \quad \sigma = \sigma^* \sigma_0 \\ \mathbf{j} &= c^{-1} \sigma_0 v_0 H \mathbf{j}, \quad \mathbf{E} = c^{-1} v_0 H \mathbf{E}^*, \quad \mu = \mu^* \mu_0, \quad \kappa_i = \kappa_i^* \kappa_i^0, \quad \gamma = \gamma^* \gamma_0 \quad (2.1) \\ \kappa_e &= \kappa_e^* \kappa_e^0 \quad (k = e, i) \end{aligned}$$

Предполагается, что вблизи непроводящих стенок все величины зависят только от x и z . Подставляя выражения (2.1) в уравнения (1.1)–(1.4) и пренебрегая членами порядков $(Pr_e R)^{-1/2}$, $(Pr_e R)^{-1}$, $(Pr_i R)^{-1}$, R^{-1} , $Pr_e^{-1} R^{-2}$ получаем (в размерных переменных)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \frac{1}{c} j_y H \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} n_i v_x \frac{\partial T_i}{\partial x} + \frac{5}{2} n_i v_z \frac{\partial T_i}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_i \frac{\partial T_i}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + v_x \frac{\partial p_i}{\partial x} + \\ + v_z \frac{\partial p_i}{\partial z} + \gamma (T_e - T_i) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} n_e v_x \frac{\partial T_e}{\partial x} + \frac{5}{2} n_e v_z \frac{\partial T_e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_e \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) + v_x \frac{\partial p_e}{\partial x} + v_z \frac{\partial p_e}{\partial z} + \\ + \frac{j_y^2}{\sigma} - \gamma (T_e - T_i) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Сила вязкости в уравнении движения (2.3) и диссипативные члены в уравнении энергии для ионов (2.4) вне вязкого и температурного пограничного слоя ионов малы (порядка Pr_e). Однако эти члены оставлены, поскольку в дальнейшем полученные уравнения используются для расчета течения как в электронном, так и в более узких ионном и вязком пограничных слоях. Плотность тока и поле E_z вблизи стенок определяются из закона Ома (1.6)

$$E_z = -\frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial z}, \quad j_y = \sigma \left(E_y - \frac{1}{c} v_x H \right) \quad (2.6)$$

При записи последнего выражения вкладом сил электронного давления пренебрегается. Так как рассматривается течение в канале со сплошными параллельными электродами, то из первого уравнения (1.7) следует: $E_y = \text{const}$.

Первое уравнение (2.2) показывает, что давление смеси не изменяется поперек пограничных слоев, т. е. является функцией только продольной координаты. Ввиду этого задача о пограничном слое отделяется от задачи о внешнем течении и применима следующая схема расчета:

1) рассчитывается ядро потока — используется одномерная система уравнений и находится распределение по длине канала газодинамических параметров $v_{x\infty}$, $T_{i\infty}$, $T_{e\infty}$, p_∞ ;

2) рассчитываются температуры компонент и скорость в пограничных слоях, при этом в уравнение движения (2.3) подставляется найденная функция p_∞ , а распределения $v_{x\infty}$, $T_{i\infty}$, $T_{e\infty}$ используются в качестве граничных условий при $z \rightarrow \infty$.

Зная температуры компонент в пограничных слоях и давление в ядре потока, легко определить плотность и парциальные давления. Из уравнений (1.5) и первого уравнения (2.2) находим

$$\rho = \frac{m_i p_\infty}{T_e + T_i}, \quad p_k = p_\infty \frac{T_k}{T_e + T_i} \quad (2.7)$$

В дальнейшем, там, где могут возникнуть недоразумения, значения параметров в ядре потока отмечаются индексом ∞ . Пользуясь последними

формулами, легко показать, что в двухтемпературной плазме градиенты парциальных давлений поперек пограничных слоев отличны от нуля [7].

Систему уравнений (2.2)–(2.6) будем интегрировать при следующих граничных условиях:

$$v_x = v_{x\infty}, \quad T_i = T_{i\infty}, \quad T_e = T_{e\infty} \quad (z \rightarrow \infty) \quad (2.8)$$

$$v_x = v_z = 0, \quad T_i = T_{iw}, \quad \alpha_1 \frac{\partial T_e}{\partial z} = \alpha_2 (T_e - T_{ew}) \quad (z = 0)$$

где величины α_1 и α_2 зависят как от параметров плазмы вблизи стенки, так и от свойств стенки; индексом w отмечаются значения величин на стенке. Рассмотрим два предельных случая:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 \neq 0: \quad T_e = T_{ew} \quad (2.9)$$

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 = 0: \quad (\partial T_e / \partial z)_w = 0 \quad (2.10)$$

Считается при этом, что изменение потенциала в слое пространственного заряда у стенки можно не учитывать.

3. Внешнее течение. При исследовании течения невязкой и нетеплопроводной плазмы в ядре потока будем предполагать, что все величины зависят лишь от продольной координаты x , а скорость направлена вдоль оси канала. Распределения газодинамических параметров, необходимые для расчета течения в пограничных слоях, находятся путем численного интегрирования следующей системы уравнений:

$$\rho v_x = \rho_0 v_0, \quad \rho v_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{dp}{dx} + j_y H, \quad p = p_e + p_i \quad (3.1)$$

$$\frac{5}{2} n_i v_x \frac{dT_i}{dx} = v_x \frac{dp_i}{dx} + \gamma (T_e - T_i), \quad p_i = n_i T_i, \quad p_e = n_e T_e \quad (3.2)$$

$$\frac{5}{2} n_e v_x \frac{dT_e}{dx} = v_x \frac{dp_e}{dx} + j_{y\infty} \left(E_y - \frac{1}{c} v_x H \right) - \gamma (T_e - T_i) \quad (3.3)$$

$$j_{y\infty} = \sigma_\infty \left(E_y - \frac{1}{c} v_{x\infty} H \right), \quad E_y = \text{const}, \quad H = \text{const} \quad (3.4)$$

Переходя к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad P = \frac{P}{\rho_0 v_0^2}, \quad P_k = \frac{P_k}{\rho_0 v_0^2}, \quad J_{y\infty} = \frac{c j_{y\infty}}{\sigma_0 v_0 H}, \quad \theta_k = \frac{T_k}{T_i^0}, \quad V = \frac{v_x}{v_0}$$

$$\theta = \theta_e + \theta_i, \quad M_0 = \sqrt{\frac{3}{5} \frac{\rho_0 v_0^2}{p_0}}, \quad K = \frac{c E_y}{v_0 H}, \quad S = \frac{\sigma_0 H^2 L}{c^2 \rho_0 v_0}, \quad \Omega_0 = \frac{e H \tau_e^0}{m_e c}$$

и разрешая уравнения (3.1)–(3.3) относительно производных, получаем

$$V' = \frac{S J_{y\infty}}{P} \frac{V - 0.4K}{M^2 - 1} \quad (3.5)$$

$$\theta_i' = \frac{2}{3} \frac{S \theta_i}{P} \frac{J_{y\infty}}{V} \frac{0.4K - V}{M^2 - 1} + \frac{1.0258S}{\Omega_0^2} \frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} (\theta_e - \theta_i) \quad (3.6)$$

$$\theta_e' = \frac{10}{9} \frac{S J_{y\infty} M^2 \theta}{V^2} (K - V) + \frac{2}{3} \frac{S \theta_e}{P} \frac{J_{y\infty}}{V} \frac{0.4K - V}{M^2 - 1} - \frac{1.0258S}{\Omega_0^2} \frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} (\theta_e - \theta_i) \quad (3.7)$$

где штрих означает дифференцирование по ξ .

Плотность тока, текущее число Маха, суммарное и парциальные давления вычисляются по формулам

$$J_{y\infty} = \frac{\sigma_\infty}{\sigma_0}(K - V), \quad M = M_0 V \left(\frac{\theta_e^\circ + 1}{\theta} \right)^{1/2}, \quad P = \frac{3}{5} \frac{V}{M^2}, \quad P_k = \frac{P\theta_k}{\theta}$$

Коэффициенты переноса (1.8) в безразмерном виде записываются следующим образом:

$$\frac{\sigma_\infty}{\sigma_0} = \left(\frac{\theta_e}{\theta_e^\circ} \right)^{3/2} \frac{\lambda_0}{\lambda_\infty}, \quad \frac{\gamma_\infty}{\gamma_0} = \frac{1}{V^2} \left(\frac{\theta_e^\circ}{\theta_e} \right)^{3/2} \frac{\lambda_\infty}{\lambda_0}$$

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} = 1 + \frac{1}{2\lambda_0} \ln \frac{\theta_e \theta_i \theta V}{\theta_e^\circ (\theta_e^\circ + 1)}$$

При интегрировании системы (3.5) — (3.7) кроме граничных условий требуется задавать пять параметров: начальное число Маха M_0 , коэффициент нагрузки K , параметр взаимодействия S , а также число Холла Ω_0 и кулоновский логарифм λ_0 на входе в канал.

Нетрудно показать, что изменение скорости и числа Маха вдоль канала качественно отражает диаграмма Реслера — Сирса [14]. Будем рассматривать ускорительные режимы течения ($E_{yjy} > 0$), при которых с помощью электромагнитных эффектов — силы Лоренца и джоулева нагрева — к потоку подводится энергия таким образом, что происходит ускорение и рост числа Маха на срезе канала (по сравнению с M_0). В плоскости M, v_x на диаграмме Реслера — Сирса этому требованию отвечают область $2Da$ ($0 < M < 1, 0 < v_x < u_4$ — дозвуковые скорости) и области $1B: M > 1, u_2 < v_x < u_3$; $1C: M > 1, u_1 < v_x < u_2$ — сверхзвуковые течения. Здесь введены следующие обозначения:

$$u_1 = \frac{2}{5} u_3, \quad u_2 = \frac{3 + 5M^2}{15 + 5M^2} u_3, \quad u_3 = \frac{cE_y}{H}, \quad u_4 = \frac{8M^2}{15 + 5M^2} u_3$$

В рассматриваемых режимах при заданном M_0 коэффициент нагрузки не может задаваться произвольно. Легко получить, что $K > u_3/u_4$ при фиксированном M_0 в случае $2Da$ $1 < K < u_3/u_2$ в случае $1B$, $u_3/u_2 < K < 2.5$ в случае $1C$.

В силу определения безразмерных величин V, θ_i и θ_e начальные условия на входе в канал имеют вид

$$V = 1, \quad \theta_i = 1, \quad \theta_e = \theta_e^\circ \quad \text{при} \quad \xi = 0 \quad (3.8)$$

Из диаграммы Реслера — Сирса следует, что в случае $2Da$ при фиксированных M_0 и K величина параметра взаимодействия не может превышать некоторое критическое значение, определяемое условием записания

$$M = 1 \quad \text{при} \quad \xi = 1. \quad (3.9)$$

При расчете дозвуковых течений, соответствующих случаю $2Da$, будем находить решение системы (3.5) — (3.7), удовлетворяющее условиям (3.8), (3.9), т. е. будем рассматривать дозвуковые режимы с максимальным параметром взаимодействия, допустимым при данном начальном числе Маха и коэффициенте нагрузки.

Система (3.5) — (3.7) с начальными условиями (3.8) интегрировалась численно. Рассматривалось течение литиевой плазмы при следующих значениях параметров:

$$T_e^\circ = 10\,000^\circ \text{ К}, \quad T_i^\circ = 2500^\circ \text{ К}, \quad n_i^\circ = 10^{14} \text{ см}^{-3} \quad (3.10)$$

$$v_0 = 10^6 \text{ см/сек}, \quad H = 100 \text{ гс}, \quad L = 11.3 \text{ см}, \quad E_y = 1.1, 1.5, 1.8 \text{ в/см}$$

что соответствует сверхзвуковому режиму.

$$M_0 = 2.0009, \quad S = 2.3036, \quad \Omega_0 = 0.8285, \quad \lambda_0 = 5.8473$$

$$\theta_e^\circ = 4, \quad K = 1.1, 1.5 \text{ (случай } 1B) \quad K = 1.8 \text{ (случай } 1C)$$

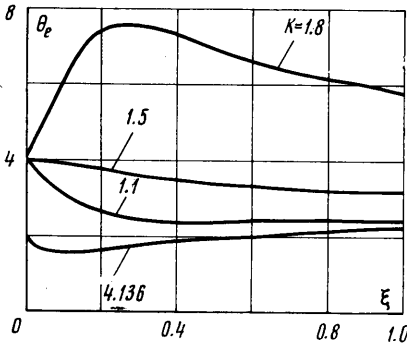
Дозвуковое течение рассматривалось при следующих условиях:

$$T_e^\circ = 10\,000^\circ\text{K}, \quad T_i^\circ = 5000^\circ\text{K}, \quad n_i^\circ = 10^{15}\text{ см}^{-3}, \quad v_0 = 4 \cdot 10^5\text{ см/сек}$$

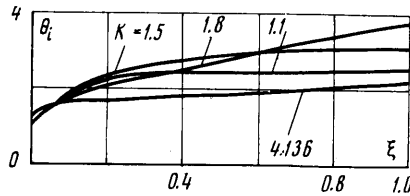
$$H = 100\text{ эс}, \quad E_y = 1.65\text{ в/см} \quad (3.11)$$

Запирание потока происходило на длине $L = 3.5\text{ см}$ и было получено $S = 0.2242$, $M_0 = 0.7306$, $K = 4.136$, $\Omega_0 = 0.0944$, $\lambda_0 = 5.1338$, $\theta_e^\circ = 2$

На фиг. 2, 3 представлены найденные распределения температур θ_e и θ_i . При рассматриваемых параметрах обмен энергией между электронами и ионами — второй член в правой части уравнения энергии для ионов (3.6) — превышает работу сил ионного давления (первый член), вследствие чего температура ионов возрастает. Передача энергии ионам и работа сил электронного давления вызывают падение электронной температуры. С увеличением электрического поля джоулев нагрев — первый член в правой части уравнения (3.7) — увеличивается и температура электронов возрастает. Указанные механизмы определяют поведение разности температур компонент $\Delta\theta_{ei} = \theta_e - \theta_i$. Как видно из графиков, на начальном участке течения в слое, длина которого порядка Ω_0^2/S (γ — слой [12, 13]), происходит релаксация разности температур, заданной на входе в канал. При этом величина $\Delta\theta_{ei}$ изменяется до значения, определяемого совместным действием конвективного переноса



Фиг. 2



Фиг. 3

энергии электронов и ионов, джоулева нагрева, обмена энергией между компонентами и работой сил парциальных давлений. Распределение скорости и характер изменения числа Маха вдоль канала качественно соответствуют диаграмме Реслера — Сирса. В сверхзвуковом режиме — случаи 1B и 1C — с ростом ξ скорость V асимптотически стремится к величине K , так что по мере удаления от входа в канал $J_{y\infty}$ падает и влияние электромагнитного поля на течение уменьшается.

4. Преобразование уравнений пограничных слоев. Принимая во внимание, что суммарное давление не изменяется поперек пограничных слоев, и учитывая второе выражение (3.1), перепишем уравнение движения (2.3)

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \rho_\infty v_{x\infty} \frac{dv_{x\infty}}{dx} + \frac{1}{c} H (j_y - j_{y\infty}) \quad (4.1)$$

По формулам (2.1) перейдем к величинам J_y , μ^* , κ_h^* , γ^* , σ^* и введем также следующие безразмерные переменные: $n = \rho / \rho_\infty = n_h / n_{h\infty}$, $u = v_x / v_{x\infty}$, $v = v_z / v_{z\infty}$, $\vartheta_h = T_h / T_{h\infty}$

$$\vartheta = \theta_e \vartheta_e + \theta_i \vartheta_i, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \sqrt{\frac{\rho_0 v_0}{\mu_0 x}} \int_0^z n dz$$

Переходя к функции тока f , легко показать

$$\begin{aligned} nu &= L \frac{\partial f}{\partial z}, \quad nv = -L \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \psi = \sqrt{\frac{R}{\xi}} f \\ v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z} &= v_{x\infty} L^{-1} \left[u \frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\psi}{2\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] \\ v_x \frac{\partial p_e}{\partial x} + v_z \frac{\partial p_e}{\partial z} &= p_{\infty} v_{x\infty} L^{-1} \left\{ \frac{\theta_e \theta_i}{\theta^2} \left[u \left(\theta_i \frac{\partial \theta_e}{\partial \xi} - \theta_e \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\psi}{2\xi} \right) \left(\theta_i \frac{\partial \theta_e}{\partial \eta} - \theta_e \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\theta_e \theta_i u}{\theta^2} (\theta_i \theta_e' - \theta_e \theta_i') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta_e \theta_e u}{\theta} \left(\frac{\theta'}{\theta} - \frac{V'}{V} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Формула, выражающая $v_x \partial p_i / \partial x + v_z \partial p_i / \partial z$ через температуры компонент и параметры внешнего течения, получается заменой индекса e на i в правой части предыдущего равенства. Принимая во внимание (4.2), преобразуем уравнения (4.1), (2.4)–(2.7). В результате получаем следующую систему для определения функций $\psi, u, \theta_e, \theta_i$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \\ \xi u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\psi}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu^* n \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\xi V' (1 - nu^2)}{V n} + \frac{\xi S}{nV} (J_y - J_{y\infty}) \\ \xi u \left(1 - \frac{2 \theta_e \theta_e}{5 \theta} \right) \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} - \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\psi}{2} \right) \left(1 - \frac{2 \theta_e \theta_e}{5 \theta} \right) \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta} &= \\ = \frac{1}{Pr_i} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\kappa_i^* n \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta} \right) + \frac{2 M^2 \theta \mu^* n}{3 \theta_i} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{2 \theta_e \theta_e}{5 \theta} \left[\xi u \frac{\partial \theta_e}{\partial \xi} - \right. \\ \left. - \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\psi}{2} \right) \frac{\partial \theta_e}{\partial \eta} \right] + \frac{2}{5} \xi u \theta_i \left[\frac{\theta_e \theta_e}{\theta} \left(\frac{\theta_i'}{\theta_i} - \frac{\theta_e'}{\theta_e} \right) + \frac{\theta'}{\theta} - \frac{V'}{V} \right] + \\ + \frac{0.6155 S \xi \gamma^*}{\Omega_0^2 \theta_i} \frac{\gamma^*}{n} (\theta_e \theta_e - \theta_i \theta_i) - \frac{\xi u \theta_i' \theta_i}{\theta_i} \\ \xi u \left(1 - \frac{2 \theta_i \theta_i}{5 \theta} \right) \frac{\partial \theta_e}{\partial \xi} - \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\psi}{2} \right) \left(1 - \frac{2 \theta_i \theta_i}{5 \theta} \right) \frac{\partial \theta_e}{\partial \eta} &= \\ = \frac{1}{Pr_e} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\kappa_e^* n \frac{\partial \theta_e}{\partial \eta} \right) + \frac{2 S \xi M^2 \theta J_y^2}{3 n V^2 \theta_e \sigma^*} - \frac{2 \theta_i \theta_e}{5 \theta} \left[\xi u \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} - \right. \\ \left. - \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\psi}{2} \right) \frac{\partial \theta_i}{\partial \eta} \right] + \frac{2}{5} \xi u \theta_e \left[\frac{\theta_i \theta_i}{\theta} \left(\frac{\theta_e'}{\theta_e} - \frac{\theta_i'}{\theta_i} \right) + \frac{\theta'}{\theta} - \frac{V'}{V} \right] - \\ - \frac{0.6155 S \xi \gamma^*}{\Omega_0^2 \theta_e} \frac{\gamma^*}{n} (\theta_e \theta_e - \theta_i \theta_i) - \frac{\xi u \theta_e' \theta_e}{\theta_e} \\ J_y = \sigma^* (K - uV), \quad n = \theta / \theta, \quad p_k^* = P \theta_k / \theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

Граничные условия (2.8) принимают вид

$$\eta = 0: \quad \psi = u = 0, \quad \theta_i = T_{iw} / T_i^{\circ} \theta_i, \quad \theta_e = T_{ew} / T_e^{\circ} \theta_e, \quad \text{либо } \partial \theta_e / \partial \eta = 0$$

$$\eta \rightarrow \infty: \quad u = 1, \quad \theta_i = 1, \quad \theta_e = 1 \quad (4.4)$$

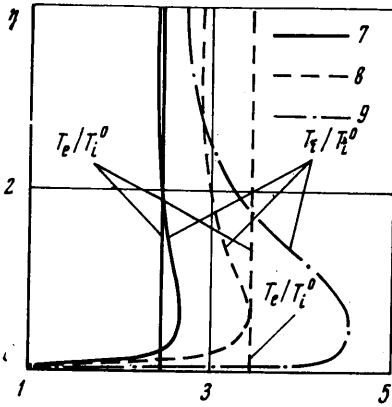
Для безразмерных коэффициентов переноса в пограничных слоях легко получить

следующие выражения:

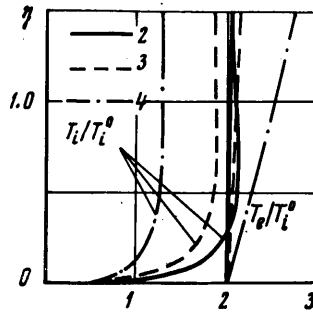
$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \left(\frac{\theta_e \theta_e}{\theta_e^\circ} \right)^{3/2} \frac{\lambda_0}{\lambda}, \quad \gamma = \left(\frac{n}{V} \right)^2 \left(\frac{\theta_e^\circ}{\theta_e \theta_e} \right)^{3/2} \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \frac{\kappa_e}{\kappa_e^\circ} = \left(\frac{\theta_e \theta_e}{\theta_e^\circ} \right)^{5/2} \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\kappa_i}{\kappa_i^\circ} = \frac{(\theta_e \theta_i)^{5/2}}{\lambda / \lambda_0}, \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + \frac{1}{2\lambda_0} \ln \frac{\theta_e \theta_i \theta_e \theta_i \theta^2 V}{\theta_e^\circ \theta (\theta_e^\circ + 1)}$$

5. Результаты расчетов. Краевая задача (4.3), (4.4) решалась итерационным методом последовательных прогонок [15]; расчеты проводились на вычислительной машине БЭСМ-6. В качестве характерных значений



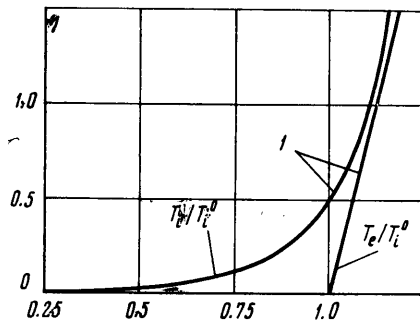
Фиг. 4



Фиг. 5

параметров были взяты величины (3.10), (3.11), при этом в сверхзвуковом режиме $R = 42\,073$, $Pr_e = 0.0003$, а в дозвуковом $R = 8112$, $Pr_e = 0.0017$. Ниже приводятся результаты расчетов, полученные при следующих условиях на стенке: $T_{iw} = 1250^\circ\text{K}$, $T_{ew} = 5000^\circ\text{K}$ (варианты 1, 2, 3, 4); $T_{iw} = 2500^\circ\text{K}$, $\partial T_e / \partial z = 0$ (вариант 5); $T_{iw} = 1250^\circ\text{K}$, $\partial T_e / \partial z = 0$ (варианты 6, 7, 8, 9). Варианты 1, 5, 6 соответствуют дозвуковому режиму течения в МГД канале при $K = 4.136$, а остальные — сверхзвуковым течениям при $K = 1.1$ (варианты 2, 7), при $K = 1.5$ (варианты 3, 8) и при $K = 1.8$ (варианты 4, 9).

На фиг. 4–6 представлены профили температур электронов и ионов вблизи стенки, полученные в сечении канала $\xi = 0.5$ при различных значениях коэффициента нагрузки. Анализ течения показывает, что вид граничных условий для температуры (2.9) и (2.10) существенно влияет на температуры электронов. При $(\partial T_e / \partial z)_w = 0$ температура электронов практически не изменяется поперек канала (фиг. 4), в то время как в случае заданного на стенке значения T_{ew} профиль температуры электронов носит четко выраженный характер, присущий пограничному слою (фиг. 5, 6).

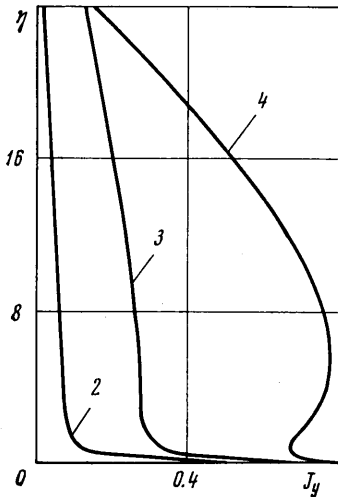


Фиг. 6

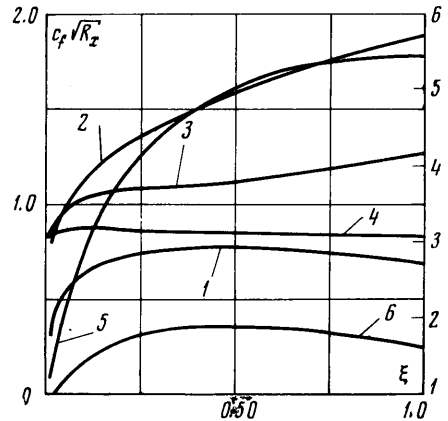
Из графиков видно, что в узком слое вблизи стенки (в δ — слое [12, 13, 14]) происходит релаксация разности температур компонент, заданной или вырабатываемой на стенке при тчении плазмы в канале. За счет интен-

сивного обмена энергий между компонентами температура ионов в δ -слое резко возрастает, в то время как температура электронов почти не изменяется поперек δ -слоя и остается равной своему значению на стенке. Расчеты показывают, что с удалением от стенки давление электронов в δ -слое резко падает. При этом поле E_z , вычисляемое из первого выражения (2.6), значительно превышает поле E_y , созданное внешним источником. Давление ионов с удалением от стенки резко возрастает, так что суммарное давление не изменяется ни поперек δ -слоя, ни поперек пограничных слоев.

Наряду с распределениями газодинамических параметров исследовалось распределение плотности тока J_y , протекающего между электродами.



Фиг. 7



Фиг. 8

На фиг. 7 построены характерные профили J_y , полученные в сверхзвуковом режиме при различных значениях параметра нагрузки в сечении $\xi = 0.5$. Анализ течения показывает, что при заданной разности потенциалов между электродами за счет торможения потока вблизи непроводящей стенки плотность тока существенно возрастает. При этом профиль J_y может иметь немонотонный характер.

По найденным профилям температур компонент и скорости вычислялись безразмерные параметры, характеризующие силу трения и теплообмен на стенках — коэффициент трения c_f и числа Нуссельта N_e , N_i , связанные с потоками тепла

$$q_{ew} = -\kappa_{ew} (\partial T_e / \partial z)_w, \quad q_{iw} = -\kappa_{iw} (\partial T_i / \partial z)_w$$

за счет электронной и ионной теплопроводности

$$c_f = \frac{2\mu_w (\partial v_x / \partial z)_w}{\rho_\infty v_{x\infty}^2} = \frac{2\mu_w^* n_w}{(\mu_\infty^* R_x)^{1/2}} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_w, \quad N_h = \frac{c_p q_{kw} x}{\kappa_{ew} (h_\infty - h_w)}$$

$$h = \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} + \frac{v_x^2}{2}, \quad R_x = \frac{\rho_\infty v_{x\infty} x}{\mu_\infty}, \quad \mu_\infty^* = \frac{\theta_i^{5/2}}{\lambda_\infty / \lambda_0}$$

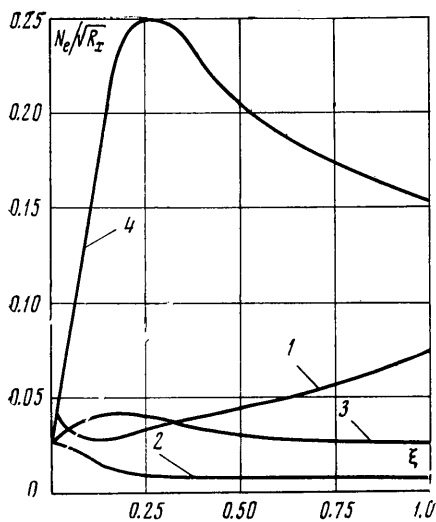
где R_x — текущее число Рейнольдса, а h — сумма энтальпии единицы массы и плотности кинетической энергии.

Числа Нуссельта легко выразить через безразмерные функции

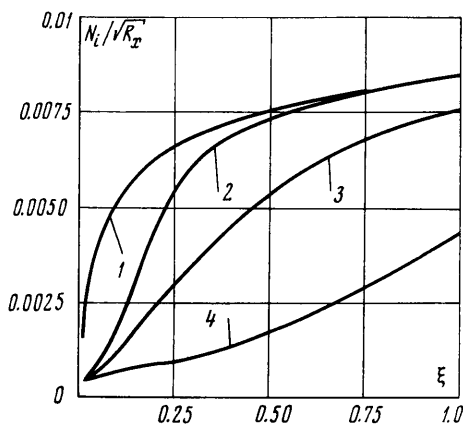
$$N_e = \frac{n_w \theta_e (\mu_\infty * R_x)^{1/2}}{\vartheta_w - \theta (1 + 1/3 M^2)} \left(\frac{\partial \vartheta_e}{\partial \eta} \right)_w$$

$$N_i = \frac{Pr_e}{Pr_i} \frac{\kappa_{iw} *}{\kappa_{ew} *} \frac{n_w \theta_i (\mu_\infty * R_x)^{1/2}}{\vartheta_w - \theta (1 + 1/3 M^2)} \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial \eta} \right)_w$$

На фиг. 8 представлены графики величины $c_i \sqrt{R_x}$ как функции ξ , полученные для граничных условий (2.9) и (2.10) при различных значениях коэффициента нагрузки и температуры ионов на стенке. Расчеты показы-



Фиг. 9



Фиг. 10

вают, что в сверхзвуковом режиме (кривые 2, 3, 4) с увеличением коэффициента нагрузки относительное изменение $c_i \sqrt{R_x}$ вдоль канала уменьшается. При увеличении температуры ионов на стенке вязкость, а вместе с ней и сила трения увеличивается, что соответствует поведению кривых 5, 6, для которых масштаб указан на правой стороне фиг. 8.

Распределения параметров $N_e / \sqrt{R_x}$, $N_i / \sqrt{R_x}$ при различных режимах работы канала даны на фиг. 9, 10. Резкое увеличение потока тепла за счет электронной теплопроводности, полученное на начальном участке канала при $K = 1.8$, связано с ростом в γ -слое перепада температуры электронов в ядре потока и на стенке. Из графиков видно, что в теплообмене на непроводящей стенке МГД канала преобладающую роль играют потоки тепла, обусловленные электронной теплопроводностью.

Автор благодарит В. В. Гогосова и А. Е. Якубенко за внимание к работе и ценные обсуждения.

Институт механики МГУ

Поступило 17 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Sherman A., Reshotko E. The nonequilibrium boundary layer along a channel wall. AIAA paper, 1968, No. 134. (AIAA 6-th Aerospace Sciences Meeting, N. Y., January 22—24, 1968).
2. Classey H. A. The laminar magnetogasdynamic electrode boundary layer of a thermal non-equilibrium plasma. In: Electricity from MHD, vol. 4, Vienna, 1968.

3. Oates G. C., Richmond J. K., Aoki Y., Grohs G. Loss mechanisms of a low temperature plasma accelerator. ARS Journal, 1962, vol. 32, No. 4.
4. Калихан Л. Е. Пограничный слой двухтемпературной плазмы на электродах магнитогидродинамического канала со скрещенными электрическими и магнитными полями при больших параметрах Холла. ПМТФ, 1969, № 3.
5. Калихан Л. Е. Приближенный метод расчета пограничного слоя двухтемпературной плазмы на электродах при больших значениях параметра Холла. ПМТФ, 1970, № 1.
6. Брагинский С. И. Явление переноса в плазме. Сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, М., Атомиздат, 1963.
7. Гогосов В. В., Коровин В. М. Решение уравнений пограничных слоев на электродах в полностью ионизованной плазме с разными температурами компонент. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
8. Гогосов В. В. О возможных упрощениях уравнений полностью ионизованной двухтемпературной плазмы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
10. Брагинский С. И. К МГД слабо проводящей жидкости. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 5 (11).
11. Neuringer J. L. Optimum power generation from a moving plasma. J. Fluid Mech. 1960, vol. 1, pt 2.
12. Resler E. L. Jr., Sears W. R. The prospects for magnetoaerodynamics. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, No. 4.
13. Гогосов В. В. Пограничные слои в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
14. Гогосов В. В. О пограничных слоях в двухтемпературной плазме. In: Electricity from MHD, vol. 2, Vienna, 1967.
15. Brown R. T., Mitchner M. Measurements in a two-temperature plasma boundary layer. AIAA paper, 1969, No. 692. (AIAA Fluid and Plasma Dynamics Conference. San Francisco, June 16—18, 1969.)
16. Браиловская И. Ю., Чудов Л. Е. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. Сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 1, М., Изд-во МГУ, 1962.