

УДК 517.9:532

ГИДРОДИНАМИКА В СЛАБЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ. О ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ

(Харьков)

Рассматривается плоская задача об определении частот и форм малых собственных колебаний идеальной жидкости в прямоугольном канале в условиях, близких к невесомости. Предполагается, что параллельно вертикальным стенкам канала действует слабое гравитационное поле. Применяется метод Ритца для вариационной задачи, эквивалентной задаче о колебаниях жидкости в условиях невесомости [1, 2].

1. Постановка задачи. Пусть идеальная несжимаемая жидкость плотности ρ частично заполняет прямоугольный канал (фиг. 1). На жидкость действует гравитационное поле интенсивности ng (n — коэффициент перегрузки, $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ — ускорение силы тяжести у поверхности Земли). Условимся считать, что при $n > 0$ поле направлено, как показано на фиг. 1, сверху вниз параллельно вертикальным стенкам канала.

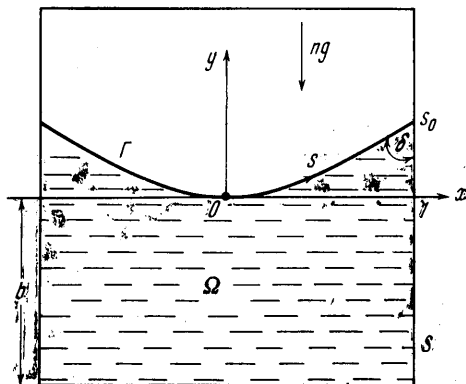
Будем рассматривать задачу о малых плоских колебаниях жидкости в канале под действием слабых гравитационных сил и сил поверхностного натяжения. Капиллярные силы, как известно, оказывают существенное влияние на процесс колебаний жидкости в условиях, близких к невесомости [2-6]. Применительно к рассматриваемой задаче «слабость» гравитационного поля означает, что безразмерное число Бонда $b = \frac{\rho n g l^2 \sigma^{-1}}$ есть величина порядка единицы (l — полуширина канала, σ — коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость — газ), т. е. гравитационные и поверхностные силы сравнимы между собой. (Напомним, что в обычных условиях $b \gg 1$.) Поэтому в положении равновесия свободная поверхность жидкости Γ искривлена и пересекает стенку сосуда S под углом смачивания δ .

Все дальнейшие рассуждения будем проводить в безразмерных переменных, выбрав в качестве характерного размера полуширину l канала. Тогда в декартовой системе координат область Ω , занятая жидкостью в положении равновесия, определяется неравенствами

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -h \leq y \leq y(x)$$

где h — глубина жидкости, $y = y(x)$ — уравнение поверхности Γ .

Как показано в [3], задача о колебаниях идеальной жидкости в неподвижном сосуде сводится к нахождению потенциала скорости $\Phi(x, y)$



Фиг. 1

и собственных чисел λ из следующих уравнений и краевых условий:

$$\Delta\Phi = 0 \quad (r \in \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (r \in S), \quad B \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \lambda\Phi \quad (r \in \Gamma) \\ \pm \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_{\Gamma} + \mu \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n} \right)_{\Gamma} = 0 \quad (s = \pm s_0) \quad (1.1)$$

Здесь r — радиус-вектор, $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали к области Ω , $\lambda = \rho\omega^2 l^3 \sigma^{-1}$ — собственное значение задачи (1.1), ω — частота колебаний жидкости (потенциал скорости и давление в жидкости в процессе свободных колебаний зависят от времени по закону $\exp(i\omega t)$), s — длина дуги на Γ , отсчитываемая от начала координат O ($-s_0 \leq s \leq s_0$), постоянная $\mu = k_0 \operatorname{ctg} \delta$, где $k_0 = k(s_0)$ — кривизна поверхности Γ на границе соприкосновения Γ с S , т. е. при $s = \pm s_0$.

В граничном условии (1.1) на Γ через B обозначен линейный оператор

$$Bu = (au - u'') - \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} (au - u'') ds, \quad a = a(s) = b \cos(\alpha) - [k(s)]^2 \quad (1.2)$$

где α — угол между нормалью n и осью y .

Как показано, например, в [3], это — самосопряженный неограниченный оператор, действующий в подпространстве H гильбертова пространства $L_2(\Gamma) = L_2(-s_0, s_0)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-s_0}^{s_0} u(s)v(s) ds$$

В H входят функции $u(s) = (\partial\Phi/\partial n)_{\Gamma}$, для которых выполнено граничное условие

$$\int_{-s_0}^{s_0} (\partial\Phi/\partial n)_{\Gamma} ds = \int_{-s_0}^{s_0} u(s) ds = 0$$

необходимое условие разрешимости задачи (1.1); оно физически означает, что объем жидкости при колебаниях сохраняется. Областью определения $D(B)$ оператора B служит множество функций $\{u(s)\} = D(B) \subset H$, имеющих вторые производные из $L_2(\Gamma)$ и удовлетворяющих граничным условиям

$$\pm du/ds + \mu u = 0 \quad (s = \pm s_0)$$

Оператор B ограничен снизу и имеет дискретный спектр, сгущающийся на $+\infty$ [3]. В [3-5] показано, что совокупность собственных форм колебаний задачи (1.1)

$$\{u_m(s)\}_{1^{\infty}}, \quad u_m(s) = (\partial\Phi_m/\partial n)_{\Gamma}$$

образует полную ортогональную систему функций в энергетическом пространстве H_B (см. [7]), а спектр дискретен, причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = +\infty$$

2. Вариационная формулировка задачи. Задачу (1.1) о малых колебаниях жидкости естественно рассматривать в случае, когда равновесная поверхность Γ устойчива. Задача об устойчивости жидкости в сосуде в общей постановке исследована в [8, 9], а применительно к конкретной плоской задаче — в [10]. Как показано в [9], границе области устойчивости равно-

весных состояний жидкости соответствуют такие параметры b и δ , при которых оператор B имеет нулевое собственное значение.

Будем предполагать в задаче о колебаниях, что оператор B положительно определен

$$(Bu, u) \geq \kappa \|u\|^2, \quad \kappa > 0 \quad (2.1)$$

тогда равновесная поверхность Γ будет устойчивой. Если выполнено условие (2.1), то оператор B имеет в пространстве H вполне непрерывный самосопряженный обратный оператор B^{-1} , и поэтому задачу (1.1) можно переписать в форме

$$\Delta \Phi = 0 \quad (r \in \Omega), \quad \partial \Phi / \partial n = 0 \quad (r \in S), \quad \partial \Phi / \partial n = \lambda B^{-1} \Phi \quad (r \in \Gamma) \quad (2.2)$$

Краевая задача (2.2) допускает эквивалентную вариационную формулировку [1, 2]. Легко убедиться, что собственные функции $\Phi(x, y)$ задачи (2.2) представляют собой экстремали функционала

$$I[\Phi] = \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 d\Omega \quad (2.3)$$

при дополнительном условии

$$(B^{-1}\Phi, \Phi) = 1 \quad (2.4)$$

Поэтому согласно методу неопределенных множителей Лагранжа вместо (2.3), (2.4) можно решать задачу об определении стационарных точек функционала

$$J[\Phi] = \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 d\Omega - \lambda (B^{-1}\Phi, \Phi) \quad (2.5)$$

Основной функционал (2.5) напоминает по форме функционал, который возникает в задаче о собственных колебаниях тяжелой (т. е. без учета поверхностных сил) идеальной жидкости [11], однако вместо оператора B^{-1} в этом случае стоит единичный оператор.

Как указано в [1], стационарные значения функционала (2.5) можно разыскивать не обязательно в классе гармонических функций, удовлетворяющих (естественному) условию Неймана

$$\partial \Phi / \partial n = 0 \quad (r \in S) \quad (2.6)$$

а на более широком множестве функций, имеющих конечный интеграл Дирихле (2.3).

3. Реализация метода Ритца. Задача (1.1) решается просто, если угол смачивания $\delta = 90^\circ$. В этом случае собственные функции $\Phi_m(x, y)$ и собственные значения λ_m находятся методом разделения переменных

$$\Phi_m(x, y) = \cos [{}^{1/2}\pi m(x+1)] \operatorname{ch} [{}^{1/2}\pi m(y+h)] \quad (3.1)$$

$$\lambda_m = {}^{1/2}\pi m [b + ({}^{1/2}\pi m)^2] \operatorname{th} ({}^{1/2}\pi m h) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.2)$$

Собственные формы колебаний

$$u_m(x) = (\partial \Phi_m / \partial y)_{y=0} = {}^{1/2}\pi m \operatorname{sh} ({}^{1/2}\pi m h) \cos [{}^{1/2}\pi m(x+1)]$$

разбиваются на два класса [11]: нечетноузловые, которые получаются из (3.1) при $m = 2p - 1$, $p = 1, 2, \dots$ и дают ненулевую результирующую силу на боковые стенки сосуда, и четноузловые ($m = 2p$, $p = 1, 2, \dots$),

для которых эта сила равна нулю. Нечетноузловым колебаниям отвечают нечетные относительно x функции

$$\Phi_p(x, y) = \sin [\pi(p - 1/2)x] \operatorname{ch} [\pi(p - 1/2)(y + h)] \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

а четноузловым — четные функции

$$\Phi_p(x, y) = \cos (\pi p x) \operatorname{ch} [\pi p (y + h)] \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

Кроме того, легко заметить, опираясь на теорию тригонометрических рядов Фурье, что обе совокупности форм колебаний

$$u_p(x) = (\partial \Phi_p / \partial y)_{y=0} \quad (p = 1, 2, \dots)$$

отвечающих функциям (3.3) и (3.4), образуют полные ортогональные системы в двух взаимно ортогональных подпространствах, на которые разбивается гильбертово пространство H

$$H = H_1 \oplus H_2 \quad (3.5)$$

В подпространство H_1 входят нечетные относительно x функции, а в H_2 — четные функции (из H).

Ортогональное разложение (3.5) и последнее утверждение о полноте системы собственных форм колебаний в подпространствах H_1 и H_2 сохраняется и в случае, когда свободная поверхность Γ симметрична относительно оси y (фиг. 1); при этом все рассматриваемые функции — элементы пространства H — будут зависеть от дуги s ($-s_0 \leq s \leq s_0$). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать две отдельные задачи (задача 1 и задача 2) об определении нечетноузловых (в H_1) и четноузловых (в H_2) форм колебаний и соответствующих им частот.

При решении вариационной задачи (2.5) воспользуемся методом Ритца [7]. Оператор B^{-1} в (2.5) — это интегральный оператор

$$(B^{-1}u)(s) = \int_{-s_0}^{s_0} G(s, z)u(z) dz, \quad u(s) \in H \quad (3.6)$$

ядро которого есть функция Грина такой задачи:

$$Bu = f, \quad \pm du / ds + \mu u = 0 \quad (s = \pm s_0, u, f \in H)$$

В качестве системы координатных функций метода Ритца для симметричной криволинейной поверхности Γ при произвольном угле смачивания $\delta \neq 90^\circ$ выберем набор функций

$$f_p(x, y) = c_p [\Phi_p(x, y) - d_p] \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

Здесь $\Phi_p(x, y)$ — функции (3.3) для задачи 1 и функции (3.4) для задачи 2, гармонические в области Ω и удовлетворяющие условию (2.6), c_p — нормировочные постоянные, которые выберем позднее. Постоянные d_p в (3.7) определяются из условия $(\Phi_p)_\Gamma - d_p \in H$, что приводит к равенствам

$$d_p = \frac{1}{2s_0} \int_{-s_0}^{s_0} (\Phi_p)_\Gamma ds \quad (p = 1, 2, \dots) \quad (3.8)$$

Заметим, что для функций (3.3) все d_p равны нулю.

Приближенное решение вариационной задачи (2.5) будем искать в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{r=1}^M a_r f_r(x, y)$$

где a_p — неизвестные постоянные, а $f_p(x, y)$ — функции (3.7). Необходимые условия стационарности функционала (2.5) приводят, как известно, к системе линейных уравнений

$$\sum_{q=1}^M a_q (\alpha_{pq} - \lambda \beta_{pq}) = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, M) \quad (3.9)$$

относительно постоянных a_q . Здесь

$$\alpha_{pq} = \alpha_{qp} = \int_{\Omega} \nabla f_p \nabla f_q d\Omega = \int_{-s_0}^{s_0} f_p(s) (\partial f_q / \partial n)_{\Gamma} ds \quad (3.10)$$

$$\beta_{pq} = \beta_{qp} = (B^{-1} f_p, f_q) = \int_{-s_0}^{s_0} f_p(s) ds \int_{-s_0}^{s_0} G(s, z) f_q(z) dz \quad (3.11)$$

где $G(s, z)$ — функция Грина (3.6). Нетривиальное решение системы уравнений (3.9) возможно только в том случае, когда

$$\det(\alpha_{pq} - \lambda \beta_{pq})_{p, q=1}^M = 0 \quad (3.12)$$

Из этого уравнения находятся приближенно собственные значения задачи (1.4).

При вычислении определителя (3.12) на ЭЦВМ может получиться, что при большом числе M координатных функций (3.7) абсолютная величина определителя для различных значений λ окажется либо большой ($> 10^{19}$), либо очень малой ($< 10^{-19}$) и воспримется ЭВМ как нуль (т. е. как нулевая функция от λ). Чтобы этого не случилось, нормировочные постоянные c_p в (3.7) выберем из условий

$$\alpha_{pp} = 1 \quad (p = 1, 2, \dots, M) \quad (3.13)$$

Можно доказать, что для горизонтальной равновесной поверхности Γ эти условия совпадают с условиями ортонормальности последовательности (3.7) собственных функций задачи (2.2) в энергетическом пространстве «главного» оператора этой задачи; это обеспечивает хорошую сходимость метода Рунге для такой системы координатных функций [12]. Для симметричной (негоризонтальной) поверхности Γ требования (3.13), как показывают вычисления, приводят к тому, что в матрице (α_{pq}) главными являются диагональные элементы (равные единице), а в матрице (β_{pq}) при увеличении любого индекса элементы убывают достаточно быстро.

4. Случай полной невесомости ($b = 0$). Рассмотрим более подробно случай, когда гравитационные силы отсутствуют ($n = b = 0$) и колебания жидкости происходят под действием только поверхностных сил. Равновесная поверхность Γ будет представлять собой дугу окружности, и уравнение семейства равновесных поверхностей можно записать в виде

$$x = x(s) = c^{-1} \sin(cs), \quad y = y(s) = c^{-1} [1 - \cos(cs)]$$

где $c = \cos \delta$ — параметр семейства, равный кривизне линии Γ , s — длина дуги, $-s_0 \leq s \leq s_0$, $s_0 = c^{-1} \arcsin c$. Будем считать заданным безразмерный объем (площадь) жидкости или глубину жидкости h_0 , соответствующую углу смачивания $\delta = 90^\circ$. Тогда для произвольного угла $\delta \neq 90^\circ$ глубина жидкости h , входящая в (3.1) — (3.4), равна

$$h = h_0 - \frac{1}{2c} \left[2 - s_0 - \frac{\sin(2cs_0)}{2c} \right]$$

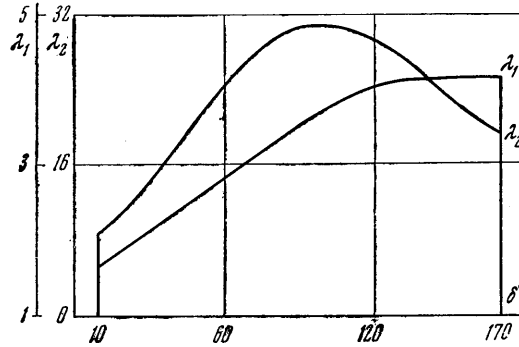
Функцию Грина $G(s, z)$ из (3.6) легко вычислить методом вариации произвольных постоянных

$$G(s, z) = \begin{cases} w(s, z) + v_1(z)v_2(s), & -s_0 \leq z \leq s \\ w(s, z) + v_1(s)v_2(z), & s \leq z \leq s_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

$$w(s, z) = w(z, s) = [v_2(s) + v_2(z) - (c^{-1} \arcsin c + \sqrt{1 - c^2})v_2(s)v_2(z)](2c^2)^{-1} - 1/2[v_1(z)v_2(s) + v_1(s)v_2(z)],$$

$$v_1(s) = c^{-1} \sin(cs), \quad v_2(s) = \cos(cs)$$

Конкретный вид функции Грина (4.1) и симметрия рассматриваемой задачи позволяют упростить выражения для коэффициентов Ритца (3.10)



Фиг. 2

и (3.14). Коэффициенты α_{pq} можно вычислить по формулам

$$\alpha_{pq} = 2c_p c_q \int_0^{s_0} \Phi_p(s) \Phi_q(s) ds \quad (4.2)$$

$$\Phi_x(s) = \Phi_p[x(s), y(s)] - d_r, \quad \Phi_y(s) = (\partial \Phi_p / \partial n)_r$$

Формулы для коэффициентов β_{pq} получаются разные:

для задачи 1

$$\beta_{pq} = 2c_p c_q (\xi_p \eta_q + \xi_q \eta_p - \gamma_{pq} - \gamma_{qp}) \quad (4.3)$$

для задачи 2

$$\beta_{pq} = -2c_p c_q [(s_0 + \sqrt{1 - c^2}) \eta_p \eta_q / c^2 + \gamma_{pq} + \gamma_{qp}] \quad (4.4)$$

Здесь

$$\xi_p = \int_0^{s_0} v_1(s) \Phi_p(s) ds, \quad \eta_p = \int_0^{s_0} v_2(s) \Phi_p(s) ds$$

$$\gamma_{pq} = \int_0^{s_0} v_1(s) \Phi_p(s) ds \int_0^s v_2(z) \Phi_q(z) dz \quad (4.5)$$

При вычислении коэффициентов Ритца интегралы в (4.2) и (4.3) заменим приближенно квадратурными суммами. Одномерные интегралы вычислим по формуле Симпсона, выбрав N точек на интервале $[0, s_0]$. Двукратные интегралы (4.5) вычислим аналогично, причем хорошая аппроксимация получается, если внутренний интеграл заменить по формуле трапеций, а внешний — по формуле Симпсона, используя данные в тех же N точках.

Приведем теперь результаты вычислений частот колебаний (собственных чисел) задачи (1.1) при $b = 0$. Вычисления приводились при числе M координатных функций, равном 4, 6 и 8; количество точек Симпсона $N = 30$. Как показали вычисления, максимальная относительная погрешность при $M = 6$ и $M = 8$ составляет для первых трех собственных значений 0.5%, а для последующих двух — не превышает 4%. Поэтому все последующие таблицы и графики приводятся для числа координатных функций $M = 6$.

На фиг. 2 представлены зависимости первых двух собственных значений задачи (1.1) от угла смачивания δ (в разных масштабах по оси ординат!) для случая,

Таблица 1

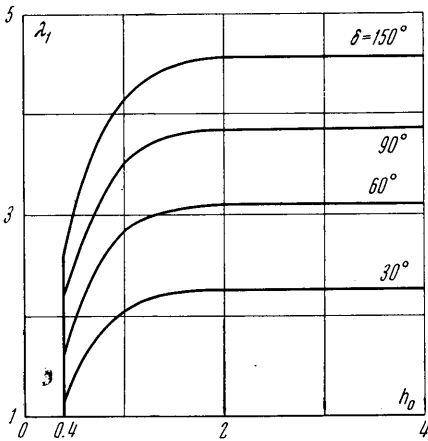
δ°	10	30	50	70	90	110	130	150	170
λ_1	1.651	2.075	2.592	3.106	3.553	3.906	4.081	4.164	4.194
λ_2	8.851	14.51	21.41	27.51	30.95	30.80	27.52	22.92	19.22
λ_3	27.32	49.38	74.35	94.87	105.0	102.5	90.13	75.45	65.73
λ_4	71.35	124.6	180.8	228.2	248.0	240.5	209.2	175.2	149.4
λ_5	150.6	250.9	355.8	445.9	485.5	466.6	414.7	366.1	336.2

когда глубина жидкости $h_0 = 1$. О поведении функции $\lambda_m(\delta)$ при $m = 1, 2, \dots, 5$ можно судить по табл. 1.

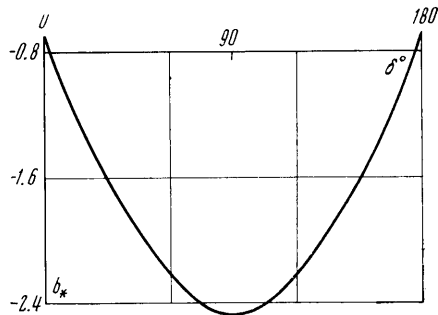
Уже из (3.2) видно, что при $\delta = 90^\circ$ частоты колебаний практически не зависят от глубины жидкости при $h \geq 1$. Аналогичная картина наблюдается и при других углах смачивания. На фиг. 3 приведен график зависимости первого собственного значения λ_1 от глубины жидкости h_0 при различных δ . Он имеет явный экспоненциальный характер, как и в (3.2). Для последующих собственных значений λ_m ($m = 2, 3, \dots$) переход на асимптоту при $h_0 \rightarrow \infty$ еще более резко выражен, т. е. величина «пограничного слоя» гораздо меньше.

5. Колебания в слабом гравитационном поле ($b \neq 0$). Рассмотрим, как меняются частоты колебаний при изменении интенсивности гравитационного поля n (или числа Бонда b). При этом будем считать, что угол смачивания δ и первоначальная глубина h_0 заданы. (Иными словами, из трех параметров b, δ и h_0 , от которых зависят частоты колебаний, фиксируем два — δ и h_0 .)

Числа Бонда, при которых вычисляются частоты колебаний,



Фиг. 3



Фиг. 4

должны быть больше критического значения, т. е. $b > b_* = b_*(\delta)$. Только в этом случае можно говорить о малых колебаниях жидкости. График функции $b = b_*(\delta)$, взятый из [10], представлен на фиг. 4. (Напомним, что при $b = b_*$ обратный оператор B^{-1} не существует, а потому и основной функционал (2.5) не имеет смысла.) Минимум кривой на фиг. 4 отвечает значению $b_* = -(1/2\pi)^2$.

При $b \neq 0$ уравнение равновесной поверхности Γ не выражается через элементарные функции. Как показано в [9], уравнение семейства равновесных поверхностей, разыскиваемое в параметрической форме $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s — длина дуги вдоль кривой), представляет собой решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} x'' &= -y'(by + c), & y'' &= x'(by + c), & x(0) &= y(0) = y'(0) = 0, \\ & & & & x'(0) &= 1 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Величина c — параметр семейства — равна кривизне кривой Γ в начальной точке $s = 0$.

Чтобы построить кривую Γ , отвечающую заданному углу смачивания δ и какому-либо $b > b_*$, нужно выбрать в (5.1) параметры b и c так, чтобы (см. фиг. 1)

$$x(s_0, b, c) = 1, \quad x'(s_0, b, c) = \sin \delta, \quad y'(s_0, b, c) = \cos \delta$$

Для этого применим следующий прием [9]: осуществим в (5.1) преобразование подобия по формулам

$$s_* = s\sqrt{|b|}, \quad x_* = x\sqrt{|b|}, \quad y_* = y\sqrt{|b|}, \quad c_* = c/\sqrt{|b|} \quad (5.2)$$

Тогда в новых переменных задача (5.1) примет вид

$$\begin{aligned} x_*'' &= -y_*'(\varepsilon y_* + c_*), \quad y_*'' = x_*'(\varepsilon y_* + c_*), \\ x_*(0) &= y_*(0) = y_*'(0) = 0, \quad x_*'(0) = 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\varepsilon = \text{sign } b$. Задача (5.3) при выбранном ε содержит уже один параметр c_* . Будем интегрировать систему (5.3) при каком-либо $c_* \neq 0$ до тех пор, пока при некотором $(s_*)_0$ будет

$$x_*'[(s_*)_0] = x'(s_0) = \sin \delta$$

Поскольку должно быть $x(s_0) = 1$, то из (5.2) находим, что $\sqrt{|b|} = x_*[(s_*)_0] \equiv (x_*)_0$.

Возвращаясь теперь по формулам (5.2) к первоначальным переменным, получаем длину интервала интегрирования s_0 и параметры задачи (5.1)

$$s_0 = (s_*)_0 / (x_*)_0, \quad b = \varepsilon [(x_*)_0]^2, \quad c = c_* (x_*)_0 \quad (5.4)$$

Глубина жидкости h для этих параметров равна

$$h = h_0 - [(x_*)_0]^{-2} \int_0^{(s_*)_0} y_*(t) x_*'(t) dt \quad (5.5)$$

Таким образом, меняя параметр c_* , получаем набор значений b , c и h при фиксированных h_0 и δ , а затем, после интегрирования задачи (5.1), и уравнение кривой Γ .

Функцию Грина $G(s, z)$ из (3.6) можно выразить через фундаментальные решения $v_1(s)$ и $v_2(s)$ однородного уравнения (см. определение (1.2) оператора B)

$$-v'' + av = 0, \quad a = a(s) = bx' - (by + c)^2 \quad (5.6)$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$v_1(0) = 0, \quad v_1'(0) = 1, \quad v_2(0) = 1, \quad v_2'(0) = 0 \quad (5.7)$$

При этом оказывается, что $v_1(s)$ — нечетная, а $v_2(s)$ — четная функции. Формула для $G(s, z)$ имеет вид

$$G(s, z) = \begin{cases} 1/2 w(s, z) + v_1(z) v_2(s), & -s_0 \leq z \leq s \\ 1/2 w(s, z) + v_1(s) v_2(z), & s \leq z \leq s_0 \end{cases} \quad (5.8)$$

$$w(s, z) = w(z, s) = (\tau_1 / \tau_2) v_2(s) v_2(z) - (\tau_2 / \tau_1) v_1(s) v_1(z) - [v_1(z) v_2(s) + v_1(s) v_2(z)] + \tau_3^{-1} F(s) F(z) \quad (5.9)$$

$$\tau_1 = v_1'(s_0) + \mu v_1(s_0) \neq 0, \quad \tau_2 = v_2'(s_0) + \mu v_2(s_0) \neq 0$$

$$F(s) = [v_2(s) \psi_1(s) - v_1(s) \psi_2(s)] + [(\tau_1 / \tau_2) \psi_2(s_0) - \psi_1(s_0)] v_2(s)$$

$$\psi_1(s) = \int_0^s v_1(z) dz, \quad \psi_2(s) = \int_0^s v_2(z) dz, \quad \tau_3 = - \int_0^{s_0} F(t) dt$$

Как и в п. 4, коэффициенты Ритца α_{pq} вычисляются по формулам (4.2), а для коэффициентов β_{pq} имеем

для задачи 1

$$\beta_{pq} = -2c_p c_q [(\tau_2 / \tau_1) \xi_p \xi_q - (\xi_p \eta_q + \xi_q \eta_p) + (\gamma_{pq} + \gamma_{qp})] \quad (5.10)$$

для задачи 2

$$\beta_{pq} = 2c_p c_q [(\tau_1 / \tau_2) \eta_p \eta_q + \tau_3^{-1} \theta_p \theta_q - (\gamma_{pq} + \gamma_{qp})] \quad (5.11)$$

$$\theta_p = - \int_0^{s_0} F(t) \Phi_p(t) dt \quad (5.12)$$

а коэффициенты ξ_p , η_p и γ_{pq} определяются по формулам (4.5), причем $v_1(s)$ и $v_2(s)$ — решения задачи (5.6), (5.7).

Таким образом, вычисление коэффициентов Ритца α_{pq} и β_{pq} проходит по следующим этапам:

1) сначала решается на ЭЦВМ вспомогательная задача (5.3) и затем по формулам (5.4), (5.5) определяются параметры s_0 , b , c и h ;

2) после этого на интервале $[0, s_0]$ решается совместно задача (5.1), (5.6), (5.7), а также задача Коши для определения функций $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ (см. (5.9))

$$\psi_1' = v_1, \quad \psi_2' = v_2, \quad \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$$

3) значения искомых функций в процессе интегрирования полученной системы уравнений запоминаются в узлах Симпсона (интервал $[0, s_0]$ предварительно разбивается на N равных частей), а затем по формулам (4.2), (4.5), (5.9) — (5.12) вычисляются коэффициенты α_{pq} и β_{pq} , $p, q = 1, 2, \dots, M$; при этом определенные интегралы заменяются квадратурными суммами аналогично тому, как это было сделано в п. 4.

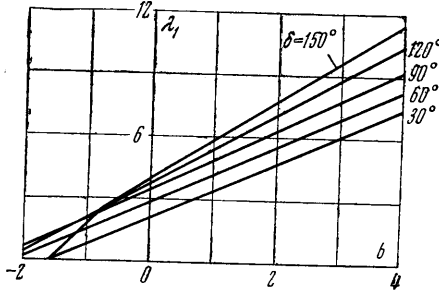
Таблица 2

b	-1.000	-0.460	0	0.573	1.089	1.631	2,683	5,287
λ_1	1.553 2.277	2.251 3.217	2.853 4.001	3.609 4.956	4.296 5.801	5.024 6.678	6.454 8.356	10.15 12.48
λ_2	20.87 26.13	22.93 27.70	24.69 29.46	27.74 31.81	28.60 33.87	30.53 36.01	34.26 40.08	43.94 50.22
λ_3	78.15 89.25	82.22 93.57	85.60 97.12	89.62 101.3	93.24 105.1	97.02 108.9	104.4 116.3	124.8 135.8
λ_4	192.9 213.9	200.0 220.8	207.0 226.4	212.8 233.2	219.0 239.1	225.6 245.1	238.7 256.9	274.6 289.5
λ_5	384.7 424.2	396.2 434.1	405.8 442.1	417.2 451.5	427.6 459.8	438.6 468.5	460.3 485.4	

Приведем результаты вычислений на ЭЦВМ М-20 частот и форм колебаний жидкости при $b \neq 0$, $h_0 = 1$; все графики и таблицы построены при числе координатных функций $M = 6$; количество точек Симпсона $N = 30$. На фиг. 5 представлена зависимость первого собственного значения $\lambda_1(b, \delta, h_0)$ задачи (1.1) при изменении числа Бонда b и фиксированных значениях параметров δ и $h_0 = 1$. Из графика видно, что приближенно эта зависимость линейна относительно b (при $\delta = 90^\circ$, как следует из (3.2), эта функция линейна). Поэтому ее можно записать в виде такой приближенной формулы:

$$\lambda_1(b, \delta, h_0) = \lambda_1(0, \delta, h_0) [1 - b / b_*(\delta)] \quad (5.13)$$

Здесь $\lambda_1(0, \delta, h_0)$ — функция, изображенная на фиг. 2 и выражающая (при $h_0 = 1$) зависимость от δ первого собственного значения задачи (1.1) при полной невесомости; функция $b_*(\delta)$ представлена на фиг. 4. Относительная погрешность формулы (5.13) при $b_*(\delta) < b < 5$ не превышает 3%.



Фиг. 5

О поведении первых пяти собственных значений задачи (1.1) при изменении числа Бонда можно судить из табл. 2 и 3. В табл. 2 приведены значения λ_m при $\delta = 60^\circ$ (первые цифры в графах таблицы) и $\delta = 120^\circ$ (вторые цифры); аналогично в табл. 3 первые цифры соответствуют $\delta = 30^\circ$, а вторые — $\delta = 150^\circ$. Из рассмотрения этих таблиц можно заметить, что при $m = 2, 3, 4, 5$ зависимость $\lambda_m(b, \delta, h_0)$ также приближенно линейна относительно b . Поэтому для нахождения функции $\lambda_m(b, \delta, h_0)$, как и при написании приближенной формулы (5.13), достаточно вычислить λ_m

для фиксированных h_0 и δ при каких-либо двух значениях b (например, для случая полной невесомости (табл. 1) и каком-либо $b > 0$ (табл. 2 и 3)).

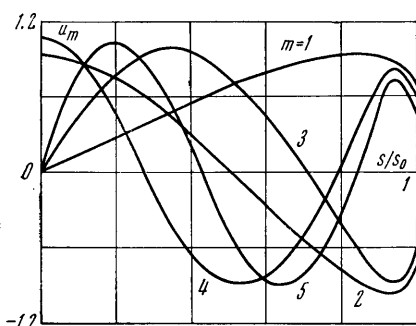
На фиг. 6 и 7 изображены типичные формы собственных колебаний $u_m(s) = (\partial \Phi_m / \partial n)_r$, отнесенные к отрезку $[-1, 1]$ и нормированные условием

$$\|u_m\|^2 = \int_{-s_0}^{s_0} [u_m(s)]^2 ds = 1$$

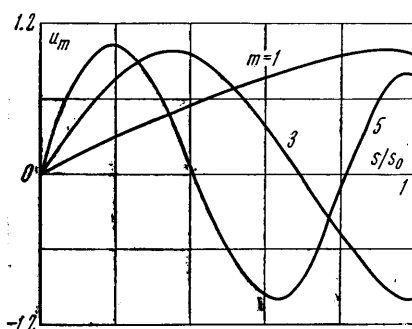
На фиг. 6 формы колебаний построены для $b = 4.528$, $\delta = 30^\circ$, $h_0 = 1$, а на фиг. 7 — при $b = 2.683$, $\delta = 60^\circ$, $h_0 = 1$. Вычисления показали, что характер форм колебаний при $\delta > 90^\circ$ и других значениях b и h_0 такой же, как на фиг. 6 и 7. Вычисления показали также, что для углов смачивания δ в интервале $30^\circ \leq \delta \leq 150^\circ$ первая собственная форма колебаний хорошо аппроксимируется первой координатной функцией вида (3.1), вторая — соответственно второй, и т. д.

Таблица 3

b	-1.089	-0.557	0	0.857	1.307	2.206	3.046	4.528
λ_1	0.650 1.572	1.350 2.932	2.075 4.164	3.187 5.867	3.775 6.706	4.962 8.309	6.093 9.751	8.155 12.23
λ_2	8.309 14.55	11.50 19.00	14.51 22.92	18.72 28.22	20.76 30.73	24.78 35.39	28.09 39.46	34.29 46.24
λ_3	34.38 58.35	42.19 67.55	49.38 75.45	59.10 85.82	63.85 90.88	72.96 100.1	81.26 108.1	95.69 121.6
λ_4	94.00 148.7	108.0 163.5	124.6 175.2	139.5 193.2	148.3 201.0	167.2 215.5	180.2 228.1	205.0 249.3
λ_5	215.5 330.0	232.4 349.3	250.9 366.1	278.5 387.8	292.6 398.0	319.6 416.5	343.3 432.5	380.7 459.5



Фиг. 6



Фиг. 7

Заметим в заключение, что описанная в данной работе методика вычисления частот и форм колебаний жидкости при полной или частичной невесомости пригодна для решения подобной задачи в произвольном осесимметричном сосуде, если выбрана удачная система координатных функций.

Поступило 10 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Барняк М. Я., Комаренко А. Н. Нахождение собственных значений задачи о колебании жидкости в слабом гравитационном поле. Тр. семинара по дифференциальным уравнениям, Киев, 1969.
2. Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Тюпцов А. Д. О колебаниях жидкости в условиях полной или частичной невесомости. Сб. «Математическая физика и функциональный анализ», вып. 1, Харьков, 1969.
3. Копачевский Н. Д. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости. Сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», М., ВЦ АН СССР, 1968.
4. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
5. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
6. Копачевский Н. Д., Морозовская Н. Н. Определение первой частоты колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде в слабом гравитационном поле. Сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», М., ВЦ АН СССР, 1968.
7. Михлин С. Г. Вариационные методы математической физики. М., «Наука», 1970.
8. Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
9. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», М., ВЦ АН СССР, 1968.
10. Конкус. Капиллярная устойчивость свободной поверхности жидкости в перевернутом прямоугольном канале при кривизне, меняющей знак. Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 2.
11. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М., ВЦ АН СССР, 1966.
12. Михлин С. Г. Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966.