

УДК 532.517.4+523.76

ГИДРОДИНАМИКА КОНВЕКТИВНОЙ ЗОНЫ СОЛНЦА

В. С. КЕЛЛЕР, И. М. ЯВОРСКАЯ

(Москва)

Изучаются крупномасштабные гидродинамические движения, возникающие в конвективной зоне Солнца под влиянием вращения звезды и турбулентного конвективного переноса тепла; при этом учитываются сжимаемость солнечной материи, стратификация плотности и неизотропность турбулентной вязкости.

Уравнения гидродинамики, описывающие такие движения, упрощаются на основе анализа размерности с учетом имеющихся наблюдательных данных. Развита приближенный метод решения уравнений для случая, когда отношение центробежной силы к силе гравитации мало, а силы турбулентной вязкости весьма существенны.

Решения уравнений для функции тока меридиональных движений и угловой скорости вращения найдены в аналитическом виде в форме бесконечных рядов. Получено, что при слабой анизотропии турбулентных пульсаций $s \sim 1.1$, глубине зоны 0.27 радиуса Солнца, эффективной вязкости $\eta/\rho \sim 10^{14}$ см²/сек и перепаде плотности в зоне в $2 \cdot 10^6$ раз возникающее дифференциальное вращение может приводить к наблюдаемому экваториальному ускорению поверхности Солнца.

1. Из теории внутреннего строения звезд [1] известно, что Солнце состоит из ядра, в котором происходит выделение энергии за счет ядерных процессов и перенос ее излучением к периферии, конвективной оболочки, где условие конвективного равновесия нарушается и перенос энергии осуществляется конвекцией, и атмосферы. Процессы, происходящие в конвективной оболочке, по-видимому, ответственны за многие явления, наблюдаемые на поверхности Солнца, как например дифференциальное вращение Солнца, смена циклов солнечной активности, нагрев хромосферы и т. д. Вследствие этого большой интерес представляет изучение гидродинамических течений, происходящих в этой области. Наблюдения показывают, что Солнце вращается довольно медленно. Так, параметр $q = a^3 \Omega_0^2 / GM$, представляющий собой отношение центробежной силы к силе гравитации на поверхности Солнца, имеет порядок 10^{-5} (a — радиус, M — масса, Ω_0 — характерная скорость вращения поверхности Солнца, G — гравитационная постоянная).

Гидродинамические течения, которые возникают в оболочке Солнца, являются следствием взаимодействия конвективных движений с вращением. Вследствие больших линейных размеров оболочки (ее толщина порядка $2 \cdot 10^{10}$ см) конвекция в ней имеет существенно турбулентный характер, числа Рэлея $Ra = l^2 g \Delta \nabla T / T \nu \chi$ достигают в некоторых областях значений $10^{19} - 10^{20}$ (g — ускорение силы тяжести, l — путь перемешивания, принятый равным $1.5 h_p$, где h_p — шкала высот давления, T — температура, $\Delta \nabla T = -\nabla T - (-\nabla \cdot T)$ — разность действительного и адиабатического градиентов температуры, ν и χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности среды). Кроме того, следует отметить, что среда в конвективной оболочке сильно стратифицирована; по имеющимся расчетам [1, 2] плотность по глубине меняется там примерно на шесть порядков. Поскольку нелинейной теории конвективных течений в стратифицированных средах (в виду большой математической сложности задачи) пока нет, а конвекция в оболочке звезд осложняется еще турбулентностью и взаимодействием с вращением, то сложную проблему о взаимодействии

с вращением турбулентной конвекции в стратифицированной среде будем рассматривать в следующей упрощенной постановке.

Все эффекты турбулентной конвекции будем аппроксимировать анизотропной эффективной вязкостью среды, и, таким образом, сведем задачу к изучению гидродинамических течений, возникающих вследствие вращения в стратифицированной среде с анизотропной турбулентной вязкостью. Для представления тензора турбулентных напряжений Рейнольдса будем пользоваться обобщением на трехмерный случай полуэмпирической теории турбулентности Прадтля [3]. Как показал Васютинский [3], коэффициенты линейной зависимости тензора напряжений от скоростей деформации в сферической системе координат (r, θ, φ) представляют собой диагональный тензор η_i^i и играют роль коэффициентов эффективной вязкости в уравнениях движения. Бирман [4] отметил, что турбулентная конвекция в звездах должна быть анизотропной, так как предпочтительным направлением является направление гравитационного ускорения. Это означает, что коэффициенты эффективной вязкости по радиальному и тангенциальным направлениям должны быть различны

$$\eta_r^r = \eta, \quad \eta_\theta^\theta = \eta_\varphi^\varphi = s\eta, \quad s \neq 1 \quad (1.1)$$

Здесь параметр s измеряет степень анизотропии турбулентных пульсаций. Отметим, что при $s = 1$ из физических соображений следует, что оболочка будет вращаться как твердое тело с постоянной угловой скоростью $\Omega = \text{const}$ и скорость меридиональных течений будет равна нулю. Как было впервые отмечено в [3, 4], анизотропная турбулентная вязкость может быть механизмом, который перераспределяет угловой момент вращения Солнца так, что конвективная зона будет вращаться дифференциально, т. е. $\Omega = \Omega(r, \theta)$.

Такое упрощение проблемы взаимодействия турбулентной конвекции с вращением оправдано, когда масштабы конвективных течений значительно меньше масштаба гидродинамических течений, возникающих вследствие вращения, и можно пренебречь влиянием вращения на конвективные пульсации. Первое из этих условий выполняется с хорошей степенью точности везде, кроме дна зоны, где масштабы конвективных движений l только в 2—3 раза меньше глубины оболочки d [2]. Влиянием вращения будем пренебрегать вследствие малости параметра q для Солнца. Отметим, что вращение сильнее всего воздействует на крупномасштабные конвективные течения [5], т. е. опять-таки хуже всего второе условие выполняется вблизи дна зоны. Это означает, что вблизи нижней границы зоны предложенная аппроксимация будет достаточно грубой.

Для решения задачи необходимо знать скалярную эффективную вязкость η и коэффициент анизотропии s из эксперимента или каких-либо физических соображений. Экспериментальных данных по η для турбулентной конвекции в стратифицированных средах нет. Поэтому для нахождения зависимости коэффициента η от r воспользуемся расчетом параметров средней стратификации конвективной зоны Солнца, проведенным в [2] с помощью весьма грубой «теории пути перемешивания».

В таблицах работы [2] без учета вращения дана средняя стратификация конвективной зоны, т. е. давление P_0 , плотность ρ_0 и температура T_0 , средняя квадратичная скорость конвективных пульсаций v_l , шкала высот и т. д. как функции r — расстояния от центра Солнца. Отсюда может быть найдена глубина конвективной зоны d и коэффициент эффективной турбулентной вязкости η , определяемый по аналогии с кинетической теорией газов как $\eta = \frac{1}{3}\rho_0 v_l l$, где l — путь перемешивания, т. е. расстояние, которое конвективный элемент проходит, не смешиваясь с окружающей средой. В [2] l принято равным $1.5h_p$. Коэффициент η по этой теории является функцией только r . Если учитывать действие вращения на конвекцию [6],

то η будет также функцией числа Тейлора $Ta = 4\Omega^2 l^4 \cos^2 \theta / \nu^2$, т. е. $\eta = \eta(r, \theta)$ и для достаточно медленного вращения $\eta(r, \theta)$ можно представить в виде

$$\eta(r, \theta) = \eta(r) [1 - \delta(r) \cos^2 \theta]$$

где $0 < \delta(r) \ll 1$, а $\eta(r)$ — определенная, как указано выше, в [2] функция. Кроме того, как показано в [7], действие вращения может привести к появлению в тензоре η_i^i (1.1) недиагональных компонент из-за искажения главных осей тензора турбулентного трения.

В работах, посвященных изучению гидродинамики конвективных зон, плотность среды ρ и коэффициент турбулентной вязкости η обычно принимались постоянными [7-10]. Как показано в [2], обе эти величины меняются в звездах весьма значительно. Так, в конвективной оболочке Солнца ρ и η меняются примерно на шесть порядков, хотя коэффициент кинематической эффективной вязкости η/ρ на большей части зоны остается постоянным. Попытка учесть стратификацию плотности в оболочке при расчете гидродинамических течений была сделана в [11], однако принятое для упрощения задачи гидростатическое распределение плотности $\rho_0 \sim \sim (a/r)^y$ с $y = \text{const}$ правильно моделировало лишь значения плотности на границах, а распределение плотности внутри зоны было далеко от действительного. В данной работе гидростатическое распределение плотности задается в согласии с рассчитанной средней стратификацией конвективной оболочки Солнца [2], η/ρ принимается постоянным. Метод решения задачи аналогичен [11].

2. Будем моделировать конвективную оболочку Солнца сферическим слоем, в котором среда является совершенным газом. Движение газа в оболочке, возникающее за счет взаимодействия турбулентной конвекции и вращения, будем считать осесимметричным. Уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{r}_0 - \frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mathbf{R}}{\rho} \quad (2.1)$$

где \mathbf{U} — скорость, P — давление, ρ — плотность среды, а \mathbf{R} — сила турбулентного трения, компоненты которой выражаются через компоненты тензора напряжений Рейнольдса $R_i = \nabla_k \tau_i^k$ как обычно. Компоненты τ_i^k в сферической системе координат имеют вид [8, 11]

$$\begin{aligned} \tau_r^r &= -2\eta \frac{\partial U_r}{\partial r}, & \tau_\varphi^\varphi &= -\frac{2s\eta}{r \sin \theta} (U_r \sin \theta + U_\theta \cos \theta) \\ \tau_r^\theta &= \frac{\tau_\theta^r}{r^2} = -\frac{\eta}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rU_\theta) + s \frac{\partial U_r}{\partial \theta} - 2sU_\theta \right\} \\ \tau_r^\varphi &= \frac{\tau_\varphi^r}{r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{\eta}{r^2 \sin^2 \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta U_\varphi) - 2s \sin \theta U_\varphi \right\} \\ \tau_\theta^\theta &= -\frac{2s\eta}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (rU_\theta) + rU_r \right\} \\ \tau_\varphi^\varphi &= \frac{\tau_\varphi^\theta}{\sin^2 \theta} = -\frac{s\eta}{r^2 \sin^2 \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta U_\varphi) - 2r \cos \theta U_\varphi \right\} \end{aligned}$$

Уравнение неразрывности имеет обычный вид, уравнение притока тепла возьмем в виде условия баротропии: $P = P(\rho)$. Чтобы задача о гидродинамических движениях в оболочке Солнца могла решаться независимо от движений в других областях, необходимо задать граничные условия на

границах сферического слоя при $r = r_0$ и $r = a$. Сфера r_0 является границей раздела между конвективной зоной и ядром Солнца. Известно [1], что скорости движений в ядре очень медленны, порядка $10^{-7} - 10^{-9}$ см/сек, поэтому будем предполагать, что нет обмена материей между ядром и оболочкой и скорость U_r при $r = r_0$ равна нулю. Аналогичное условие для U_r примем при $r = a$, пренебрегая проникновением движений в атмосферу Солнца. Значения давления и плотности на внешней границе находятся из расчета звездных атмосфер [2]. Будем считать, что угловой момент оболочки Солнца задан, а внутренняя и внешняя границы свободны от турбулентных напряжений

$$\tau_r^\theta = \tau_r^\varphi = 0 \quad (r = r_0, r = a) \quad (2.2)$$

На нижней границе это условие является следствием различия на много порядков эффективной и молекулярной вязкости солнечной материи. На внешней границе (2.2) есть следствие того, что угловой момент, уносимый солнечным ветром, настолько мал, что заметные изменения в угловом моменте могут происходить лишь за десятки тысяч лет. Так, по расчетам Вебера и Дэвиса [12], изменение углового момента Солнца в e раз (при современной скорости уноса углового момента солнечным ветром, равной 1.8×10^8 г/см²) может произойти примерно за 10^9 лет.

3. Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x &= r/a, & \omega &= \Omega/\Omega_0, & \xi &= \eta/\eta_0, & R &= \rho/\rho_{00} \\ p &= aP/GM\rho_{00}, & t &= kaT/\mu m_p GM, & v_x &= U_r/a\Omega_0 \\ v_\theta &= U_\theta/a\Omega_0, & \beta &= \eta/\rho_{00}a^2\Omega_0 = 1/R_r \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь ρ_{00}, η_0 — характерные значения плотности и коэффициента эффективной турбулентной вязкости в зоне, m_p — масса протона, μ — средний молекулярный вес, выраженный в единицах массы протона, k — постоянная Больцмана. Пользуясь оценками безразмерных параметров q и β , данными в [11], проведем разложение искомых функций сначала по параметру q , затем по β^{-1} . В нулевом приближении по q уравнение (2.1) сведется к уравнению гидростатики

$$\frac{1}{R_0} \frac{dp_0}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad (3.2)$$

Примем, что условие баротропии в этом приближении совпадает с условием конвективного равновесия Шварцшильда [1]

$$-\nabla T - (-\nabla_r T) = 0 \quad (3.3)$$

которое с хорошей степенью точности выполняется на большей части конвективной зоны [2]. Решение уравнений (3.2) и (3.3) с граничным условием для плотности при $x = 1$ определяет распределения плотности, температуры и давления

$$R_0 = \left[\frac{b}{x} \frac{x_0 - x}{x_0 - b} \right]^{1/(\gamma-1)}, \quad t_0 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{x_0 - x}{x_0 x}, \quad p_0 = R_0 t_0 \quad (3.4)$$

которые хорошо аппроксимируют среднюю стратификацию конвективной зоны Солнца, данную в [2]. В (3.4) за ρ_{00} принято значение плотности у дна конвективной зоны при $x = r_0/a$, параметр x_0 фиксирует падение плотности по толщине конвективной зоны.

Действительно, отношение плотностей на границах зоны определяется как

$$\lambda = \frac{\rho_0(r_0)}{\rho_0(a)} = \frac{R_0(b)}{R_0(1)} = \left[\frac{x_0 - b}{b} \frac{1}{x_0 - 1} \right]^{1/(\gamma-1)}$$

и $x_0 = 1$ соответствует нулевой плотности на верхней границе зоны $R_0(1) = 0$ и $\lambda = \infty$. Однако для астрофизических приложений представляют интерес большие (порядка $10^3 - 10^6$), но не бесконечные значения λ , так как при очень малых значениях плотности среда становится оптически прозрачна, и существен не конвективный (3.3), а радиационный перенос энергии. Через γ обозначено отношение теплоемкостей, принимаемое для конвективной зоны Солнца, ввиду почти полной ионизации среды в основной части оболочки равным $5/3$.

Уравнения движения в первом приближении по q приведены в [11]. Используя условие баротропии, можно исключить давление и плотность и получить два уравнения, связывающие функцию тока ψ и угловую скорость вращения ω [11]. В случае, когда силы турбулентного трения существенны (т. е. турбулентное число Рейнольдса $R_\tau = 1/\beta$ достаточно мало), искомые функции ω и ψ можно представить в виде рядов по

$$\omega(x, \theta) = \omega_0(x, \theta) + \beta^{-1}\omega_1(x, \theta) + \beta^{-2}\omega_2(x, \theta) + \dots$$

$$\psi(x, \theta) = \psi_0(x, \theta) + \beta^{-1}\psi_1(x, \theta) + \beta^{-2}\psi_2(x, \theta) + \dots$$

и получить три последовательных системы уравнений для первых трех приближений функций ω_i и ψ_i ($i = 0, 1, 2$) с граничными условиями

$$\tau_x^\varphi(\omega_i) = 0, \quad \tau_x^\theta(\psi_i) = 0, \quad \partial\psi_i/\partial\theta = 0 \quad (x = b, x = 1)$$

В качестве нулевого приближения, как и в [11], получим следующие значения:

$$\psi_0(x, \theta) = 0, \quad \omega_0 = x^{2(s-1)}$$

где $\omega_0(1)$ принято равным единице. Для функций первого приближения по β^{-1} найдем

$$\omega_1(x, \theta) = 0, \quad \psi_1(x, \theta) = \Psi(x)P_2^1(\mu)\sqrt{1-\mu^2} \quad (\mu = \cos \theta)$$

где функция $\Psi(x)$ является решением краевой задачи

$$\Psi^{IV} + f_3\Psi''' + f_2\Psi'' + f_1\Psi' + f_0\Psi = f \tag{3.5}$$

$$\Psi = 0, \quad \Psi'' - \frac{2s-y}{x}\Psi' = 0 \quad (x = b, x = 1) \tag{3.6}$$

$$f = \frac{4}{3}(s-1)x^{4s-3}R_0, \quad f_0 = 12[2(s-1) + y + sy - xy']x^{-4}$$

$$f_1 = [24 - 8y + x^2y'' - y(6s - y - y'x)]x^{-3}$$

$$f_2 = \{2y'x - 4(2+s) + y[2(1-s) + y]\}x^{-2}, \quad f_3 = 2(1-s+y)x^{-1}$$

$$y = -\frac{d \ln R_0}{d \ln x} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{x_0}{x_0 - x}$$

Заметим, что в отличие от [11] y не является постоянным. Для второго приближения найдем

$$\psi_2(x, \theta) = 0, \quad \omega_2(x, \theta) = \omega_{20}(x) + \omega_{22}(x)P_2(\mu)$$

где ω_{20} и ω_{22} являются решениями следующих краевых задач:

$$\omega_{20}'' + w_1\omega_{20}' + w_0\omega_{20} = w \tag{3.7}$$

$$\omega_{22}'' + v_1\omega_{22}' + v_0\omega_{22} = v \tag{3.8}$$

$$\xi[x\omega_{2i}' + 2(1-s)\omega_{2i}] = 0, \quad i = 0, 2, \quad (x = b, x = 1) \quad (3.9)$$

$$w = \frac{-2\omega_0\Psi' - 2sR_0\omega_{22}}{R_0x^2}, \quad w_0 = \frac{2(1-s)(3-y)}{x^2}, \quad w_1 = v_1 = \frac{6-2s-y}{x}$$

$$v = \frac{6(x^2\omega_0)'\Psi - 4\omega_0x^2\Psi'}{R_0x^4}, \quad v_0 = \frac{2(3-8s-y+ys)}{x^2}$$

Уравнения (3.5), (3.7) и (3.8) являются уравнениями с переменными коэффициентами, но их коэффициенты и правые части в отличие от [11] меняются в интервале $b \leq x \leq 1$ на много порядков и сильно возрастают вблизи правого конца интервала, обращаясь там в бесконечность при $x_0 = 1$. Естественно искать решения этих уравнений в виде рядов по степеням (не обязательно целым) разности $x_0 - x$. Разложим коэффициенты уравнения (3.5) в ряды в окрестности точки x_0

$$f_i = \sum_{n=0}^{\infty} f_{in}(x_0 - x)^{n-4+i}, \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0 - x)^{n+1/(\gamma-1)} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

(Заметим, что в такой записи $f_{00} = f_{01} = 0$.)

Возьмем частное решение уравнения (3.5) в виде

$$\Psi_* = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x_0 - x)^{\beta+n}$$

где $\beta = (4\gamma - 3) / (\gamma - 1)$, а коэффициенты H_n находятся из рекуррентного соотношения

$$(\beta + m)(\beta + m - 1)(\beta + m - 2)(\beta + m - 3)H_m -$$

$$- \sum_{n=0}^m \{(\beta + n)[(\beta + n - 1)(\beta + n - 2)f_{3,m-n} - (\beta + n - 1)f_{2,m-n} +$$

$$+ f_{1,m-n}] - f_{0,m-n}\}H_n = f_m \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (3.10)$$

Решение соответствующего однородного уравнения будем искать в виде

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x_0 - x)^{\alpha+n}$$

где

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \gamma / (\gamma - 1), \quad \alpha_3 = \alpha_1 + 2 = 2, \quad \alpha_4 = \alpha_2 + 2 =$$

$$= (3\gamma - 2) / (\gamma - 1)$$

являются корнями характеристического уравнения

$$\alpha[(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3) - (\alpha - 1)(\alpha - 2)f_{3,0} + (\alpha - 1)f_{2,0} -$$

$$- f_{1,0}] + f_{0,0} = 0$$

Поскольку $\alpha_3 - \alpha_1$ и $\alpha_4 - \alpha_2$ — целые числа, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\Psi_0 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [A_{in}(x_0 - x)^{\alpha_i+n} + B_{in}(x_0 - x)^{\alpha_i+n} \ln(x_0 - x)] \right\} \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в однородное уравнение, получим две группы рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_i + m)(\alpha_i + m - 1)(\alpha_i + m - 2)(\alpha_i + m - 3)B_{im} - \sum_{n=0}^m \{(\alpha_i + n)[(\alpha_i + n - 1) \times \\
 & \quad \times (\alpha_i + n - 2)f_{3,m-n} - (\alpha_i + n - 1)f_{2,m-n} + f_{1,m-n}] - f_{0,m-n}\} B_{in} = 0 \\
 & (\alpha_i + m)(\alpha_i + m - 1)(\alpha_i + m - 2)(\alpha_i + m - 3)A_{im} + [(2\alpha_i + 2m - 1)(\alpha_i + m - 2) \times \\
 & \quad \times (\alpha_i + m - 3) + (\alpha_i + m)(\alpha_i + m - 1)(\alpha_i + m - 3) + (\alpha_i + m)(\alpha_i + m - 1) \times \\
 & \quad \times (\alpha_i + m - 2)]B_{im} - \sum_{n=0}^m \{(\alpha_i + n)[(\alpha_i + n - 1)(\alpha_i + n - 2)f_{3,m-n} - (\alpha_i + n - 1) \times \\
 & \quad \times f_{2,m-n} + f_{1,m-n}] - f_{0,m-n}\} A_{in} - \sum_{n=0}^m \{[(2\alpha_i + 2n - 1)(\alpha_i + n - 2) + (\alpha_i + n) \times \\
 & \quad \times (\alpha_i + n - 1)]f_{3,m-n} - (2\alpha_i + 2n - 1)f_{2,m-n} + f_{1,m-n}\} B_{in} = 0 \quad (i = 1, 2; m = 0, 1, \dots)
 \end{aligned}$$

Эти соотношения можно привести к виду

$$B_{in} = P_{in}B_{i2}, \quad A_{in} = P_{in}A_{i2} + r_{in}B_{i2}$$

Здесь $P_{i0} = P_{i1} = 0$, а остальные P_{in} и r_{in} — известные функции коэффициентов f_{jm} . «Свободные» коэффициенты A_{i2} и B_{i2} находятся из граничных условий (3.6).

Далее, частное решение уравнения (3.8) ищем в виде

$$(\omega_{22})_* = \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{n=0}^{\infty} D_{in} (x_0 - x)^{\beta_i+n} \right] + \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} D_{i+3,n} (x_0 - x)^{\beta_i+n} \ln(x_0 - x) \right]$$

Здесь $\beta_1 = (2\gamma - 3) / (\gamma - 1)$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 5$, а коэффициенты $D_{i,n}$ находятся из рекуррентных соотношений, аналогичных (3.10). Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

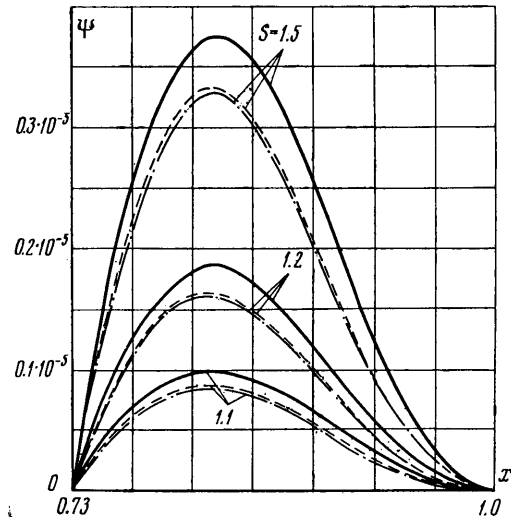
$$\begin{aligned}
 & (\omega_{22})_0 = \\
 & = \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_{in} (x_0 - x)^{\kappa_i+n} \right]
 \end{aligned}$$

где $\kappa_1 = (\gamma - 2) / (\gamma - 1)$, $\kappa_2 = 0$ — корни характеристического уравнения

$\kappa(\kappa - 1) - \kappa v_{1,0} + v_{0,0} = 0$
а коэффициенты C_{in} удовлетворяют рекуррентному соотношению

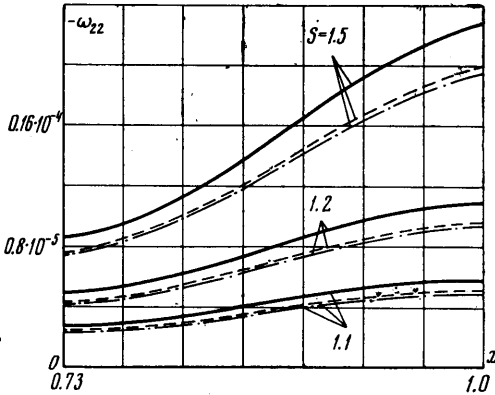
$$\begin{aligned}
 & (\kappa_i + m)(\kappa_i + m - 1)C_{im} - \\
 & - \sum_{n=0}^m [(\kappa_i + n)v_{1,m-n} - \\
 & \quad - v_{0,m-n}]C_{in} = 0 \\
 & (i = 1, 2; m = 0, 1, \dots)
 \end{aligned}$$

(v_{1n} и v_{0n} — коэффициенты разложения в ряд в точке x_0 функций v_1 и v_0 в (3.8)). «Свободные» коэффициенты $C_{1,0}$ и $C_{2,0}$ находим из граничных условий (3.9).



Фиг. 1

На фиг. 1—5 представлены результаты расчетов функций $\Psi(x)$ и $\omega_{22}(x)$ при $s = 1.5, 1.2, 1.1$ и $x_0 = 1.01, 1.001, 1$. Значению $x_0 = 1.01$ на фигурах соответствуют сплошные кривые, а значениям $x_0 = 1.001$ и 1 — пунктирные и штрих-пунктирные кривые. Глубина зоны b всюду принималась равной 0.73. Наихудшие (в смысле сходимости рядов) варианты соответствовали наибольшим значениям x_0 : например, при $x_0 = 1.01$ для совпадения первых четырех значащих цифр в разложениях для Ψ и ω_{22} необходимо было удерживать не менее 15 членов. Отметим, что при $x_0 \rightarrow 1$



Фиг. 2

$\Psi(x)$ и $\omega_{22}(x)$ сходятся к значениям этих функций, вычисленным для $x_0 = 1$ (так, для $1 \leq x_0 \leq 1.0001$ различие имеется лишь в пятой значащей цифре).

Асимптотические выражения для поведения функции $\Psi(x)$ при $s \rightarrow 1$ и при $1 - b \rightarrow 0$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi(x, s, b) &= \\ &= (s - 1)\Psi_1(x, b) + \\ &\quad + o(s - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, s, b) &= (1 - b)^4 \Psi_2(x, s) + \\ &\quad + o(1 - b)^4 \end{aligned}$$

где $\Psi_1(x, b)$ и $\Psi_2(x, s)$ — ограниченные решения некоторых уравнений четвертого порядка, не зависящие соответственно от параметров s и b . Аналогичные асимптотические формулы имеют место для $\omega_{20}(x)$ и $\omega_{22}(x)$.

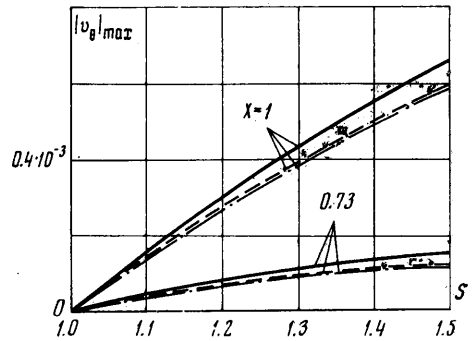
Из проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

1) взаимодействие турбулентной конвекции с вращением приводит при $s > 1$ к возникновению меридиональной циркуляции, направленной к экватору у поверхности зоны и к увеличению угловой скорости вращения вблизи экватора (фиг. 1, 2);

2) интенсивность меридиональной циркуляции уменьшается при увеличении падения плотности в оболочке ($x_0 \rightarrow 1$) и при уменьшении коэффициента анизотропии ($s \rightarrow 1$); максимальное значение функции тока $\psi(x, \theta)$ достигается в нижней половине зоны ($b < x < (b + 1)/2$) на широте $\theta^* = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 55^\circ$ (фиг. 1, 4);

3) θ -составляющая скорости максимальна на верхней границе оболочки на широте $\theta = 45^\circ$ (отметим, что для модели $\rho = \text{const}$ [10] компонента v_θ максимальна на нижней границе); x -составляющая максимальна в нижней половине оболочки при $\theta = 0$ (фиг. 3, 5) ¹;

4) угловая скорость вращения оболочки растет при приближении к верхней границе; функция ω_{22} , описывающая дифференциальность враще-



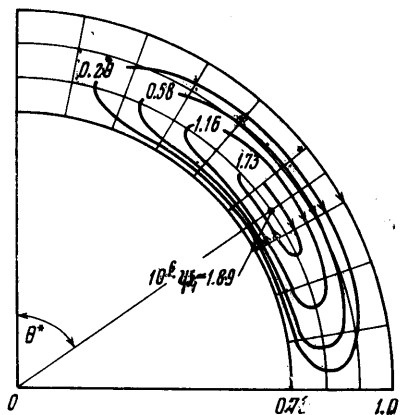
Фиг. 3

¹ На фиг. 5 приведена зависимость от s величины $(v_x^\circ)_{\max} = (v_x)_{\max} [b / (x_0 - b)]^A$, где $A = [(\gamma - 2)(\gamma - 1) + 1] / (\gamma - 1)$.

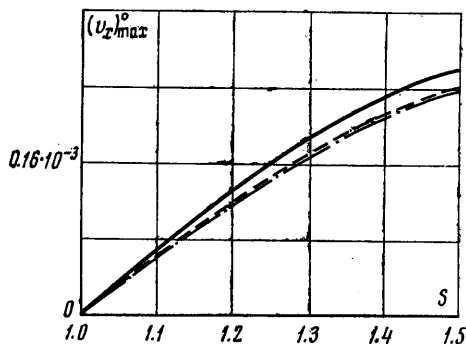
ния по широте, максимальна на верхней границе и уменьшается с уменьшением s и x_0 (фиг. 2);

5) при $s = 1$ функции Ψ , ω_{20} и ω_{22} обращаются в нуль, а $\omega_0 = 1$, т. е. реализуется закон твердого вращения в оболочке;

6) рост эффективной вязкости приводит к уменьшению меридиональной циркуляции ($R_r \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow 0$), а угловая скорость вращения стремится к закону $\omega_0 = x^{2(s-1)}$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Значения угловой скорости вращения и скорости меридиональной циркуляции, получаемые на верхней границе зоны при $x = 1$, интересно сравнить с наблюдаемыми данными на поверхности Солнца. Наиболее употребительная формула [13], полученная по наблюдениям за повторяющимися группами пятен, имеет вид

$$\Omega = \Omega(1, \mu_0) [1 - 0.137P_2(\mu)]$$

где μ_0 — корень полинома Лежандра $P_2(\mu)$. Максимальная скорость меридиональной циркуляции, определяемая по движениям пятен в широтном направлении, порядка нескольких метров в секунду и наблюдается на широтах $\sim 40^\circ$ [14]. Для сравнения с этими данными примем согласно [2] $b = 0.73$, $x_0 = 1.000043$, $x = 1$. Для значения $\eta / \rho = 10^{14}$ см²/сек, которое соответствует экстраполяции в глубь области наблюдаемых значений η / ρ на поверхности Солнца [15], и значений $s = 1.2$ и $s = 1.1$ получаем следующие величины для угловой скорости вращения и максимальных ($\theta = 45^\circ$) значений v_0 на верхней границе

$$\omega(s = 1.2) = 1 - 0.203P_2(\mu), \quad \omega(s = 1.1) = 1 - 0.109P_2(\mu)$$

$$\max v_0(s = 1.2) = 85 \text{ м/сек}, \quad \max v_0(s = 1.1) = 44.5 \text{ м/сек}$$

Для других принятых значений $\eta / \rho = 5 \cdot 10^{12}$ [2] и $\eta / \rho = 10^{13,340}$ [9] предлагаемое разложение по параметру $1/\beta$ не годится при $s = 1.2$ и $s = 1.1$. Как показывают асимптотические формулы, выбор параметров η / ρ и s неединствен. Действительно, при $\eta / \rho = 5 \cdot 10^{12}$ согласующиеся с наблюдательными значения для ω получаются при меньших s , порядка 1.0005. Скорости меридиональной циркуляции на поверхности оказываются при этом значительно меньшими

$$\max v_0(s = 1.0005, \eta / \rho = 5 \cdot 10^{12}) = 4.4 \text{ м/сек.}$$

Для выделения единственного набора параметров необходимы дополнительные более точные наблюдательные данные по значению меридиональной скорости на поверхности Солнца.

Поступило 29 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Шварцшильд М. Строение и эволюция звезд. М. Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Baker N., Temesvary S. Tables of convective stellar envelope models. N. Y., Goddard Space Flight Ins., 1966.
3. Wasiutinsky J. Hydrodynamics and structure of stars and planets. Astrophys. Norvegica, 1946, vol. 4.
4. Biermann L. On meridional circulations in stellar convective zones. Electromagnetic Phenomena in Cosmic. Physics, Cambridge, Univ. Press., 1958, p. 548.
5. Lebovitz N. R. The principle of exchange of stabilities II. The Onset of Convection in the Presence of Rotation. Astrophys. J., 1967, vol. 150, No. 1, pt 1.
6. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. London, Clarendon Press.; Oxford, Univ. Press., 1961.
7. Ирошников Р. С. Природа дифференциального вращения Солнца. Астрон. ж., 1969, т. 46, вып. 1.
8. Kippenhahn R. Differential rotation in stars with convective envelopes. Astrophys. J., 1963, vol. 137, No. 2.
9. Сооске W. J. On the solar differential rotation and meridional currents. Astrophys. J., 1967, vol. 150, No. 3, pt 1.
10. Köller H. Differential rotation caused by anisotropic turbulent viscosity. Solar Phys., 1970, vol. 33, No. 1.
11. Мельникова Н. С., Яворская И. М. О гидродинамике конвективных оболочек звезд. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
12. Weber E. J., Davis L. The angular momentum of the solar wind. Astrophys. J., 1967, vol. 148, No. 1, pt 1.
13. Newton H. W., Nunn M. L. The sun's rotation derived from sunspots and additional results. Monthly Notices of Royal Ast. Soc., 1951, No. 111, p. 413.
14. Ward F. The general circulation of the solar atmosphere and the maintenance of the equatorial acceleration, Astrophys. J., 1965, vol. 141, No. 2.
15. Leiton R. B. Transport of magnetic field on the Sun. Astrophys. J., 1965, vol. 140, No. 4.