УДК 532.522.2

О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ Э. ДУЙШЕЕВА

О. М. КИСЕЛЕВ, Л. М. КОТЛЯР

(Казань)

Исследование в точной постановке задач о плоских стационарных течениях идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами при учете сил тяжести и капиллярности или только одной из этих сил представляет значительный интерес. Именно поэтому привлекают внимание работы Э. Дуйшеева [1–8], в которых рассматриваются задачи о течении жидкости по неровному дну и об истечении жидкости из-под щита в предположении, что на твердых границах угол наклона скорости задан в функции потенциала скорости. Автор делает попытку доказать однозначную разрешимость этих задач. Однако анализ работ [1–8] неизбежно приводит к выводу о полной несостоятельности этой попытки.

Чтобы ознакомиться с методами автора, нет смысла останавливаться подробно на каждой из работ [1–8], поскольку они содержат много общего и недостатки одной из них повторяются с небольшими вариациями в любой другой. Проанализируем одну из типичных работ Э. Дуйшеева — работу [3], в которой рассматривается истечение жидкости из-под щита при совместном действии сил тяжести и капиллярности. При этом отметим только наиболее существенные моменты.

Задача сводится к решению системы двух нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений для неизвестных функций $\theta(t)$, $y(t)\,(-1 \leqslant t \leqslant 1)$

$$\theta(t) = \int\limits_{-1}^{t} e^{s-t}[-\varkappa(s) + \theta'(s) + Q(s, y(s), \lambda\theta'(s))]ds \tag{2.1}$$

$$y(t) = \delta + \frac{\delta}{\pi}\int\limits_{-1}^{t} \frac{\sin[\varkappa(s) - Q(s, y(s), \lambda\theta'(s))]}{(1+s)V(s, y(s), \lambda\theta'(s))}ds \tag{2.2}$$

$$V(t,\ y(t),\ \lambda\theta'(t)) = \{1 - \gamma[y(t) - \delta] + [\lambda\pi(1+t)\theta'(t)]^2\}^{1/2} - \lambda\pi(1+t)\theta'(t) \tag{1.8}$$

$$Q(t, y(t), \lambda\theta'(t)) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\ln V(\xi, y(\xi), \lambda\theta'(\xi))}{(\xi - t)\sqrt{1-\xi^2}}d\xi \tag{1.10}$$

Здесь θ' означает производную от θ, $\varkappa(t)$ — известная функция, δ, λ, γ — заданные параметры (нумерация формул соответствует нумерации Э. Дуйшеева). Для решения системы (2.1), (2.2) автор предлагает использовать метод последовательных приближений.

Введя замену $t = \cos\sigma$, Э. Дуйшеев приводит без доказательства лемму, смысл которой заключается в следующем. Если в правую часть уравнений (2.1), (2.2) вместо $\theta'(t)$, $y(t)$ подставить функции $\theta_0'(t)$, $y_0(t)$, удовлетворяющие некоторым условиям (2.7)—(2.9), то функции $\theta_1(t)$, $y_1(t)$, которые получаются в результате подстановки в левых частях этих уравнений, будут удовлетворять по σ условию Гельдера с показателем $\delta_0 < 1$. Отсюда автор делает вывод, что функции $\theta_n(t)$, $y_n(t)$, получающиеся на n-м этапе процесса последовательных приближений, и функции $\bar\theta(t)$, $\bar y(t)$, дающие решение системы (2.1), (2.2), также удовлетворяют по σ условию Гельдера с показателем δ_0 ([3], стр. 174, 173). Очевидно, что это утверждение совершенно не обосновано. Для обоснования только его первой части необходимо было бы доказать, что функции $\theta_1'(t)$, $y_1(t)$ удовлетворяют условиям (2.7)—(2.9), между тем даже существование производной $\theta_1'(t)$ не доказано.

При исследовании сходимости рядов

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty}(\theta_{n+1}(t) - \theta_n(t)), \qquad y(t) = y_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty}(y_{n+1}(t) - y_n(t)) \tag{3.5}$$

автор применяет такой прием: «Дополнительно потребуем следующее,— пишет он ([3], стр. 174),— функции Q, $V^{-1}\sin[\varkappa - Q]$ и $\ln V$ обладают производными по y и θ':

$$l_1(\sigma,\ \lambda) = Q_y'(t,\ y_*,\ \lambda\theta_n'), \qquad l_2(\sigma,\ \lambda) = Q_{\theta'}'(t,\ y_{n-1},\ \lambda\theta_*')$$

$$l_3(\sigma,\lambda)=[(V^{-1}\sin[\varkappa-Q])_{y'}]_{y=y_*},\quad l_4(\sigma,\lambda)=[(V^{-1}\sin[\varkappa-Q])_{\theta'}]_{\theta'=\theta_*'}$$

$$l_5(\sigma,\lambda)=V^{-1}V_{y}'(t,y_*,\lambda\theta_n'),\quad l_6(\sigma,\lambda)=V^{-1}V_{\theta'}'(t,y_{n-1},\lambda\theta_*')$$

l_3, l_4 удовлетворяют условиям (2.7), а для l_5, l_6 имеют место неравенства вида (2.8)».

Приведенный выше отрывок во многих отношениях является характерным и поэтому заслуживает внимания. Прежде всего, как следует из (1.8), (1.10), $Q(t, y(t), \lambda\theta'(t))$ является не функцией от y и θ', а оператором, в котором функции $y(t)$, $\theta'(t)$ входят под знак определенного интеграла. Поэтому первые четыре равенства (3.8), а вместе с ними и все дальнейшие рассуждения автора лишены всякого смысла. Однако отвлечемся на время от этого обстоятельства и продолжим анализ, чтобы дать читателю более полное представление о рецензируемой работе.

Несмотря на то, что правые части равенств (3.8) явно зависят от номера приближения n, их левые части Э. Дуйшеев рассматривает как некоторые фиксированные функции σ, к тому же требуя совершенно произвольно, чтобы они удовлетворяли целому ряду условий. Что касается величин y_* и θ_*', входящих в правые части равенств (3.8), то в тексте они нигде более не встречаются и так и остаются нерасшифрованными.

Используя описанную выше операцию дифференцирования оператора Q и желаемые свойства функций $l_k(\sigma, \lambda)$ $(k = 1,6)$, автор получает оценки

$$|\theta_{n+1}(t)-\theta_n(t)|\leqslant q_0{}^n k_1 \tag{3.13}$$

$$|y_{n+1}(t)-y_n(t)|\leqslant q_1{}^n k_1 \tag{3.14}$$

Коэффициенты q_0, q_1 выражаются через несуществующие функции $l_k(\sigma, \lambda)$, оценить которые автор, естественно, не может, и через неопределенные константы α_0, l_0. «Из доказанных оценок (3.13), (3.14) следует,— пишет Э. Дуйшеев ([3], стр. 176),— что при выполнении условий $q_0 < 1$, $q_1 < 1$ ряды (3.5) сходятся равномерно относительно $t \in [-1, 1]$ соответственно к функциям $\theta(t)$, $y(t)$ ...» На этом заканчивается «доказательство» сходимости процесса последовательных приближений. «Доказательство» единственности решения основано также на оценках (3.13), (3.14) при предположении, что q_0, $q_1 < 1$.

До сих пор речь шла о работе [3]. Совершенно аналогичные рассуждения использует Э. Дуйшеев, пытаясь доказать однозначную разрешимость задач в работах [1, 2, 4, 5, 7, 8]. В работе [6], посвященной задаче о течении жидкости со свободной поверхностью по криволинейному дну при совместном действии сил тяжести и поверхностного натяжения, схема рассуждений несколько иная. «Решение этой задачи найдем методом последовательных приближений,— пишет автор ([6], стр. 27),— при этом алгоритм и доказательство сходимости последовательных приближений будут основаны на построении полинома наилучшего приближения в смысле метода наименьших квадратов».

Задача сводится к решению системы уравнений для неизвестных функций $U(t)$, $W(t)$, $t \in [-1, 1]$

$$U'(t)=\frac{2\varepsilon}{\pi}\frac{P(t,U,\omega)}{\sqrt{1-t^2}},\qquad W(t)=\lambda[Q(t,U,\omega)-f_0(t)] \tag{1.1}$$

$$P=-\frac{\sin[Q(t,U,\omega)-f_0(t)]}{V(t,U,\omega)\sqrt{1-t^2}},\qquad Q=\frac{\sqrt{1-t^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln V(x,U,\omega)}{(x-t)\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$V=\sqrt{1-8U(t)+\omega^2(t)}-\omega(t),\qquad \omega(t)=(1-t^2)W'(t),\qquad U(1)=0$$

Здесь $f_0(t)$ — заданная функция, λ, ε — заданные параметры. Найдя величины $U(t)$, $W(t)$ в n-м приближении, автор предлагает построить полином наилучшего приближения для функции $V(t, U_n(t), \omega_n(t))$, зная коэффициенты которого, можно найти (приближенно) функцию $Q(t, U_n(t), \omega_n(t))$, затем подставить эту функцию в правые части уравнений (1.1) и определить $U_{n+1}(t)$, $W_{n+1}(t)$.

Применение полиномов наилучшего приближения, конечно, никак не может облегчить трудности при доказательстве однозначной разрешимости поставленной задачи. Чтобы обойти их, автор использует уже знакомый прием. Э. Дуйшеев считает «что функции P, Q, $\ln V$ имеют ограниченные производные по U и ω:

$$\left|\frac{\partial P}{\partial U}\right| \leqslant L_1, \quad \left|\frac{\partial P}{\partial \omega}\right| \leqslant L_2, \quad \left|\frac{\partial Q}{\partial U}\right| \leqslant L_3, \quad \left|\frac{\partial Q}{\partial \omega}\right| \leqslant L_4$$

$$\left|\frac{Vu'}{V}\right| \leqslant L_5, \quad \left|\frac{V_\omega'}{V}\right| \leqslant L_6, \quad L_i = \text{const} \gg \tag{1.14}$$

На самом же деле первых четырех производных вообще не существует (см. выше), а априорная оценка двух последних производных ни на чем не основана: величина V может, очевидно, обращаться в нуль, а производные V_u', V_ω' — в бесконечность. Дальнейшие рассуждения автора основаны на использовании незаконной операции дифференцирования операторов Q, P и построении оценок для $|U_{n+1}(t) - U_n(t)|$, $|W_{n+1}(t) - W_n(t)|$, в которых величины L_i играют роль фиксированных постоянных. Заметим, кстати, что если бы процесс последовательных приближений и был сходящимся, то функции

$$U(t) = U_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (U_{n+1}(t) - U_n(t)), \qquad W(t) = W_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (W_{n+1}(t) - W_n(t))$$

получаемые в пределе, зависели бы от степени полинома наилучшего приближения и числа узлов, по которым он строится, и не давали бы решения поставленной задачи.

В работах [5, 6, 8] к рассматриваемым задачам помимо метода последовательных приближений автор пытается применить также метод малого параметра. Так, в работе [5], где рассматривается течение невесомой жидкости по криволинейному дну при учете сил капиллярности, делается попытка доказать следующее. Если при некотором значении $\lambda = \lambda_0$ (λ — коэффициент, характеризующий интенсивность поверхностных сил) решение задачи существует и дается функцией $W_0(t)$, которая удовлетворяет ряду условий, то при $\lambda = \lambda_0 + \mu$, $|\mu| < 1/2$ решение задачи также существует и может быть найдено в виде ряда

$$W(t) = W_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \psi_n(t) \tag{2.4}$$

Не останавливаясь подробно на выводе уравнений для неизвестных функций $\psi_n(t)$, заметим только, что в формуле

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\psi_n'(\xi)}{\xi - t} d\xi = F_n(t) \tag{2.8}$$

функция $F_n(t)$ имеет полюс первого порядка, что в точке $t = -1$.

Это противоречит предположению автора о том, что в точке $t = -1$ функция $\psi_n'(t)$ имеет интегрируемую особенность и делает незаконными дальнейшие преобразования.

Для функции $\psi_n(t)$ Э. Дуйшеев получает оценку

$$|\psi_n(t)| \leqslant \frac{\rho_0\rho_1 L_0(1 + R_0)}{4\pi|\lambda_0|}[2(1 + 3|\lambda_0|) + (1 + 2|\lambda_0|)n)2^n + |\alpha_0| \tag{2.21}$$

Здесь α_0, ρ_0, ρ_1, R_0 — некоторые фиксированные константы, а величина L_0 явно зависит от индекса n. Тем не менее, используя (2.21) для оценки ряда (2.4), автор выносит L_0 за знак суммы и приходит к выводу о том, что ряд (2.4) сходится абсолютно и равномерно *при* $|\mu| < 1/2$.

Заканчивая анализ работы [5], отметим такой любопытный факт. При определении функций $\psi_n(t)$, $t \in [-1, 1]$ Э. Дуйшеев использует условия $\psi_n(1) = 0$, $\psi_n(-1) = \alpha_0$, где α_0 — совершенно произвольная постоянная. Если бы все рассуждения автора были верны, то, заменив в последнем условии α_0 на α_n, получили бы не одно решение задачи, а целое семейство, зависящее от бесконечной последовательности произвольных постоянных α_n.

Вынесение величины, зависящей от индекса суммирования, за знак суммы применяется Э. Дуйшеевым и в работах [9, 10]. Помимо этого в работе [10] при исследовании сходимости ряда

$$\Pi(t/\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_n(t/\varepsilon)\lambda_1^n \tag{2.1}$$

после долгих и сложных преобразований и рассуждений автор совершенно произвольно предполагает, что при $n\to\infty$ существует предел

$$\lim\{\max|\Pi_n(t/\varepsilon)|/\max|\Pi_{n-1}(t/\varepsilon)|\}=L,\ 0<L<\infty$$

и заключает, что отсюда «следует равномерная сходимость ряда (2.1) при $|\lambda_1|<L^{-1}$, если $0<L<2$, и при $|\lambda_1|<2^{-1}$, если $2\leqslant L<\infty$» ([10], стр. 156).

Представление решений в виде рядов по степеням малого параметра применяется также в работах [8, 6]. В первой из них доказательство сходимости рядов заменено ссылкой на работу [10]. В работе [6] при построении рядов Э. Дуйшеев использует несуществующие производные всех порядков от оператора $P(t, U, \omega)$ по U и ω (см. выше). Доказательства сходимости рядов автор здесь не приводит, а сразу записывает некоторые оценки, содержащие большое количество констант. Об этих константах читателю не суждено узнать ничего, кроме того, что «L_{10}, M_0, N_0, N_1, C — положительные постоянные для известных функций» [6], стр. 35).

Ограниченный объем статьи не позволяет остановиться на всех недостатках рецензируемых работ. Однако сказанного выше вполне достаточно для того, чтобы утверждать, что работы [1–10] ошибочны и не содержат доказательства однозначной разрешимости рассмотренных задач. Чтение этих статей сильно затруднено тем, что автор многократно меняет обозначения, вводит без всякой необходимости большое количество констант и функций, многие из которых остаются совершенно не определенными, часто и неоправданно употребляет обороты «нетрудно видеть», неравенства такие-то показывают, что...» и т. п., в каждой из статей неоднократно отсылает читателя за разъяснениями к другим своим статьям, порою даже неопубликованным. По-видимому, именно этими обстоятельствами объясняется тот факт, что работы Э. Дуйшеева не получили должной оценки.

Поступило 26 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Дуйшеев Э. К вопросу о движении жидкости через криволинейное препятствие. Докл. 3-й Сибирск. конф. по матем. и механ., 1964, Томск, Томский ун-т, 1964.
2. Дуйшеев Э. К теории нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. В сб. «Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии», вып. 3, Фрунзе, «Илим», 1965.
3. Дуйшеев Э. О влиянии капиллярных сил на струйное истечение тяжелой жидкости. В сб. «Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии», вып. 3, Фрунзе, «Илим», 1965.
4. Дуйшеев Э. К вопросу о движении тяжелой жидкости через криволинейное препятствие. В сб. «Плоскопараллельное и осесимметрическое течение газов и жидкостей», Фрунзе, «Илим», 1966.
5. Дуйшеев Э. О некоторых методах решения нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения теории водослива. II. Тр. Кирг. гос. ун-та, Сер. матем. н., 1967, вып. 6.
6. Дуйшеев Э. О некоторых методах решения системы нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений теории водослива с учетом сил тяжести и поверхностного натяжения. Изв. АН КиргССР, 1968, № 4.
7. Дуйшеев Э. К теории водослива с криволинейным порогом. В сб. «Одномерное и двумерное течение газов и жидкостей», Фрунзе, «Илим», 1969.
8. Дуйшеев Э. О некоторых методах решения нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения теории водослива. В сб. «Одномерное и двумерное течение газов и жидкостей», Фрунзе, «Илим», 1969.
9. Дуйшеев Э. К теории нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром. Сб. «Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии», вып. 4, Фрунзе, «Илим», 1967.
10. Дуйшеев Э. Об одном классе нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. В сб. «Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии», вып. 6, Фрунзе, «Илим», 1969.