

Отсюда, вводя безразмерные величины и вычисляя $(\partial v_0 / \partial z)_{z=\lambda}$, получим

$$M = \frac{M^0 \omega^{1/2}}{\rho v^{5/2}} = 4\pi K r^2 (R^2 - 1) \left(\frac{1}{R^2} + \frac{K^2 \lambda^2}{98 r^4} \right) \quad (4.2)$$

Анализ характера изменения давления позволяет сделать вывод, что максимум p получается при значении $\lambda \approx 1.55$. Также замечено, что, начиная с $R > 3$, прирост давления незначителен и даже имеет тенденцию к уменьшению (фиг. 4, кривая I относится к полному, II — к статическому давлению).

В заключение отметим совпадение полученных результатов с экспериментальными данными Брайтера и Польгаузена [5].

Поступило 14 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз, 1960.
2. Перельман Р. Г., Поликовский В. И. Основы теории насосов дискового типа. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1963, № 1.
3. Rice W. An analytical and experimental investigation of multiple disk pumps and compressors. Trans. ASME, Ser. A, 1963, vol. 85, No. 3. (Рус. перев.: Энергетические машины и установки. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1963, т. 85, № 3.)
4. Чесноков В. М. О движении сильно вязкой жидкости между двумя вращающимися дисками. Изв. вузов, Пищевая технология, 1968, № 6.
5. Hasinger S. H., Kehrt L. G. Investigation of a gear — force pump. Trans. ASME, Ser. A, 1963, vol. 85, No. 3. (Рус. перев.: Энергетические машины и установки. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1963, т. 85, № 3.)
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехтеоретиздат, 1955.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
8. Kreith F. Reverse transition in radial gource between two parallel planes. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 6.

УДК 622.276.031:532.5:622.244.6:001.8

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ ПРИ ПУСКЕ СКВАЖИНЫ С САМОУСТАНОВЛИВАЮЩИМСЯ ДЕБИТОМ

А. М. ИЛЬЯСОВ, В. А. ИСЯКАЕВ, Г. Д. ЛИХОВОЛ, М. М. НАГУМАНОВ

(Октябрьский)

Рассматривается распределение давления в пласте при исследовании его испытателем на бурильных трубах. После пуска скважины происходит вначале заполнение жидкостью ее ствола — свободный период притока, а затем поджатие жидкости в замкнутом объеме — закрытый период притока. Вследствие этого условие на скважине состоит в пропорциональности временной и пространственной производных давления, а в момент закрытия скважины происходит скачок коэффициента пропорциональности.

Имеющиеся решения для задачи испытания пластов получены без начального условия, не учитывают изменение расхода жидкости перед остановкой [1] или требуют совместной регистрации расхода жидкости и изменения давления на забое в процессе испытания [2], т. е. не учитывают граничных условий реального процесса.

Ниже рассматривается упругий однородный изотропный пласт ограниченной мощности h , бесконечный по простиранию и характеризующийся постоянным коэффициентом пьезопроводности κ . Давление на бесконечности принимается постоянным и равным начальному P_0 . Дебит круговой цилиндрической скважины радиуса r_0 устанавливается в соответствии с давлением P на ее забое и гидропроводностью пласта kh / μ_0 . Давление в пласте в рассматриваемой задаче есть функция расстояния от оси скважины r , времени t и определяется интегрированием уравнения теплопроводности. Первая часть задачи — распределение давления в пласте при свободном притоке жидкости в промежутке $0 < t \leq t_1$ формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_1}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial P_1}{\partial t} \quad (1)$$

при граничных условиях

$$P_1 = P_\omega \quad (t = 0, r_0 < r < \infty), \quad P_1 = P_0 \quad (t = 0, r = r_0)$$

$$P_1 = P_\omega \quad (t > 0, r \rightarrow \infty).$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{8r_0 kh \gamma_0}{\mu_0 d^2} \frac{\partial P_1}{\partial r} \quad (0 < t < t_1, r = r_0)$$

Здесь γ_0 — удельный вес жидкости, d — внутренний диаметр бурильных труб. Применим преобразование Лапласа к уравнению (1)

$$\frac{d^2 P_1^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP_1^*}{dr} - q^2 P_1^* = -\frac{1}{\kappa} P_\omega, \quad q = \left(\frac{p}{\kappa} \right)^{1/2} \quad (2)$$

где p — переменная Лапласа. Граничные условия будут иметь вид

$$-P_0 + pP_1^* = C_1 dP_1^* / dr \quad (0 < t < t_1, r = r_0) \quad (3)$$

$$P_1^* = \frac{P_\omega}{p} \quad (r \rightarrow \infty), \quad C_1 = \frac{8r_0 kh \gamma_0}{\mu_0 d^2} \quad (4)$$

Общее решение уравнения (2) с учетом граничных условий (3), (4) имеет вид [3, 4]

$$P_1^* = \frac{P_\omega}{p} + \frac{(P_\omega - P_0) K_0(qr)}{C_1 q K_0'(qr_0) - p K_0(qr_0)} \quad (5)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода. По теореме обращения

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \left[\frac{P_\omega}{\lambda} + \frac{(P_\omega - P_0) K_0(\mu r)}{C_1 \mu K_0'(\mu r_0) - \lambda K_0(\mu r_0)} \right] d\lambda, \quad \mu = \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)^{1/2}$$

Подынтегральная функция неоднозначна в точке $\lambda = 0$, поэтому контур интегрирования имеет вид, представленный на фиг. 1. Интеграл по большой окружности при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а по малой окружности при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к P_ω . Интеграл по CD стремится к интегралу от $-\infty$ до 0. Положим здесь $\lambda = \kappa u^2 e^{-i\pi}$, тогда

$$(\lambda / \kappa)^{1/2} = -iu, \quad d\lambda = 2\kappa u e^{-i\pi} du$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda = -\frac{P_\omega}{\pi i} \int_0^\infty e^{-\kappa u^2 t} \frac{du}{u} - \frac{(P_\omega - P_0) \kappa}{\pi i} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\kappa u^2 t} \frac{[J_0(ur) + iY_0(ur)] du}{C_1 [J_1(ur_0) + iY_1(ur_0)] - \kappa u [J_0(ur_0) + iY_0(ur_0)]}$$

Интеграл по EF стремится к интегралу от 0 до $-\infty$. Положим здесь $\lambda = \kappa u^2 e^{i\pi}$, тогда

$$(\lambda / \kappa)^{1/2} = iu, \quad d\lambda = 2\kappa u e^{i\pi} du$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} e^{\lambda t} f(\lambda) d\lambda = \frac{P_\omega}{\pi i} \int_0^\infty e^{\kappa u^2 t} \frac{du}{u} +$$

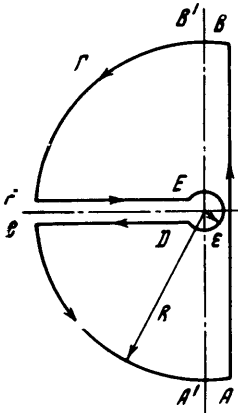
$$+ \frac{(P_\omega - P_0) \kappa}{\pi i} \int_0^\infty e^{-\kappa u^2 t} \frac{[J_0(ur) - iY_0(ur)] du}{C_1 [J_1(ur_0) - iY_1(ur_0)] - \kappa u [J_0(ur_0) - iY_0(ur_0)]}$$

В результате

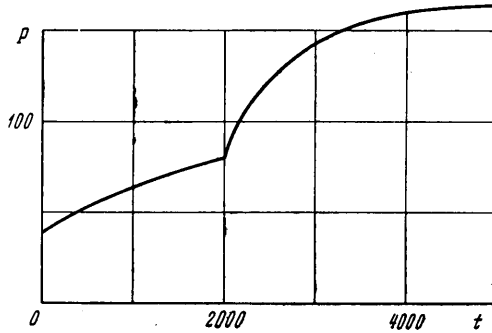
$$P_1 = P_\omega + \frac{2\kappa(P_\omega - P_0)}{\pi} \times$$

$$\times \int_0^\infty e^{-\kappa u^2 t} \frac{J_0(ur) [C_1 Y_1(ur_0) - \kappa u Y_0(ur)] - Y_0(ur) [C_1 J_1(ur_0) - \kappa u J_0(ur_0)] du}{[C_1 Y_1(ur_0) - \kappa u Y_0(ur)]^2 + [C_1 J_1(ur_0) - \kappa u J_0(ur_0)]^2} \quad (6)$$

Здесь Y_0, Y_1 — функции Неймана — Бесселя второго рода, J_0, J_1 — функции Бесселя первого рода.



Фиг. 1



Фиг. 2

Вторая часть задачи состоит в описании распределения давления в пласте в промежутке $t \geq t_1$, когда происходит приток в замкнутый объем за счет упругого сжатия жидкости, и формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_2}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial P_2}{\partial \tau} \quad (7)$$

$$P_2 = \varphi(r) \quad (\tau = 0, \quad r_0 \leq r < \infty), \quad P_2 = P_\omega \quad (\tau > 0, \quad r \rightarrow \infty)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \tau} = \frac{2\pi r_0 k h}{\mu_0 \beta v_0} \frac{\partial P_2}{\partial r} \quad (\tau > 0, \quad r = r_0)$$

Функция $\varphi(r)$ есть распределение давления в пласте (6) при $\tau = 0$. Для больших значений времени можно сделать следующие приближения:

$$J_0(z) \approx 1, \quad J_1(z) \approx 0, \quad Y_0(z) \approx \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{C}{2} z \right], \quad Y_1(z) \approx -\frac{2}{\pi} \frac{1}{z}$$

где $\ln C = 0.5772$ — постоянная Эйлера. Подставляя в уравнение (6), получаем

$$\varphi(r) = A_2 + B_2 \ln(r/r_0)$$

$$A_2 = P_\omega - (P_\omega - P_0) \int_0^\infty e^{-\kappa u \tau} \frac{C_1(\kappa u r_0)^{-1} du}{[C_1(\kappa u r_0)^{-1} + u \ln(1/2 \kappa u r_0)]^2 + 1/4 \pi^2 u^2}$$

$$B_2 = (P_\omega - P_0) \int_0^\infty e^{-\kappa u \tau} \frac{u du}{[C_1(\kappa u r_0)^{-1} + u \ln(1/2 \kappa u r_0)]^2 + 1/4 \pi^2 u^2}$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (7)

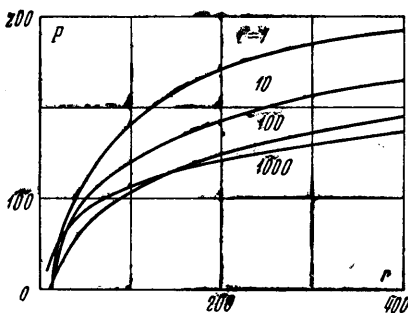
$$\frac{d^2 P_2^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP_2^*}{dr} - q^2 P_2^* = -\frac{1}{\kappa} \left(A_2 + B_2 \ln \frac{r}{r_0} \right), \quad q = \left(\frac{p}{\kappa} \right)^{1/2} \quad (8)$$

$$P_2^* = \frac{P_\omega}{p} \quad (r \rightarrow \infty), \quad p P_2^* - A_2 = C_2 \frac{dP_2^*}{dr} \quad (r = r_0), \quad C_2 = \frac{2\pi r_0 k h}{\mu_0 \beta v_0} \quad (9)$$

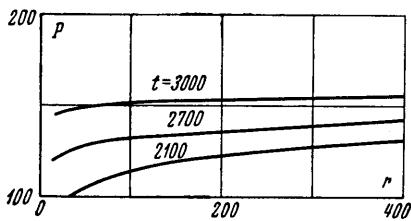
Общее решение уравнения (8) с учетом граничных условий (9) имеет вид

$$P_2^* = \frac{1}{p} \left(A_2 + B_2 \ln \frac{r}{r_0} \right) + \frac{r_0^{-1} B_2 C_2 K_0(qr)}{\kappa p q [q K_0(qr_0) + \kappa^{-1} C_2 K_1(qr_0)]} \quad (10)$$

Сравнение вторых членов в выражениях (5) и (10) показывает, что они отличаются постоянными множителями и на величину $1/p$, поэтому для нахождения P_2



Фиг. 3



Фиг. 4

воспользуемся теоремой [5]

$$\Delta \left\{ \int_0^t v(t') dt' \right\} = \frac{1}{p} \Delta(v), \quad \Delta\{v\} = v^*$$

$$P_2 = A_2 + B_2 \ln \frac{r}{r_0} + \int_0^{\tau} \left\{ \frac{C_2 B_2 \kappa}{r_0} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\kappa u t'} \times \frac{J_0(ur) [C_2 Y_1(ur_0) - \kappa u Y_0(ur_0)] - Y_0(ur) [C_2 J_1(ur_0) - \kappa u J_0(ur_0)]}{[C_2 Y_1(ur_0) - \kappa u Y_0(ur_0)]^2 + [C_2 J_1(ur_0) - \kappa u J_0(ur_0)]^2} du \right\} d\tau$$

Изменяя порядки интегрирования, окончательно имеем

$$P_2 = A_2 + B_2 \ln \frac{r}{r_0} + \frac{2B_2 r_0 C_2}{\pi \kappa} \int_0^{\infty} [1 - e^{-\kappa u \tau}] \times \frac{J_0(ur) [\kappa^{-1} C_2 Y_1(ur_0) - u Y_0(ur_0)] - Y_0(ur) [\kappa^{-1} C_2 J_1(ur_0) - u J_0(ur_0)]}{[\kappa^{-1} C_2 Y_1(ur_0) - u Y_0(ur_0)]^2 + [\kappa^{-1} C_2 J_1(ur_0) - u J_0(ur_0)]^2} \frac{du}{u^2} \quad (11)$$

Выражения (6) и (11) были запрограммированы для расчетов на ЭВМ.

Фиг. 2 показывает изменение давления на забое скважины для следующих данных: $r_0 = 10$ см, $\kappa = 50\,000$ см²/сек, $C_1 = 0.01$, $C_2 = 0.1$. Как видно, открытый период притока характеризуется плавным нарастанием давления, а закрытый — крутым.

На фиг. 3 и 4 дано распределение давления в пласте при фиксированных значениях времени соответственно для открытого и закрытого периодов. Видно, что депрессионная воронка вначале очень крутая. По мере накопления жидкости в стволе скважины происходит гашение воронки в прискважинной части, в то время как размеры ее быстро растут, и отмечается существенное снижение давления в отдаленных участках пласта.

В закрытом периоде притока изменение давления в пласте очень медленное. Упругое поджатие осуществляется по всему пласту.

Поступило 7 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Zak A. I., Griffin P. Here's a method for evaluating D. S. T. data. Oil and Gas J., 1957, vol. 15.
2. Щербakov Г. Д. Методы обработки кривых притока, получаемых при опробовании пласта при помощи испытателя. Нефтяное хоз-во, 1962, № 3.
3. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Л., Изд-во ЛГУ, 1955.
4. Карслоу Г., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.