$t_w = 0.135$, $p = 0.3$ н/м^2), полученных для описанных выше сопл, на этих фигурах приведены точки *3—5* для других исследованных сопл с $\alpha = 20°$ при следующих значениях параметров соответственно: $p = 0.4$ н/м^2, $4 < M < 7$, $t_w = 1$; $p = 0.4$ н/м^2, $4 < M < 7$, $t_w = 0.5$ и $p = 10^2$ н/м^2, $M \approx 7$, $t_w = 0.5$. Точка *6* на фиг. 5 нанесена по данным [4], полученным при $M = 26$, $p = 8.6 \cdot 10^{-2}$ н/м^2, $t_w = 0.07$, $\alpha = 15°$. Обработанные в таком виде экспериментальные точки в широком диапазоне давлений, чисел Маха, углов сопл и значений температурного фактора удовлетворительно коррелируют между собой, а полученные эмпирические кривые могут быть использованы для расчета конических сопл [1].

Авторы благодарят А. А. Васильева и В. Г. Фарафонова за полезные обсуждения.

Поступило 13 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Евсеев Г. А. Экспериментальное исследование течения разреженного газа. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
2. Агафонов В. П. Взаимодействие пограничного слоя с гиперзвуковым потоком в коническом сопле. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.
3. McDermott W., Shirley B., Dix R. Low density boundary layer control by liquid hydrogen cryopumping. Rarefied Gas Dynamics, New York — London, Acad. Press., 1966, Suppl. 3, vol. 2.
4. Joss W., Vas J., Bogdonoff S. Studies of the leading edge effect on the rarefied hypersonic flow over a flat plate. AIAA paper, 1968, No. 5, No. 68—5.

УДК 621.652.001.24

ЛАМИНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

В. И. МИСЮРА

(Днепропетровск)

Теоретически исследуется ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости от центра к периферии в зазоре между двумя параллельными равномерно вращающимися с одинаковой угловой скоростью дисками. Получено приближенное решение задачи, выполненное с помощью итерационного метода, которое дает расчетные формулы для вычисления основных параметров потока.

1. Постановка задачи. В опубликованных ранее работах чаще рассматривался турбулентный поток между двумя параллельными равномерно вращающимися с одинаковой угловой скоростью дисками [2] [1–3]. При изучении ламинарного течения между двумя вращающимися дисками [4, 5], а также на отдельном диске [6] обычно усредняли ряд величин и задавались законом изменения скорости и давления. Здесь предлагается асимптотическое решение задачи, которое позволяет исследовать влияние геометрии дисков и свойств жидкости на характер изменения основных параметров потока.

Течение принято установившимся, симметричным относительно оси $z°$, нормальной к плоскости дисков и срединной плоскости $z° = 0$. Кроме того, в уравнениях Навье — Стокса сохранены лишь те вязкие члены, которые содержат производные по направлению нормали к плоскости дисков. Тогда исходная система уравнений в цилиндрической системе координат в предположении, что $2a \ll r°$, $v_z° \ll v_r°$ и $v_z° \ll v_\theta°$ в безразмерной форме запишется так:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_r v_\theta}{r} = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

---

[1] При $Y > 0.4$ корреляция несколько ухудшается и отличия M / M_r от средней кривой могут достигать 15—20%.

[2] Захаров А. Ф. Исследование насосного эффекта вращающегося диска. Канд. дисс., Казанск. авиац. ин-т, 1954.

Граничные условия

$$v_r = 0, \quad v_\theta = r, \quad v_z = 0 \quad (z = \pm\lambda)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = 0, \quad v_z = 0 \quad (z = 0) \tag{1.2}$$

$$p(r_1, z) = p_1 = \mathrm{const} \quad (r = r_1) \qquad r_2 \int_0^\lambda v_{r2}\, dz = K \quad (r = r_2)$$

$$r = r^\circ \left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/2}, \quad z = z^\circ \left(\frac{a}{\nu}\right)^{1/2}, \quad v_r = \frac{v_r^\circ}{(\omega\nu)^{1/2}}, \quad v_\theta = \frac{v_\theta^\circ}{(\omega\nu)^{1/2}}$$

$$v_z = \frac{v_z^\circ}{(\omega\nu)^{1/2}}, \quad p = \frac{p^\circ}{\rho\omega\nu}, \quad p_1 = \frac{p_1^\circ}{\rho\omega\nu}, \quad \lambda = a\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{1/2}, \quad K = \frac{q\omega^{1/2}}{4\pi\nu^{3/2}}$$

Здесь v_r°, v_θ° и v_z° — радиальная, тангенциальная и осевая составляющие абсолютной скорости, q — секундный расход жидкости через зазор, p°, p_1° — давление жидкости на произвольном радиусе дисков r° и на входе в междисковое пространство ($r^\circ = r_1^\circ$), r_1° и r_2° — внутренний и внешний радиусы кольцеобразных дисков, $2a$ — ширина зазора между дисками, ω — угловая скорость вращения, ν, ρ — кинематическая вязкость и плотность жидкости, v_{r2} — радиальная составляющая скорости на выходе.

2. Решение системы уравнений. После интегрирования по z из (1.1), (1.2) получаем выражения для скоростей v_z, v_r и v_θ

$$v_z = -\int_0^z \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right] dz, \qquad v_\theta = r + y(r, z) - Y(r)$$

$$v_r = 0.5\frac{\partial p}{\partial r}(z^2 - \lambda^2) + x(r, z) - X(r) \tag{2.1}$$

$$x(r, z) = \int_0^z \int_0^{z'} \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r}\right) dz'\, dz''$$

$$y(r, z) = \int_0^z \int_0^{z'} \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} - \frac{v_r v_\theta}{r}\right) dz'\, dz''$$

$$X(r) = x(r, \lambda), \qquad Y(r) = y(r, \lambda)$$

Подстановка полученного выражения для v_r в последнее уравнение (1.1) и новое интегрирование по z от 0 до λ с учетом граничного условия при $z = 0$ дает

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right) = \frac{3}{\lambda^3}\frac{d}{dr}\left[\left(\int_0^\lambda x(r, z)\, dz - X(r)\right) r\right] \tag{2.2}$$

Интегрируя (2.2) дважды на промежутке от r_1 до r_2, с использованием (1.2) и (2.1), получим закон изменения давления при течении

$$p = p_1 + \frac{3}{\lambda^3} f(r) - \frac{3K}{\lambda^3} \ln\frac{r}{r_1} \tag{2.3}$$

$$f(r) = \int_{r_1}^{r_2} [F(r) - X(r)]\, dr, \qquad F(r) = \int_0^\lambda x(r, z)\, dz$$

Формулы (2.1) и (2.3) определяют основные параметры потока. Для вывода более простых расчетных соотношений воспользуемся методом итераций, который позволяет получить приближенный результат при конечном числе шагов.

3. Вывод расчетных формул. В качестве первого приближения для построения итерационного процесса рассмотрим случай, когда вязкостные силы значительно больше инерционных [7], т. е. «ползущее» движение жидкости от центра к периферии. Тогда, пренебрегая в уравнениях малыми инерционными величинами, получим

$$x^{(1)}(r,z) = -0.5\,rz^2, \quad X^{(1)}(r) = -0.5r\lambda^2, \quad f^{(1)}(r) = \frac{\lambda^3}{6}(r^2 - r_1^2)$$

$$F^{(1)}(r) = -\frac{\lambda^3}{6}r, \quad y^{(1)}(r,z) = 0, \quad Y^{(1)}(r) = 0$$

$$v_\theta^{(1)} = r, \quad v_z^{(1)} = 0, \quad v_r^{(1)} = \frac{1.5\,K}{r\lambda^3}(\lambda^2 - z^2)$$

$$p^{(1)} = p_1 + 0.5(r^2 - r_1^2) - \frac{3K}{\lambda^3}\ln\frac{r}{r_1}$$

Используя теперь (3.1) для расчета второго приближения, имеем

$$x^{(2)}(r,z) = -\frac{2.25K^2}{\lambda^6 r^3}\left(\frac{z^6}{30} - \frac{z^4\lambda^2}{6} + \frac{\lambda^4 z^2}{2}\right) - 0.5rz^2$$

$$X^{(2)}(r) = -\frac{99}{120}\frac{K^2}{r^3} - 0.5r\lambda^2, \quad F^{(2)}(r) = -\frac{1}{6}r\lambda^3 - \frac{261}{840}\frac{K^2\lambda}{r^3}$$

$$f^{(2)}(r,z) = \frac{\lambda^3(r^2 - r_1^2)}{12} - \frac{18}{35}K^2\lambda\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)$$

$$y^{(2)}(r,z) = -\frac{0.25K}{r\lambda^3}(z^4 - 6\lambda^2 z^2), \quad Y^{(2)}(r) = 1.25\frac{\lambda K}{r}$$

$$p^{(2)} = p_1 + 0.5(r^2 - r_1^2) - \frac{3K}{\lambda^3}\ln\frac{r}{r_1} - \frac{27}{35}\frac{K^2}{\lambda^2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)$$

$$v_\theta^{(2)} = r - \frac{0.25K}{\lambda^3 r}(5\lambda^4 - 6\lambda^2 z^2 + z^4)$$

$$v_r^{(2)} = \frac{1.5K}{\lambda^3 r}(\lambda^2 - z^2) - \frac{1.125K}{r^3\lambda^6}\left(\frac{z^6}{15} - \frac{\lambda^2 z^4}{3} + \frac{11}{35}\lambda^4 z^2 - \frac{\lambda^6}{21}\right) \tag{3.2}$$

$$v_z^{(2)} = \frac{0.75K^2}{\lambda^6 r^4}\left(-\frac{z^7}{35} + \frac{\lambda^2 z^5}{5} - \frac{11}{35}\lambda^4 z^3 + \frac{\lambda^6 z}{7}\right)$$

Аналогично получим результаты третьего приближения

$$v_r^{(3)} = \frac{1.5K}{\lambda r}(1 - Z^2) - \frac{0.375K}{r^3}\left(0.2Z^6 - Z^4 + \frac{33}{35}Z^2 - \frac{1}{7}\right) +$$

$$+ \frac{0.25K\lambda^3}{r}\left(\frac{1}{15}Z^6 - Z^4 + \frac{39}{35}Z^2 - \frac{19}{105}\right) + \frac{0.125K^2\lambda^4}{r^3} \times$$

$$\times\left(-\frac{1}{190}Z^{10} + \frac{3}{28}Z^8 - \frac{23}{30}Z^6 + \frac{5}{2}Z^4 - \frac{9931}{4620}Z^2 + \frac{4361}{11360}\right) +$$

$$+ 0.75\frac{K^3\lambda}{r^5}\left(-\frac{1}{175}Z^{10} + \frac{3}{56}Z^8 - \frac{57}{350}Z^6 + \frac{33}{140}Z^4 - \frac{739}{5390}Z^2 + \frac{1767}{107800}\right) +$$

$$+ \frac{0.375K^4\lambda^2}{r^7}\left(-\frac{27}{254800}Z^{14} + \frac{43}{30800}Z^{12} - \frac{17}{2450}Z^{10} + \frac{291}{19600}Z^8 - \right.$$

$$-\frac{293}{19600}Z^6+\frac{33}{3976}Z^4-\frac{292077}{98098078}Z^2+\frac{320051}{98098000}\Big)$$

$$v_\theta{}^3 = r-\frac{0.25K\lambda}{r}(Z^4-6Z^2+5)-\frac{0.125K^2\lambda^2}{r^3}\left(\frac{3}{140}Z^8-\frac{1}{5}Z^6+\right.$$

$$\left.+\frac{33}{70}Z^4-\frac{3}{7}Z^2+\frac{19}{140}\right)+\frac{K^3\lambda^3}{r^5}\left(\frac{1}{6160}Z^{12}-\frac{1}{420}Z^{10}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{245}Z^8-\frac{19}{700}Z^6+\frac{3}{112}Z^4-\frac{350783}{36279600}\right)$$

$$v_z^{(3)} = \frac{0.75K^2\lambda}{r^4}\left(-\frac{1}{35}Z^7+\frac{1}{5}Z^5-\frac{11}{35}Z^3+\frac{1}{7}Z\right)+$$

$$+\frac{0.125K^2\lambda^5}{r^4}\left(-\frac{1}{990}Z^{11}+\frac{1}{42}Z^9-\frac{23}{105}Z^7+Z^5-\frac{9931}{6930}Z^3+\right.$$

$$\left.+\frac{4361}{6930}Z\right)+\frac{K^3\lambda^2}{r^6}\left(-\frac{3}{1925}Z^{11}+\frac{1}{56}Z^9-\frac{171}{2450}Z^7+\right.$$

$$\left.+\frac{99}{700}Z^5-\frac{739}{5390}Z^3+\frac{5301}{107800}Z\right)+\frac{0.75K^4\lambda^3}{r^8}\left(-\frac{27}{127400}Z^{15}+\right.$$

$$+\frac{129}{400400}Z^{13}-\frac{409}{213100}Z^{11}+\frac{97}{19600}Z^9-\frac{879}{137200}Z^7+$$

$$\left.+\frac{99}{19881}Z^5-\frac{584154}{196196156}Z^3+\frac{96151}{196196000}Z\right)$$

$$p^{(3)}-p_1 = 0.5r^2\left(1-\frac{1}{R^2}\right)-\frac{3K}{\lambda^3}\ln R+\frac{27}{35}\frac{K^2(R^2-1)}{r^2\lambda^2}-\frac{68}{35}K\lambda\ln R+$$

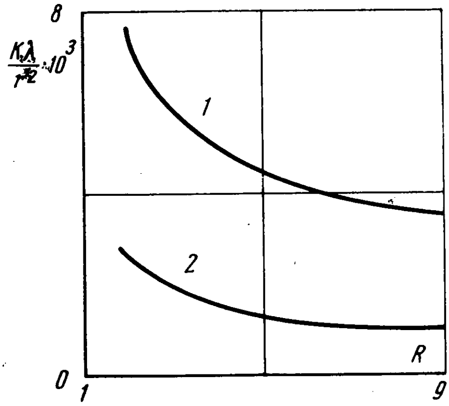
$$+\frac{K^2\lambda^2(R^2-1)}{r^2}+\frac{78}{2695}\frac{K^3}{\lambda r^4}(R^4-1)+\frac{6516}{6131125}\frac{K^4}{r^6}(R^6-1),$$

$$Z = z/\lambda, \qquad R = r/r_1$$

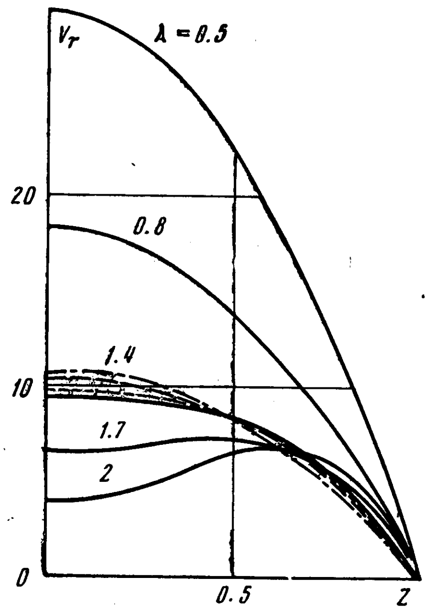
Получать последующие приближения в функциональном виде нецелесообразно, так как выражения становятся громоздкими. К тому же расчет итерационного процесса на ЭЦВМ «Минск-22» показал, что для определенной области значений параметров K, λ, R и r формулы третьего приближения дают приемлемую точность. Найти диапазон изменения параметров, для которого последующие итерации уже не нужны, не удалось.

4. Анализ решения. Предположения, введенные при постановке задачи, накладывают ограничение на область применимости полученных результатов. Точность расчетов возрастает с увеличением r и уменьшением K и λ. Для комбинаций параметров K, λ, R и r, дающих точки ниже кривых *1* и *2* на фиг. 1, где $\lambda < 2$, формулы третьего приближения позволяют произвести расчет соответственно с точностью до $\sim 1\%$ и $\sim 3\%$. Результаты первого (штрих-пунктирная линия), второго (пунктирная линия) и четвертого (точечная линия) приближений для $\lambda = 1.4$ нанесены на графики изменения основных параметров, которые приведены ниже. Во всех расчетах было принято $K = 2.1\cdot10^4$, $r = 2.1\cdot10^3$, $p_1 = 0$.

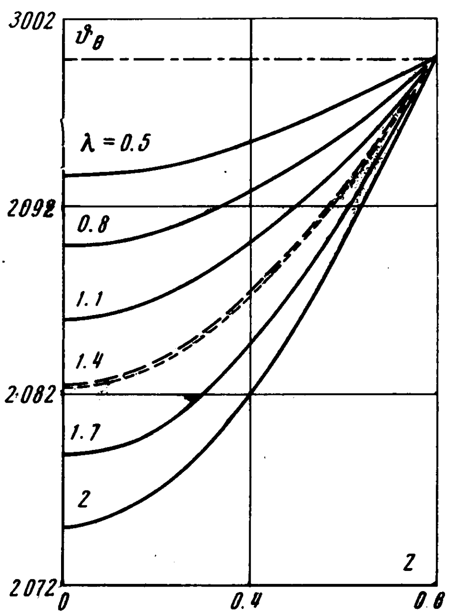
Профиль радиальной скорости v_r по мере увеличения параметра течения λ становится более «тупым», претерпевая при $\lambda \approx 1.6$ перегиб в срединной части (фиг. 2). Аналогичный характер изменения профиля наблюдается при уменьшении r и увеличении расходного параметра K. В работе [8] экспериментально установлено, что в радиальном потоке между неподвижными параллельными дисками, направленном к периферии, ламинарный режим существует до тех пор, пока профиль v_r не деформирован. Поэтому можно предположить, что и в данном случае при появлении на профиле v_r перегиба начинается переход к турбулентному режиму. Из эпюры изменения окружной составляющей скорости (фиг. 3) видно, что с уменьшением λ среднее значение v_θ в зазоре стремится к окружной скорости дисков. Аналогично на v_θ влияет увеличение r.



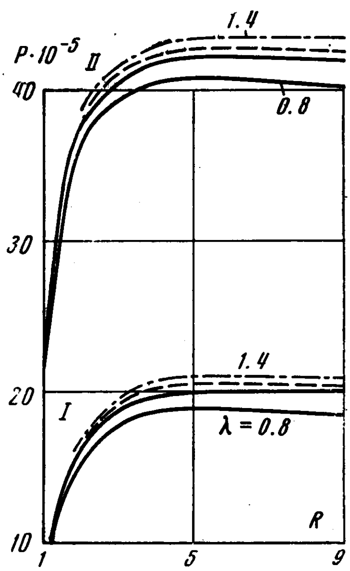
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Знание составляющих v_θ, v_r и v_z позволяет вычислить абсолютную скорость жидкости на выходе из междискового пространства, динамическую составляющую полного давления, а также определить величину крутящего момента, необходимого для привода дисковой пары

$$M^\circ = 2\int_{r_1^\circ}^{r^\circ} 2\pi r^{\circ 2}\rho\nu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z^\circ}\right)_{z^\circ = a} dr^\circ \tag{4.1}$$

Отсюда, вводя безразмерные величины и вычисляя $(\partial v_\theta / \partial z)_{z=\lambda}$, получим

$$M = \frac{M^\circ \omega^{1/2}}{\rho \nu^{5/2}} = 4\pi K r^2 (R^2 - 1) \left(\frac{1}{R^2} + \frac{K^2 \lambda^2}{98 r^4} \right) \tag{4.2}$$

Анализ характера изменения давления позволяет сделать вывод, что максимум p получается при значении $\lambda \approx 1.55$. Также замечено, что, начиная с $R > 3$, прирост давления незначителен и даже имеет тенденцию к уменьшению (фиг. 4, кривая I относится к полному, II — к статическому давлению).

В заключение отметим совпадение полученных результатов с экспериментальными данными Брайтера и Польгаузена [5].

Поступило 14 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М., Физматгиз, 1960.
2. Перельман Р. Г., Поликовский В. И. Основы теории насосов дискового типа. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1963, № 1.
3. Rice W. An analytical and experimental investigation of multipe disk pumps and compressors. Trans. ASME, Ser. A, 1963, vol. 85, No. 3. (Рус. перев.: Энергетические машины и установки. Тр. Америк. о-ва. инж.-механ., 1963, т. 85, № 3.)
4. Чесноков В. М. О движении сильно вязкой жидкости между двумя вращающимися дисками. Изв. вузов, Пищевая технология, 1968, № 6.
5. Hasinger S. H., Kehrt L. G. Investigation of a ghear — force pump. Trans. ASME, Ser. A, 1963, vol. 85, No. 3. (Рус. перев.: Энергетические машины и установки. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1963, т. 85, № 3.)
6. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехтеоретиздат, 1955.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
8. Kreith F. Reverse transition in radial gource between two parallel planes. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 6.

УДК 622.276.031:532.5:622.244.6:001.8

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ПЛАСТЕ ПРИ ПУСКЕ СКВАЖИНЫ С САМОУСТАНАВЛИВАЮЩИМСЯ ДЕБИТОМ

А. М. ИЛЬЯСОВ, В. А. ИСЯКАЕВ, Г. Д. ЛИХОВОЛ, М. М. НАГУМАНОВ

(Октябрьский)

Рассматривается распределение давления в пласте при исследовании его испытателем на бурильных трубах. После пуска скважины происходит вначале заполнение жидкостью ее ствола — свободный период притока, а затем поджатие жидкости в замкнутом объеме — закрытый период притока. Вследствие этого условие на скважине состоит в пропорциональности временной и пространственной производных давления, а в момент закрытия скважины происходит скачок коэффициента пропорциональности.

Имеющиеся решения для задачи испытания пластов получены без начального условия, не учитывают изменение расхода жидкости перед остановкой [1] или требуют совместной регистрации расхода жидкости и изменения давления на забое в процессе испытания [2], т. е. не учитывают граничных условий реального процесса.

Ниже рассматривается упругий однородный изотропный пласт ограниченной мощности h, бесконечный по простиранию и характеризующийся постоянным коэффициентом пьезопроводности $\varkappa$. Давление на бесконечности принимается постоянным и равным начальному P_∞. Дебит круговой цилиндрической скважины радиуса r_0 устанавливается в соответствии с давлением P на ее забое и гидропроводностью пласта kh / μ_0. Давление в пласте в рассматриваемой задаче есть функция расстояния от оси скважины r, времени t и определяется интегрированием уравнения теплопроводности. Первая часть задачи — распределение давления в пласте при свободном притоке жидкости в промежутке $0 < t \leqslant t_1$ формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_1}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial P_1}{\partial t} \tag{1}$$