

УДК 538.4

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В СЕКЦИОНИРОВАННОМ МГД ГЕНЕРАТОРЕ ПРИ КОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ СТенок НА ВХОДЕ В КАНАЛ

Н. Г. НЕМКОВА

(Москва)

В большинстве работ, связанных с исследованием концевых эффектов в МГД устройствах, рассматривались стенки канала, которые состоят из диэлектриков и электродов [1], либо из секционированных, либо из сплошных электродов и примыкающего к ним изоляционного [2, 3] или металлического сопла [4, 5]. Выбор таких граничных условий не всегда позволяет получить физически реальное представление о поведении электрических параметров в канале и на его стенках. Следует заметить, что поверхность контакта проводящей среды со стенками является весьма важным физическим фактором, влияющим на карту распределения электрических полей в магнитогидродинамическом канале. Поэтому важно учитывать в постановке задач конечную проводимость материала, из которого состоят стенки канала. Впервые граничное условие на тонкой стенке, учитывающее ее конечную проводимость, было выдвинуто в работе [6].

До настоящего времени эффект конечной проводимости стенок рассматривался в основном в теории ламинарных магнитогидродинамических течений вязкой несжимаемой жидкости (см., например, [7-9]). В работе [10] было получено распределение электрических параметров в поперечном сечении канала МГД генератора и проанализирована зависимость джоулевой диссипации от коэффициента проводимости стенки и от числа Гартмана. Продольная картина растекания электрического тока в МГД каналах со сплошными конечно проводящими стенками изучалась в работах [6, 11]. Если же учитывать конечную проводимость только на некоторых участках стенки МГД канала, то решение краевых электродинамических задач существенно осложняется. Целесообразность постановок таких задач связана с практически важными вопросами более точной оценки концевых потерь в МГД генераторах большой мощности, оценками утечек полезного тока на проводящие элементы стенок канала и т. д. Данная работа посвящена изучению влияния конечной электропроводности входных участков на концевой эффект в секционированном МГД генераторе.

Рассмотрена краевая задача об определении электрических полей в плоском канале при учете конечной проводимости стенок в одной его половине и идеального секционирования электродов в другой. Подобный выбор граничных условий вызван особенностями конструирования каналов ряда современных МГД устройств.

Полученное точное решение задачи дало возможность исследовать интегральные характеристики МГД генератора и оценить потери, связанные с концевыми эффектами. Приведены графики потенциала, функции тока и плотности тока вдоль стенки канала, а также показана зависимость интегральных характеристик от проводимости стенки, которая примыкает к рабочей зоне канала МГД генератора.

1. Постановка задачи. По плоскому каналу (фиг. 1) протекает изотропно проводящая среда с постоянной скоростью V . Внешнее магнитное поле имеет составляющую, направленную поперек канала $\mathbf{B} = \{0, 0, B_0 f(x)\}$, и не сильно искажается индуцированными магнитными полями.

Из уравнения неразрывности следует существование функции тока $\omega(x, y)$, которая связана с электрическим потенциалом $\varphi(x, y)$ на основании закона Ома для изотропно проводящей среды следующими соотношениями:

$$j_x = \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad j_y = -\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - f(x) \quad (1.1)$$

Значения электрического поля, плотности тока и координаты являются безразмерными величинами и относятся соответственно к $VB_0\delta$, σVB_0 и δ .

На стенках канала $y = \pm 1$ при $x < 0$ задано условие Шерклифа

$$\pm \kappa \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f(x) \quad \left(\kappa = \frac{\sigma_0 h}{\sigma \delta} \right) \quad (1.2)$$

Здесь σ_0 — проводимость стенки, h — ее толщина.

Граничное условие на стенках $y = \pm 1$ при $x > 0$ соответствует физическому предположению об идеальном секционировании электродной стенки в рабочей зоне канала

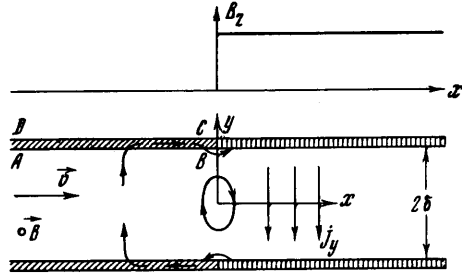
$$j_y = -(1 - K) = \text{const} \quad (1.3)$$

Параметр K в зоне однородного распределения тока является отношением наведенной электродвижущей силы к разности потенциалов между стенками при холостом ходе МГД генератора.

Асимптотические условия для потенциала, функции тока и плотности тока следующие:

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \omega \rightarrow 0, \quad \mathbf{j} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (1.4)$$

$$j_x \rightarrow 0, \quad j_y \rightarrow \text{const} \quad (x \rightarrow +\infty)$$



Фиг. 1

При выводе условия (1.2) предполагается, что через внешнюю границу стенок ($|y| = 1 + h/\delta$) не происходит отвода тока на внешние нагрузки. Будем также считать, что перетекание тока из стенок при $x < 0$ в стенки при $x > 0$ происходит только через проводящую жидкость. Тогда суммарный ток, втекающий в стенку при $x < 0$, должен равняться нулю, и из (1.1) и (1.4) получаем

$$\int_{-\infty}^0 j_y|_{y=1} dx = \omega(-0, 1) - \omega(-\infty, 1) = \omega(-0, 1) = 0 \quad (1.5)$$

В силу граничных условий (1.2) и (1.3) функция $\varphi(x, y)$ нечетная по y , что позволяет решить задачу для половины канала $0 < y < 1$ с условием на его оси

$$\varphi = 0 \quad (|x| < \infty, y = 0) \quad (1.6)$$

Тождества (1.1) показывают, что решение задачи об отыскании потенциала $\varphi(x, y)$ эквивалентно определению в канале функции тока $\omega(x, y)$.

Зададим безразмерную компоненту магнитного поля функцией Хевисайда и введем следующие обозначения для ω :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}, \quad \omega(x, y) = \begin{cases} \omega_1 & (x < 0) \\ \omega_2 & (x > 0) \end{cases}$$

Тогда на основании формул (1.1) — (1.6) имеем для функций ω_1 и ω_2 систему уравнений и граничных условий

$$\Delta \omega_1 = 0, \quad \Delta \omega_2 = 0 \quad (1.7)$$

$$\omega_1 + \kappa \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = 0 \quad (x < 0, y = 1), \quad \omega_2 = (1 - K)x \quad (x > 0, y = 1) \quad (1.8)$$

Условия (1.8) получены интегрированием вдоль стенки $y = 1$ в соответствующих областях выражений (1.2) и (1.3) с использованием (1.4). Появляющаяся при этом константа в области $x < 0$ равна нулю в силу асимптотического условия, следующего из (1.4)

$$\omega_1 + \kappa \frac{\partial \omega_1}{\partial y} = 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (1.9)$$

В области $x > 0$ константа интегрирования равна нулю в силу непрерывности в точке $x = 0, y = 1$ функции тока. В противном случае имелся бы точечный отвод тока, что в постановке данной задачи не предполагается.

На оси канала имеем

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial y} = 0 \quad (1.10)$$

Асимптотическое условие для функции ω_2 получено интегрированием соотношений (1.1) с использованием условий (1.4) в виде оценки для любого произвольного y_0

$$|\omega_2(x, y_0)| < De^{r_0 x}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (D = \text{const}, r_0 > 0) \quad (1.11)$$

Соотношения, которые должны выполняться на линии $x = 0 \quad |y| < 1$ для функций ω_1 и ω_2 и их производных получаются из тождеств (1.1) после подстановки в них значения

$$\omega_1 = \omega_2|_{x=0}, \quad \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)_{x=0} = 1 \quad (1.12)$$

2. Решение задачи. Преобразование Фурье по x функций ω_1 и ω_2 дает возможность перейти к комплексному переменному $\alpha = \sigma + i\tau$ и функции от него $\Phi(\alpha, y)$

$$\Phi = \Phi^- + \Phi^+ \quad (2.1)$$

$$\Phi^-(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \omega_1 e^{i\alpha x} dx, \quad \Phi^+(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \omega_2 e^{i\alpha x} dx$$

Вычислив интегралы

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)_{x=0} - i\alpha \omega_1(0, y) \right\} - \alpha^2 \Phi^-(\alpha, y) \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right)_{x=0} + i\alpha \omega_2(0, y) \right\} - \alpha^2 \Phi^+(\alpha, y)$$

проводим преобразование Фурье уравнений Лапласа (1.7). Сложение преобразованных уравнений и использование условий (1.12) и (2.2) приводит к дифференциальному уравнению для функции $\Phi(\alpha, y)$

$$\Phi'' - \alpha^2 \Phi = - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left\{ \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)_{x=0} - i\alpha \omega_1(0, y) - \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x} \right)_{x=0} + i\alpha \omega_2(0, y) \right\} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}$$

Общее решение этого уравнения следующее:

$$\Phi(\alpha, y) = A(\alpha) \operatorname{ch} \alpha - (2\pi)^{-1/2} \alpha^{-2} \quad (2.3)$$

Следуя второму граничному условию (1.8), вычисляем значение $\Phi^+(\alpha, y)$ на стенке

$$\Phi^+(\alpha, y = 1) = \frac{(1 - K)}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} x e^{i\alpha x} dx = - \frac{1 - K}{(2\pi)^{1/2} \alpha^2}$$

Тогда из выражения для $\Phi(\alpha, y)$ при $y = 1$ можно определить функцию $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = (\Phi^-(\alpha) + 2\pi)^{-1/2} K \alpha^{-2} (\operatorname{ch} \alpha)^{-1} \quad (2.4)$$

Введем в рассмотрение функцию $\psi(x, y)$ и ее образ $\Psi(\alpha, y)$ при $y = 1$

$$\psi(x, y) = \kappa \frac{\partial \omega}{\partial y} + \omega$$

$$\Psi(\alpha, 1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 1) e^{i\alpha x} dx = \Psi^- + \Psi^+$$

$$\Psi^- = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \psi(x, 1) e^{i\alpha x} dx$$

$$\Psi^+ = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \psi(x, 1) e^{i\alpha x} dx$$

В силу первого граничного условия (1.8) имеем

$$\Psi^-(\alpha, 1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \psi(x, 1) e^{i\alpha x} dx = 0$$

и, следовательно

$$\Psi(\alpha, 1) = \Psi^+(\alpha, 1)$$

Величина $\Psi(\alpha, 1)$ может быть записана в виде следующих равенств:

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha, 1) &= \frac{\kappa}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \omega}{\partial y} e^{i\alpha x} dx + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \omega e^{i\alpha x} dx = \kappa \Phi_y'(\alpha, 1) + \Phi(\alpha, 1) = \\ &= A(\alpha) (\kappa \alpha \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} \alpha) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \alpha^2} = \\ &= \left(\Phi^-(\alpha) + \frac{K}{(2\pi)^{1/2} \alpha^2} \right) \left(\frac{\kappa \alpha \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha} \right) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \alpha^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из формул (2.5) в результате получаем функциональное уравнение Винера — Хопфа

$$\Psi^+(\alpha) = \left(\Phi^-(\alpha) + \frac{K}{(2\pi)^{1/2} \alpha^2} \right) \left(\frac{\kappa \alpha \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha} \right) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \alpha^2} \quad (2.6)$$

Проведем факторизацию функции, считая κ конечным числом

$$K(\alpha) = K^-(\alpha) K^+(\alpha) = \kappa \alpha \operatorname{th} \alpha + 1 \quad (2.7)$$

$$K^\pm(\alpha) = (1 \mp i B_0 \alpha) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 \mp i B_m \alpha}{1 \mp i a_m \alpha} \quad (2.8)$$

$$a_m = (\pi m)^{-1}, \quad B_0 \approx \sqrt{\kappa}$$

$$B_m = (\pi \mu_m)^{-1}, \quad \mu_m = m + \kappa^{-1} \pi^{-2} m^{-1}$$

$$\pi \mu_m \operatorname{tg} \pi \mu_m = \kappa^{-1} \quad (2.9)$$

В указанных выше формулах значения μ_m будут корнями трансцендентного уравнения (2.9).

После элементарных преобразований и использования факторизации функции (2.7) в уравнении (2.6) появляется функция

$$F(\alpha) = \frac{\kappa K}{(2\pi)^{1/2} K_1^+(\alpha) K_1^-(\alpha) K^+(\alpha)}$$

$$K_1^-(\alpha) K_1^+(\alpha) = K_1(\alpha) = \alpha \operatorname{cth} \alpha$$

Теперь обратимся к следующей теореме из книги Нобла ([13], стр. 24): «Пусть $f(\alpha)$ — аналитическая функция $\alpha = \sigma + i\tau$, регулярная в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$ и такая, что $|f(\sigma + i\tau)| < C|\sigma|^{-p}$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, причем это неравенство выполняется равномерно для всех τ в полосе

$$\tau_- + \varepsilon \leq \tau \leq \tau_+ + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0, p > 0)$$

Тогда при $\tau_- < c < \tau < d < \tau_+$

$$f(\alpha) = f_+(\alpha) + f_-(\alpha) \tag{2.10}$$

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{f(\eta)}{\eta - \alpha} d\eta, \quad f_-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+id}^{\infty+id} \frac{f(\eta)}{\eta - \alpha} d\eta$$

где функция $f_+(\alpha)$ регулярна в полуплоскости $\tau > \tau_-$, а функция $f_-(\alpha)$ регулярна в полуплоскости $\tau < \tau_+$.

Можно показать, что порядок роста функции $F(\alpha)$ не превышает $C|\sigma|^{-1/2}$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, так как с помощью формулы Стирлинга легко доказывается, что

$$K^\pm(\alpha) \sim \sqrt{\alpha}, \quad K_1^\pm(\alpha) \sim \sqrt{\alpha} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty.$$

Поэтому уравнение Винера — Хопфа (2.6) можно переписать в таком виде:

$$\frac{\Psi^+(\alpha)}{K^+(\alpha)} + \frac{(1 - K)}{(2\pi)^{1/2} \alpha^2 K^+(\alpha)} - F^+(\alpha) = \Phi^-(\alpha) K^-(\alpha) + F^-(\alpha) \tag{2.11}$$

а для разрешения его достаточно вычислить одну из функций, например $F^-(\alpha)$, по формулам (2.10)

$$F^-(\alpha) = \frac{\kappa}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\zeta_s(\kappa)}{1 + i\alpha b_{s-1/2}}$$

$$\zeta_s(\kappa) = \frac{(1 - a_s^2 r_s^2) P_s}{(1 + \sqrt{\kappa} r_s)(1 + B_s r_s)} \tag{2.12}$$

$$P_s = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq s}}^{\infty} \frac{1 - a_m^2 r_s^2}{(1 + B_m r_s)(1 - b_{m-1/2} r_s)}$$

$$a_i = \frac{1}{\pi i}, \quad b_{s-1/2} = \frac{1}{\pi(i - 1/2)}$$

$$B_i = \frac{1}{\pi(i + 1/i\pi^2\kappa)}, \quad r_i = \pi(i - 1/2) \quad (i = s, m)$$

Обозначим левую часть уравнения (2.11) через $I_1(\alpha)$, а правую — через $I_2(\alpha)$ и выясним области регулярности этих функций в плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. Чтобы найти границы области регулярности для неизвестных функций $\Psi^+(\alpha)$ и $\Phi^-(\alpha)$, обратимся к асимптотическим условиям (1.9) и (1.11), которые позволяют оценить ω_1 и ω_2 при

любом фиксированном y

$$\begin{aligned} |\omega_1| &< C e^{\tau_+ x}, & \tau_+ > 0 & \quad (x \rightarrow -\infty) \\ |\omega_2| &< D e^{\tau_0 x} & \tau_+ > \tau_0 > 0 & \quad (x \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right| < E e^{\tau_- x}, \quad \tau_- < 0 \quad (x \rightarrow +\infty)$$

Тогда

$$|\Phi^-(\alpha)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \omega_1(x, 1) e^{i\alpha x} dx \right| < \frac{C}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 e^{(\tau_+ + i\alpha)x} dx$$

$$|\Psi^+(\alpha)| = \left| \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \left(\kappa \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \omega^2 \right) e^{i\alpha x} dx \right| < \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} (D e^{(\tau_0 + i\alpha)x} + \kappa E e^{(\tau_- + i\alpha)x}) dx$$

Из приведенных выше оценок следует, что функция $\Phi^-(\alpha)$ регулярна при $\tau < \tau_+$, а функция $\Psi^+(\alpha)$ регулярна при $\tau > \max\{\tau_0, \tau_-\}$, т. е. при $\tau > \tau_0$.

Области регулярности известных функций $K^\pm(\alpha)$ и $F^\pm(\alpha)$ определяются из формул (2.8) и (2.12)¹. Функции $K^+(\alpha)$ и $K^-(\alpha)$ регулярны соответственно при $\tau > -1/\sqrt{\kappa}$ и $\tau < 1/\sqrt{\kappa}$, а $F^+(\alpha)$ и $F^-(\alpha)$ — при $\tau > -\pi/2$ и $\tau < \pi/2$.

Итак, исследование функций, входящих в $I_1(\alpha)$ и $I_2(\alpha)$, показывает, что область регулярности для функции $I_1(\alpha)$ находится при $\tau > \max\{0, \tau_0, -1/\sqrt{\kappa}, -\pi/2\}$, а для функции $I_2(\alpha)$ — при $\tau < \min\{\tau_+, 1/\sqrt{\kappa}, \pi/2\}$.

Следовательно, общая полоса регулярности уравнения (2.11) есть

$$\tau_0 < \tau < \tau_+$$

Оценим поведение функций $I_1(\alpha)$ и $I_2(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Граничное условие (1.5) дает возможность считать

$$\omega_1|_{y=1} \rightarrow \text{const} = 0 \quad (x \rightarrow -0)$$

а предположение о поведении функции ψ , например

$$\psi = \left(\omega_2 + \kappa \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right)_{y=1} \rightarrow \text{const} \quad (x \rightarrow +0)$$

подтвердится в дальнейшем решении задачи. Тогда, следуя известным соотношениям, связывающим асимптотику функции с асимптотикой ее преобразования Фурье, имеем

$$\Phi^-(\alpha, 1) \sim |\alpha|^{-1} \quad (|\alpha| \rightarrow \infty)$$

$$\Psi^+(\alpha, 1) \sim |\alpha|^{-1} \quad (|\alpha| \rightarrow \infty)$$

Асимптотическое поведение функций $K^\pm(\alpha)$, как уже упоминалось выше, следующее:

$$K^\pm(\alpha) \sim |\alpha|^{1/2} \quad (|\alpha| \rightarrow \infty)$$

На основании приведенных оценок можно сделать вывод о том, что $I_1(\alpha)$ и $I_2(\alpha)$ стремятся к нулю в соответствующих полуплоскостях при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Проводя при помощи уравнения Винера — Хопфа аналитическое продолжение функций $I_1(\alpha)$ и $I_2(\alpha)$ во всю плоскость α , получаем две аналитические функции, регулярные во всей плоскости α и ограниченные на ∞ . Следовательно, по теореме Лиувилля они постоянны.

¹ Область регулярности для функции $F^+(\alpha)$ легко определяется после вычисления ее по формулам (2.10). Здесь значение $F^+(\alpha)$ не приводится ввиду того, что для решения уравнения Винера — Хопфа достаточно знать только функцию $F^-(x)$.

ны, а именно равны нулю во всей плоскости α :

$$I_1(\alpha) \equiv I_2(\alpha) = 0$$

Приравнявая $I_2(\alpha)$ нулю, определяем функцию $\Phi^-(\alpha)$ и представляем ее в выражение (2.4). Затем по известному значению $A(\alpha)$ из формулы (2.3) определяется $\Phi(\alpha, y)$ и обратное преобразование Фурье приводит к искомой функции тока $\omega(x, y)$

$$\omega(x, y) = \frac{K}{2\pi} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\kappa}{K^-(\alpha)} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\zeta_s(\alpha)}{(1+ib_{s-1/2}\alpha)} \right] \frac{\text{ch } \alpha y e^{-i\alpha x}}{\text{ch } \alpha} d\alpha - \frac{1}{2\pi} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha^2} d\alpha$$

Здесь b лежит в полосе регулярности уравнения (2.11).

При вычислении этих интегралов используется теорема о вычетах и лемма Жордана. Окончательный вид для функции тока в канале следующий:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) = & -\kappa K \left[\frac{e^{x/\sqrt{\kappa}} \cos(\kappa^{-1/2}y)}{\kappa^{1/2}P_0 \cos(\kappa^{-1/2})} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\zeta_s(\kappa)}{1-b_{s-1/2}\kappa^{-1/2}} + \right. \\ & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(B_0 - b_{p-1/2}) e^{x/\sqrt{\kappa}} \cos(B_p^{-1}y)}{P_p B_p^2 \cos(B_p)^{-1}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\zeta_s(\kappa)}{1-b_{s-1/2}B_p^{-1}} \right] \quad \text{при } x < 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\omega(x, y) = (1-K)x - K \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \left(1 + \frac{\kappa r_p^2}{R_p} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\zeta_s(\kappa)}{1+b_{s-1/2}r_p} \right) \frac{e^{-r_p x} \cos r_p y}{r_p^2} \quad \text{при } x > 0$$

$$P_0 = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \kappa^{-1/2} B_m}{1 - \kappa^{-1/2} b_{m-1/2}}$$

$$P_p = (1 - \kappa^{1/2} B_p^{-1}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq p}}^{\infty} \frac{1 - B_p^{-1} B_m}{1 - B_p^{-1} b_{m-1/2}}$$

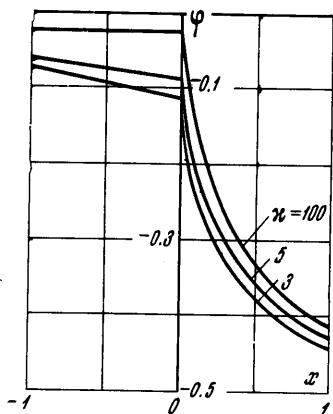
$$R_p = (1 + \kappa^{1/2} r_p) \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1 + r_p B_m}{1 + r_p a_m}$$

Выражения для $B_i, b_{i-1/2}$, те же, что в формулах (2.8) и (2.12).

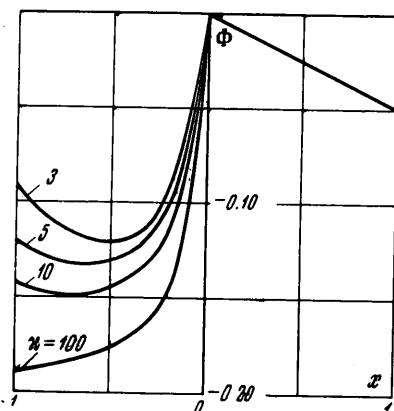
Полученное решение для потенциала переходит в известное при $\kappa \rightarrow 0$ (см. [3]), если учесть, что при этом корни уравнения (2.9) μ_i стремятся к $r_p = \pi(p - 1/2)$.

Распределение потенциала и функции тока вдоль стенки $y = 1$ при различных параметрах проводимости κ ($K = 0.5$) представлено на фиг. 2 и 3. Из графика для потенциала видно, что составляющая плотность тока $j_x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -0$, т. е. при подходе слева к точке стыкования проводящей стенки с рабочей зоной канала. График для компоненты плотности тока $j_y(x)$ на стенке при $x < 0$ (фиг. 4) показывает, что, во-первых, направление тока на стенке меняет свой знак и, во-вторых, действительно, с ростом проводимости стенки увеличивается перетекание тока из полезной нагрузки (электроды при $x > 0$) на проводящую стенку при $x < 0$.

3. Интегральные характеристики. Работа, совершаемая газом по преодолению пондеромоторных сил A , Джоулева диссипация тока Q_G в проводящей среде, электрическая мощность генератора N и коэффициент его полезного действия η вычисляются по известным из теории магнитогидродинамических течений формулы [1]. Однако при рассмотрении течений в канале со стенками конечной проводимости появляется величина Q_w — диссипация тока в проводящей стенке.



Фиг. 2



Фиг. 3

Приведем здесь формулы, связывающие эти интегральные характеристики. Обозначим объем области $|x| < \infty, 0 < y < 1$ через V , границу области — через Γ , а контур верхней проводящей стенки — буквами $ABCD$ (Фиг. 1).

Тогда для объема V и ограничивающего его контура Γ справедливы такие соотношения:

$$\int_V \mathbf{jE} \, d\tau = \int_V \mathbf{j} \left(\frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} \right) d\tau = Q_G - A \quad (3.1)$$

$$\int_V \mathbf{jE} \, d\tau = \oint_{\Gamma} \varphi j_n \, d\sigma = - \int_{-\infty}^0 (\varphi j_y)_{y=1} \, dx - \int_0^{\infty} (\varphi j_y)_{y=1} \, dx = -N_1 \quad (3.2)$$

Мощность N , снимаемая с секционированных электродов (при $x > 0$) в полезную нагрузку, равна

$$N = \int_0^{\infty} (\varphi j_y)_{y=1} \, dx = -(1 - K) \int_0^{\infty} \varphi(x) |_{y=1} \, dx \quad (3.3)$$

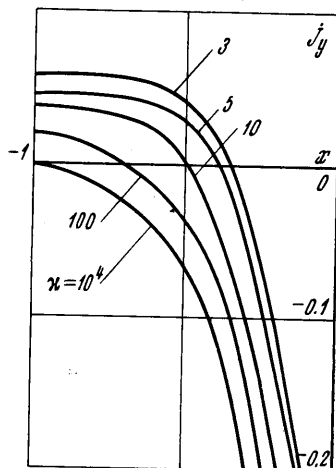
Приравнивая правые части формул (3.1) и (3.2) и учитывая тождество (3.3), получаем

$$A = Q_G + N_1 = Q_G + N + \int_{-\infty}^0 (\varphi j_y)_{y=1} \, dx \quad (3.4)$$

Если провести те же выкладки формул для объема, ограниченного контуром $ABCD$, будем иметь

$$0 = Q_w + N_2 \quad (3.5)$$

$$-N_2 = \oint_{ABCD} (\varphi j_n)_{y=1} dl = - \int_{-\infty}^0 (\varphi j_y)_{y=1} dx$$



Фиг. 4

Из формул (3.5) следует, что диссипация тока в стенке равна

$$Q_w = \int_{-\infty}^0 (\varphi j_y)_{y=1} dx \quad (3.5)$$

а общая формула (3.4), связывающая все интегральные характеристики, принимает вид

$$A = Q_G + N + Q_w = N + Q \quad (3.7)$$

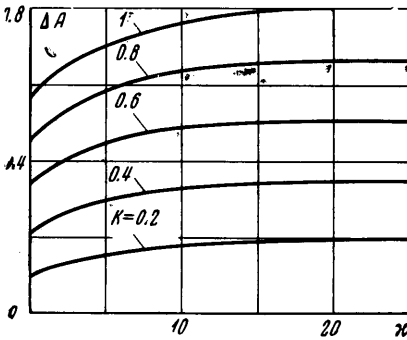
$$A = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 \mathbf{j} \frac{\mathbf{V} \times \mathbf{B}}{c} dy dx = \frac{(VB\delta)^2 \sigma}{c} \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \frac{\partial \omega}{\partial x} dy dx \quad (3.8)$$

Работа, вычисленная по формуле (3.8) с заменой бесконечного предела интегрирования на конечный L и отнесенная к характерному значению $(VB\delta)^2 \sigma / c$, является суммой двух величин: A_0 , вычисляемой по одномерной теории, и ΔA — «добавка» за счет концевого эффекта [3, 4]

$$A = A_0 + \Delta A, \quad A_0 = 2(1-K)L$$

$$\Delta A = 2K \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{r_p^3} \left(1 + \right. \quad (3.9)$$

$$\left. + \frac{\kappa r_p^2}{R_p} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\zeta_s(\kappa)}{1 + b_{s-1/2} r_p} \right)$$



Фиг. 5

Электрическая мощность, отводимая с нижней и верхней стенок канала, вычисляется по удвоенной

формуле (3.3) и представляется в аналогичном безразмерном виде

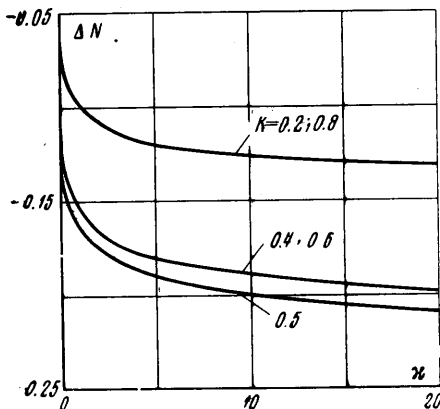
$$N = N_0 + \Delta N, \quad N_0 = 2(1-K)KL \quad (3.10)$$

$$\Delta N = -2(1-K)K \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{r_p^3} \left(1 + \frac{\kappa r_p^2}{R_p} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\zeta_s(\kappa)}{1 + b_{s-1/2} r_p} \right)$$

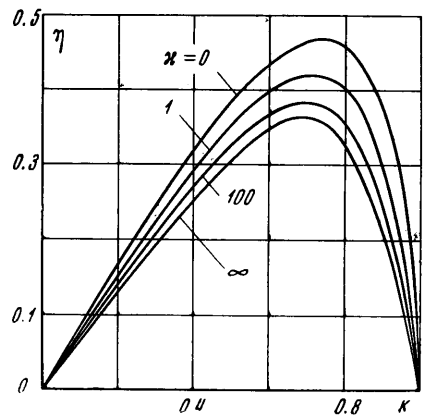
Коэффициент полезного действия вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{N}{A} = \frac{(1-K)KL + 2\Delta N}{(1-K)L + 2\Delta A} \quad (3.11)$$

Графики ΔA и ΔN (см. фиг. 5, 6) показывают, как влияет рост проводимости стенки, который характеризуется величиной κ , на работу и



Фиг. 6



Фиг. 7

мощность МГД устройства. Если проводимость стенки увеличивается, то увеличивается плотность тока, втекающего в нее (см. фиг. 4) и будет расти диссипация в стенке Q_w . Увеличение циркулирующих токов в концевой зоне канала приводит к увеличению работы электропроводного газа по преодолению пондеромоторной силы (фиг. 5). Одновременно с этим растут потери мощности за счет перетекания токов по плазме из полезной нагрузки в примыкающее к нему проводящее сопло. На основании вышесказанного коэффициент полезного действия η (фиг. 7) уменьшается с ростом величины κ . Линейный размер на этом графике выбирался равным 8.

Интегральные характеристики, вычисленные в работах [3] и [4], являются предельными случаями ($\kappa = 0$ и $\kappa = \infty$) результатов данной статьи (см. 5—7 и соответствующие графики в работах [3, 4]).

При этом следует отметить, что если в формулах для потенциала, функции тока или в формулах для интегральных характеристик положить $\kappa \rightarrow \infty$, то предельные значения всех величин соответствуют случаю, рассмотренному в [4], когда на входе в канал расположено идеально проводящее металлическое сопло, разделенное диэлектрическими проставками в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции (см. формулы [4]).

В заключение автор благодарит А. Б. Ватажина за постановку задачи и постоянную помощь в работе.

Поступило 16 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
2. Sutton G. W. End losses in magnetohydrodynamic channels with lensor conductivity and segmented electrodes. J. Appl. Phys., 1963, vol. 34, No. 2.
3. Ватажин А. Б., Медин С. А., Соколовский А. Г., Шумяцкий Б. Я. Влияние концевых эффектов на тепловую эффективность МГД установок. Теплофизика высоких температур, 1970, т. 8, № 2.
4. Ватажин А. Б., Немкова Н. Г. Концевые эффекты в каналах с металлическими стенками на входе. Сб. «Магнитогидродинамический метод получения энергии», «Энергия», 1972.
5. Бененсон Э. Б., Генкин А. П. Концевые эффекты в магнитогидродинамическом генераторе. Магнитная гидродинамика, 1965, № 2, стр. 80—88.
6. Shercliff J. A. The flow of conducting fluids in circular pipes under transverse magnetic fields. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, No. 6.
7. Хант Дж. К. Р., Брановер Г. Г., Гельфгат Ю. Н. К вопросу о магнитогидродинамическом течении в прямоугольном канале со стенками конечной проводимости. Магнитная гидродинамика, 1969, № 3.
8. Малов Ю. И., Мартинсон Л. К., Павлов К. Б. Стационарное течение проводящей жидкости в канале прямоугольного сечения с двумя направляющими стенками и двумя стенками с произвольной проводимостью, параллельными внешнему магнитному полю. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
9. Ватажин А. Б., Готовцев А. В., Емец Ю. П., Регирер С. А., Якубенко А. Е. Теоретическое исследование гидродинамических течений в каналах. 5-th Internat. Conf. Magnetohydrodyn. Electr. Power Generat., 1971, vol. 1.
10. Васильев В. Ф., Лаврентьев И. В. Влияние проводимости стенок и профиля скорости на джоулевы потери в МГД каналах. Магнитная гидродинамика, 1970, № 4.
11. Васильев В. Ф., Лаврентьев И. В. Продольная краевая задача о распределении электрических полей в МГД каналах с проводящими стенками. Магнитная гидродинамика, 1970, № 2.
12. Шерклиф Дж. Теория электромагнитного измерения расхода. М., «Мир», 1965.
13. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа к решению дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.