

УДК 532.5

## О РАСЧЕТЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СОСУДЕ С УЧЕТОМ ПОВЕРХНОСТНЫХ СИЛ

Л. А. ТЕМКИН, В. С. ТЕМКИНА

(Харьков)

Рассматривается задача о собственных колебаниях идеальной несжимаемой жидкости, которая частично заполняет сосуд, имеющий форму тела вращения. Движение жидкости предполагается потенциальным. Сила тяжести направлена параллельно оси симметрии сосуда. Учитывается одновременно действие сил тяжести и поверхностного натяжения. Задача рассматривается в линейной постановке.

При решении задач о колебаниях жидкости в ряде случаев представляется целесообразным применение методов, связанных с использованием интегральных уравнений. Однако возникает вопрос об оптимальном выборе формы интегрального представления задачи. В работе исходная задача о малых колебаниях представлена в форме, позволяющей рассматривать интегральное уравнение только на свободной поверхности жидкости или, быть может, еще на части смоченной стенки сосуда. В качестве примера рассматривается задача о колебаниях жидкости, частично заполняющей сферический сосуд. Приводятся результаты расчета равновесной свободной поверхности и частот колебаний жидкости при различных коэффициентах заполнения сосуда  $\kappa$ , углах смачивания  $\gamma$  и числах Бонда  $b$ , а также типичные формы колебаний, соответствующие нескольким первым частотам.

**1. Постановка задачи.** Как известно [1, 2], задача о малых колебаниях жидкости с учетом сил поверхностного натяжения описывается в безразмерной форме следующей системой уравнений и граничных условий:

в объеме  $\Omega$ , заполненном жидкостьюю

$$\Delta\varphi = 0 \quad (1.1)$$

на смоченной поверхности  $\Sigma$  сосуда

$$\partial\varphi / \partial n = 0 \quad (1.2)$$

на свободной поверхности  $S$

$$L \frac{\partial\varphi}{\partial n} = (a - \Delta_s) \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda\varphi + c_1 \quad (1.3)$$

$$a = b \cos(n, z) - k_1^2 - k_2^2, \quad b = \rho g R^2 \sigma^{-1}, \quad \lambda = \rho \omega^2 R^3 \sigma^{-1}$$

на линии  $l$  пересечения свободной поверхности со стенкой сосуда

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \mu \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad \mu = \frac{k_1 \cos \gamma - k}{\sin \gamma} \quad (1.4)$$

Здесь  $\varphi$  — потенциал скоростей жидкости,  $\lambda$  — собственное значение задачи,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\omega$  — частота колебаний,  $R$  — характерный размер сосуда,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $b$  — число Бонда,  $g$  — интенсивность гравитационных сил, направленных параллельно оси  $z$  (фиг. 1),  $c_1$  — произвольная постоянная,  $\Delta_s$  — оператор Лапласа — Бельтрами на поверхности  $S$ ,  $n$  — внешняя нормаль к  $S + \Sigma$ ,  $\nu$  — внешняя нормаль к контуру  $l$  в плоскости, касательной к  $S$ ,  $\gamma$  — угол смачивания,  $k$  — кривизна меридионального сечения сосуда,  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны поверхности  $S$ , причем  $k_1$  — кривизна линии  $\Gamma$  пересечения

чения свободной поверхности с плоскостью  $(r, z)$  (фиг. 1). На фиг. 1 изображено сечение сосуда с жидкостью плоскостью, проходящей через ось  $z$ .

Известно, что при условии положительной определенности оператора  $L$ , определяемого соотношениями (1.3), (1.4), равновесная свободная поверхность будет устойчивой [3], собственные значения задачи (1.1)–(1.4) образуют дискретный спектр конечной кратности, все собственные значения  $\lambda_i$  положительны и  $\lambda_i \rightarrow \infty$  при  $i \rightarrow \infty$  [1, 2].

В приведенной постановке задачи о колебаниях жидкости предполагается известной форма равновесной свободной поверхности. Как известно [1, 3], эта форма определяется уравнением

$$2H = bz + C \quad (2H = k_1 + k_2) \quad (1.5)$$

или в параметрической форме

$$\frac{d\beta}{ds} = bz + C - \frac{\sin \beta}{r}, \quad \frac{dr}{ds} = \cos \beta,$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \beta \quad (1.6)$$

Здесь  $H$  — средняя кривизна свободной поверхности жидкости,  $C$  — неизвестная постоянная,  $s$  — длина дуги линии  $\Gamma$ , отсчитываемая от оси  $z$ ,  $s \in [0, s_0]$ ,  $\beta$  — угол между касательной к линии  $\Gamma$  и осью  $r$ .

К (1.5) или (1.6) нужно добавить условия равенства угла смачивания (краевое условие) и объема жидкости (изопериметрическое условие) заданным значениям.

**2. Приведение к интегральной форме.** Представим в интегральной форме уравнение (1.1) с граничным условием (1.2). Запишем интегральное представление гармонической функции

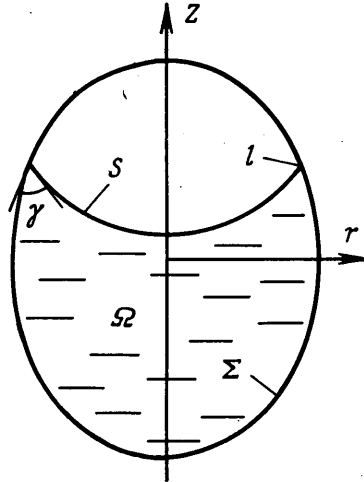
$$p\varphi(X) = \iint_{s+\Sigma} G(X, Y) \frac{\partial \varphi(Y)}{\partial n} dS_Y - \iint_{s+\Sigma} \varphi(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n} dS_Y \quad (2.1)$$

Здесь  $p = 1, 1/2, \gamma/2\pi$  при  $X \in \Omega, X \in S + \Sigma$  и  $X \in l$  соответственно. Допустим, что можно построить (в явном виде или приближенно) функцию Грина задачи Неймана для области  $\Omega_0$ , граница которой  $\Sigma_0 \supset \Sigma$  (например,  $\Omega_0$  — весь сосуд). Тогда, выбрав в формуле (2.1) в качестве ядра эту функцию Грина, получим

$$p\varphi(X) = \iint_s G(X, Y) \psi(Y) dS_Y - \iint_s \varphi(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n} dS_Y + C_0 \quad (2.2)$$

$$C_0 = - \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_z \iint_z \varphi(Y) dS_Y, \quad \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_s$$

Здесь  $C_0$  — неизвестная постоянная,  $X \in S$ . Например, в случае сферического сосуда [4] можно использовать функцию Грина внутренней задачи Неймана для сферы, в случае капли жидкости, расположенной на горизонтальной плоскости [5], — функцию Грина для полупространства.



Фиг. 1

Заметим, что в некоторых случаях удобно в качестве  $\Omega_0$  выбрать область, имеющую с областью  $\Omega$  общую часть границы  $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cap \Sigma$ . Тогда вместо (2.2) получим

$$p\varphi(X) = \iint_S G(X, Y)\psi(Y) dS_Y - \iint_{S+\Sigma-\Sigma_1} \varphi(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n} dS_Y + C_0 \quad (2.3)$$

$$C_0 = - \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \varphi(Y) dS_Y, \quad X \in S + \Sigma - \Sigma_1$$

Если (2.2) — уравнение относительно  $\psi$  и  $\varphi|_S$ , то (2.3) — относительно  $\psi$ ,  $\varphi|_S$  и  $\varphi|_{\Sigma-\Sigma_1}$ . Например, в случае цилиндрического сосуда с плоским дном в качестве  $\Omega_0$  можно выбрать полупространство, в случае цилиндра со сферическим дном — сферу; в обоих случаях  $\Sigma_1$  — дно сосуда.

Если в (2.2) или (2.3)  $C_0 \neq 0$ , нужно добавить условие сохранения объема

$$\iint_S \psi dS = 0 \quad (2.4)$$

Если же  $C_0 = 0$  (например, если  $\Omega_0$  — полупространство), условие (2.4) выполняется автоматически.

Отметим, что в (2.1) можно взять  $G(X, Y) = (4\pi r)^{-1}$  ( $r$  — расстояние между точками  $X$  и  $Y$ ), но тогда это уравнение придется рассматривать на свободной поверхности и на всей смоченной стенке сосуда. Можно приближенно находить функцию Грина задачи Неймана для области  $\Omega$ , как это делается в [6] (без учета поверхностных сил). Однако в этом случае нужно находить  $G(X, Y)$  для каждого заполнения сосуда, а с учетом поверхностных сил — и для каждого значения угла смачивания и числа Бонда. При решении задачи описанным выше способом функция Грина находится один раз для всех значений параметров  $\kappa$ ,  $\gamma$  и  $b$ .

Отделяя в (2.2) и (2.4) переменную по полярному углу, получим систему уравнений относительно коэффициентов  $\varphi_m(s_x)$  и  $\psi_m(s_x)$  при  $\cos m\theta_x$

$$p\varphi_m(s_x) = \int_0^{s_0} K_m(s_x, s_y)\psi_m(s_y) ds_y - \int_0^{s_0} N_m(s_x, s_y)\varphi_m(s_y) ds_y + C_m \quad (2.5)$$

$$\int_0^{s_0} r(s_y)\psi_0(s_y) ds_y = 0, \quad C_m = \begin{cases} C_0, & m = 0 \\ 0, & m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.6)$$

$$K_m(s_x, s_y) = 2r(s_y) \int_0^\pi G \cos m\delta d\delta, \quad N_m(s_x, s_y) = 2r(s_y) \int_0^\pi \frac{\partial G}{\partial n} \cos m\delta d\delta$$

где  $\theta_x$  и  $\theta_y$  — полярные углы точек  $X$  и  $Y$ ,  $\delta = \theta_y - \theta_x$ .

Аналогично отделяется полярный угол в (2.3).

Граничное условие (1.3) и условие на контуре (1.4) в координатах  $(s, \theta)$  после отделения переменной  $\theta$  принимают вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{ds} \left( r \frac{d\psi_m}{ds} \right) - \frac{m^2}{r^2} \psi_m - a\psi_m + \lambda\varphi_m + c_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{d\psi_m}{ds} + \mu\psi_m = 0 \quad (2.8)$$

Поскольку согласно исходной системе уравнений (1.1)–(1.4) функция  $\varphi$  определяется с точностью до аддитивной постоянной, произвольную постоянную  $c_1$  можно положить равной нулю.

Введем функцию  $x = x(s)$ , так, чтобы

$$\frac{dx}{x} = \frac{ds}{r(s)}, \quad x \in [0, 1]$$

при  $s \in [0, s_0]$ .

Тогда

$$x = \exp \left[ - \int_s^{s_0} \frac{ds}{r(s)} \right] \quad (2.9)$$

и уравнение (2.7) преобразуется к виду

$$L_m \psi_m = f_m, \quad L_m \psi_m \equiv - \frac{d}{dx} \left( x \frac{d\psi_m}{dx} \right) + \frac{m^2}{x} \psi_m, \quad f_m = \frac{r^2}{x} (\lambda \varphi_m - a \psi_m) \quad (2.10)$$

Представим это уравнение с учетом (2.8) в интегральной форме. Рассмотрим два случая.

I.  $\mu r(s_0) + m \neq 0$ . Тогда  $\psi_m(x)$  можно представить в виде [7]

$$\psi_m(x) = \int_0^1 g_m(x, y) f_m(y) dy \quad (2.11)$$

Здесь  $g_m(x, y)$  — функция Грина оператора  $L_m$  с граничными условиями

$$|\psi_m| < \infty (x=0), \quad \frac{d\psi_m}{dx} + \mu r \psi_m = 0 \quad (x=1) \quad (2.12)$$

Эта функция Грина имеет вид

$$g_0(x, y) = \begin{cases} [\mu r(s_0)]^{-1} - \ln y, & x \leq y \\ [\mu r(s_0)]^{-1} - \ln x, & x \geq y \end{cases}$$

$$g_m(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2m} \frac{m - \mu r(s_0)}{m + \mu r(s_0)} x^m y^m + \frac{1}{2m} x^m y^{-m}, & x \leq y \\ \frac{1}{2m} \frac{m - \mu r(s_0)}{m + \mu r(s_0)} x^m y^m + \frac{1}{2m} y^m x^{-m}, & x \geq y \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

II. При некотором  $m$  имеется  $\mu r(s_0) + m = 0$ . В этом случае однородное уравнение  $L_m \psi_m = 0$  имеет нетривиальное решение  $x^m$ , удовлетворяющее граничным условиям (2.12), и  $\psi_m(x)$  представляется в виде [7]

$$\psi_m(x) = \int_0^1 g_m(x, y) f_m(y) dy + c_2 x^m \quad (2.13)$$

где  $g_m(x, y)$  — обобщенная функция Грина, которая имеет вид

$$g_0(x, y) = \begin{cases} x + y - \ln y, & x \leq y \\ x + y - \ln x, & x \geq y \end{cases}$$

$$g_m(x, y) = \begin{cases} x^m y^m (x + y) + (2m)^{-1} x^m y^{-m}, & x \leq y \\ x^m y^m (x + y) + (2m)^{-1} y^m x^{-m}, & x \geq y \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Постоянная  $c_2$  в (2.13) выбирается так, чтобы выполнялось условие ортогональности

$$\int_0^1 x^m f_m dx = 0 \quad (2.14)$$

При  $m = 0$  в силу (2.14) для выполнения условия (2.6) необходимо и достаточно положить  $c_2 = 0$ .

Случай II имеет место, например, в сферическом сосуде при  $m = 1$ , в цилиндрическом и коническом сосудах при  $m = 0$ , если равновесная свободная поверхность является плоской.

Возвращаясь в (2.11) (и аналогично в (2.13) — (2.14)) к переменной  $s$ , получим

$$\psi_m(s_x) = \int_0^{s_0} g_m(x(s_x), x(s_y)) \frac{x(s_y)}{r(s_y)} f_m(x(s_y)) ds_y \quad (2.15)$$

Таким образом при каждом  $m$  при использовании соотношения (2.2) в случае I получается система одномерных интегральных уравнений (2.5), (2.6), (2.15) относительно функций  $\varphi_m$  и  $\psi_m$  при  $m > 0$  и  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  и  $C_0$  при  $m = 0$ . При этом условие (2.6) существенно только при  $m = 0$ . В случае II вместо уравнения (2.11) нужно рассматривать (2.13) с учетом условия (2.14). Эта система однородных уравнений содержит частотный параметр  $\lambda$ . Представляет интерес нахождение собственных значений  $\lambda_m$  и собственных функций  $\psi_m$ . Для численного решения задачи существенно уменьшение количества неизвестных функций. Перейдем от двух уравнений относительно  $\varphi_m$  и  $\psi_m$  к одному уравнению относительно некоторой вспомогательной функции.

Систему уравнений (2.5), (2.15) можно записать в виде

$$p\varphi_m = K_m\psi_m - N_m\varphi_m + C_m \quad (2.16)$$

$$\psi_m = Q_m(\lambda\varphi_m - a\psi_m) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

где  $K_m$ ,  $N_m$ ,  $Q_m$  — соответствующие интегральные операторы,  $a$  — оператор умножения на функцию  $a(s)$ .

Примем в качестве новой неизвестной функции  $\omega_m = \lambda\varphi_m - a\psi_m$ . Тогда получим уравнение относительно  $\omega_m$

$$(pE + paQ_m + N_m + N_m aQ_m)\omega_m - \lambda K_m Q_m \omega_m = \lambda C_m \quad (2.18)$$

Здесь  $E$  — единичный оператор. При  $m = 0$  к (2.18) добавляется условие (2.6). В случае II это условие можно заменить эквивалентным ему, но несколько более удобным условием (2.14).

Для краткости не будем здесь выписывать уравнения, которые получаются при использовании вместо (2.2) соотношения (2.3), а также в случае II при  $m \neq 0$ .

**3. Численное решение задачи.** При решении задачи о колебаниях жидкости в сосуде конкретной формы прежде всего возникает вопрос о построении равновесной свободной поверхности жидкости при заданных значениях параметров  $\gamma$ ,  $\kappa$  и  $b$ . Будем рассматривать ниже уравнения равновесной свободной поверхности в форме (1.6). Из (1.6) при заданных  $\gamma$ ,  $\kappa$  и  $b$  требуется найти  $r = r(s)$ ,  $z = z(s)$ ,  $\beta = \beta(s)$ , а также  $C$  и  $z_0 = z(0)$ .

При фиксированных  $b$ ,  $C$  и  $z_0$  краевую задачу для системы уравнений (1.6) можно рассматривать как начальную и найти  $r(s)$ ,  $z(s)$  и  $\beta(s)$  численно, например, методом Рунге — Кутты. Заметим, что при  $s = 0$  первое из уравнений (1.6) имеет особенность. В точке  $s = 0$  это соотношение

можно записать в виде  $d\beta/ds = 1/2(bz + C)$  и использовать его на первом шаге при счете методом Рунге — Кутты.

Из (1.5) следует, что  $C = 2H$  при  $b = 0$ . Равновесная свободная поверхность представляет собой при этом часть сферы. При заданном угле смачивания и объеме жидкости легко находятся  $z_0$  и  $C$  [2]. Эти значения берутся за начальное приближение при нахождении  $z_0$  и  $C$  при заданном значении  $b$  и тех же значениях  $\kappa$  и  $\gamma$ , например, методом наискорейшего спуска. Увеличивая  $b$ , получим семейство равновесных форм, принимая в качестве начального приближения  $z_0$  и  $C$ , полученные при предыдущем значении числа Бонда.

Перейдем теперь к нахождению собственных частот и форм колебаний. Из уравнения (2.18) найдем приближенно собственные значения  $\lambda_m$  и соответствующие им собственные функции  $\omega_m$ . Затем по (2.17) определим  $\psi_m$ , характеризующие отклонение свободной поверхности от равновесной.

Уравнение (2.18) весьма удобно для численного решения. Его можно решать вариационными методами, методом моментов и т. д. Ниже опишем один из возможных подходов к численному решению этого уравнения.

Интегральное уравнение (2.18) со слабой особенностью. Аппроксимируем интегральные операторы  $K_m$ ,  $N_m$  и  $Q_m$  конечномерными, следуя идее метода Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова [8]. Рассмотрим, например, оператор  $K_m$

$$K_m u = \int_0^{s_0} K_m(s_x, s_y) u(s_y) ds_y$$

Разобьем интеграл по промежутку  $[0, s_0]$  на сумму  $n$  интегралов по промежуткам  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ , где  $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = s_0$ . В каждом из этих интегралов выносим значение функции  $u(s)$  в средней точке  $\sigma_i = 1/2(\alpha_{i-1} + \alpha_i)$ ; тогда для значений  $u(s_x) = u(\sigma_i) \equiv u_i$  получим

$$K_m u_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j, \quad K_{ij} = \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} K_m(\sigma_i, s_y) ds_y \quad (3.1)$$

Таким образом, оператор  $K_m$  аппроксимируется матрицей  $K = \|K_{ij}\|_1^n$ , а функция  $u$  заменяется вектором  $\|u_i\|_1^n$ . Аналогично аппроксимируем операторы  $N_m$  и  $Q_m$

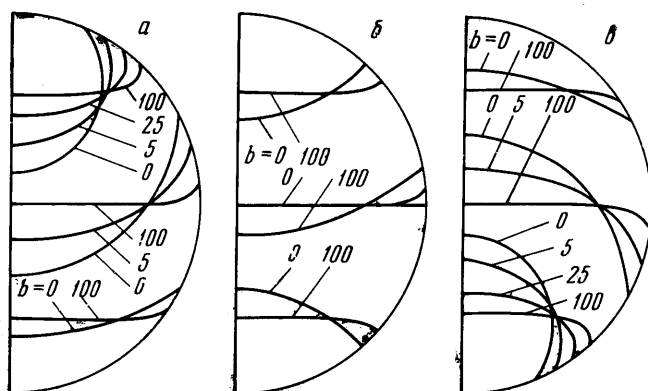
$$N_{ij} = \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} N_m(\sigma_i, s_y) ds_y, \quad Q_{ij} = \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} Q_m(\sigma_i, s_y) ds_y \quad (3.2)$$

Из (2.18) получим систему  $n$  однородных линейных алгебраических уравнений относительно  $\omega_m(\sigma_i)$ , содержащую частотный параметр  $\lambda$

$$\sum_{j=1}^n \left[ p\delta_{ij} + pa(\sigma_i)Q_{ij} + N_{ij} + \sum_{k=1}^n N_{ik}a_k Q_{kj} \right] \omega_m(\sigma_j) - \lambda \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n K_{ik}Q_{kj} \right) \omega_m(\sigma_j) = \lambda C_m \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.3)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. При  $m = 0$  добавляется уравнение

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n r(s_k)Q_{kj} \right) \omega_0(\sigma_j) = 0$$



Фиг. 2

Заметим, что в соотношении (2.3) не входит частотный параметр  $\lambda$ . Поэтому, исходя из этого соотношения, можно также прийти к системе  $n$  однородных линейных алгебраических уравнений относительно  $\omega_m$ , если после конечномерной аппроксимации исключить значения  $\varphi$  на части стенки  $\Sigma - \Sigma_1$  сосуда методом исключения Гаусса с выбором главного элемента.

Уравнение (2.18) при каждом  $m$  имеет дискретный спектр собственных значений, сгущающийся на бесконечности. Из условия разрешимости однородной системы уравнений (3.3) найдем несколько первых собственных чисел  $\lambda_{mk}$  при каждом  $m$ . Найдя затем (с точностью до нормирующего множителя)  $\omega_{mk}(\sigma_i)$ , соответствующие  $\lambda_{mk}$ , получим  $\psi_{mk}(\sigma_i)$  по формуле

$$\psi_{mk}(\sigma_i) = \sum_{j=1}^n Q_{ij} \omega_{mk}(\sigma_j) \quad (i = 1, \dots, n)$$

4. Случай сферического сосуда. Применим описанную выше методику при решении задачи в случае сферического сосуда. При плоской равновесной свободной поверхности эта задача несколько иным способом решена в [4].

Исходя из системы дифференциальных уравнений (1.6), были построены описанным выше способом формы равновесия жидкости при различных углах смачивания, числа Бонда и коэффициентах заполнения сосуда  $\kappa$  ( $\kappa$  — отношение объема жидкости к объему сферы). На фиг. 2, а приведены равновесные формы при  $\gamma = 30^\circ$ ,  $\kappa = 0.1, 0.5, 0.9$ , на фиг. 2, в — при  $\gamma = 150^\circ$  и тех же  $\kappa$ , на фиг. 2, б — при  $\gamma = 60^\circ$ ,  $\kappa = 0.5$  и  $\gamma = 90^\circ$ ,  $\kappa = 0.1, 0.5, 0.9$ . Отметим, что равновесные формы при  $\kappa = \kappa_0$ ,  $\gamma = \gamma_0$  являются зеркальным отражением относительно плоскости  $z = 0$  форм при  $\kappa = 1 - \kappa_0$ ,  $\gamma = \pi - \gamma_0$ .

Будем исходить из интегрального уравнения (2.18), взяв в качестве  $G(X, Y)$  функцию Грина внутренней задачи Неймана для сферы, которая имеет вид [9]

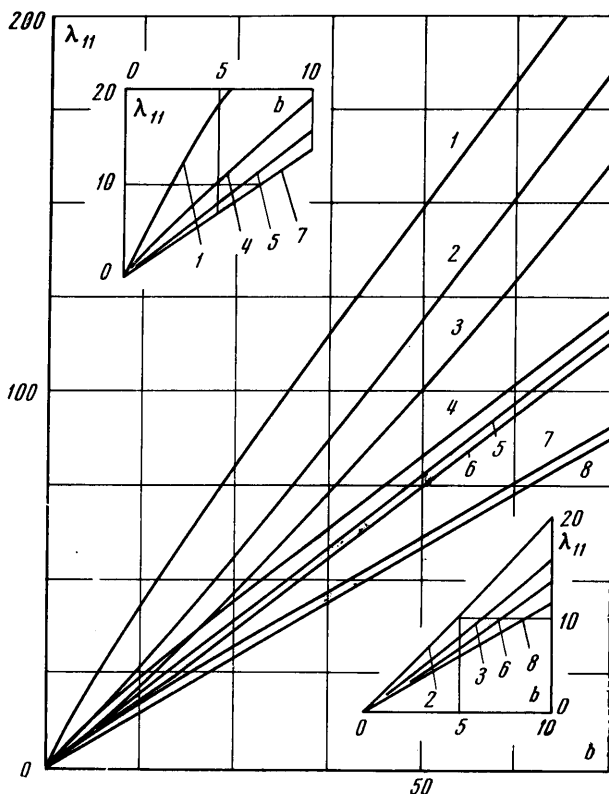
$$G(X, Y) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{R}{r_1} + \frac{1}{R} \ln \frac{2R^2}{R^2 + r_1 - |X||Y|\cos\alpha} \right)$$

Здесь  $r$  — расстояние между точками  $X$  и  $Y$ ,  $\alpha$  — угол между радиус-векторами этих точек,  $|X|$  и  $|Y|$  — расстояния этих точек от центра сферы,  $R$  — радиус сферы

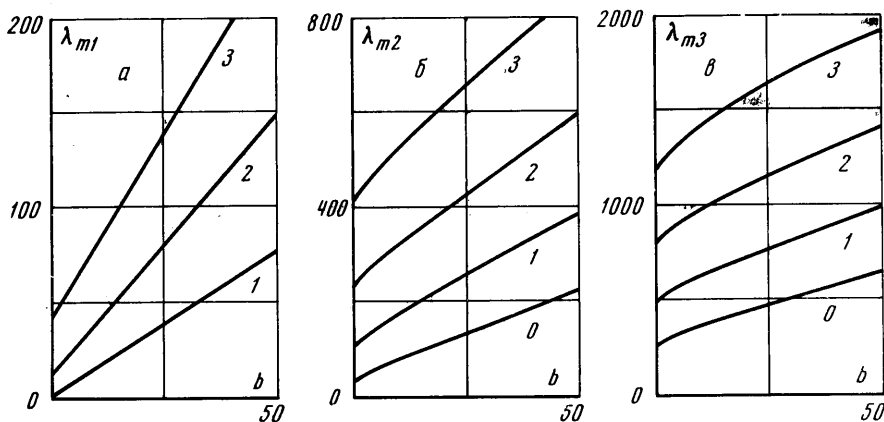
$$r_1 = [R^4 + |X|^2|Y|^2 - 2R^2|X||Y|\cos\alpha]^{1/2}$$

Заметим, что если равновесная свободная поверхность является плоской, то при  $m = 1$  следует воспользоваться интегральным представлением граничного условия на свободной поверхности в форме (2.13), (2.14) (случай II п. 2).

Ниже приводятся результаты численного решения системы уравнений (3.3) для сферического сосуда. Элементы матриц  $K$ ,  $N$  и  $Q$ , определяемые формулами (3.1), (3.2), при  $i \neq j$  вычислялись по формуле Симпсона. При вычислении диагональных



Фиг. 3

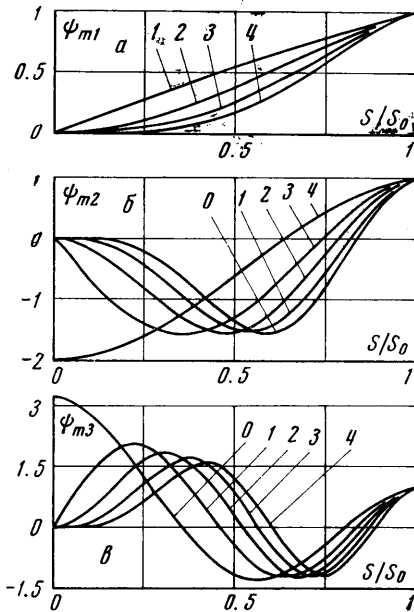


Фиг. 4

элементов матриц  $K$  и  $N$  для устранения особенности при  $s_{ij} = \sigma_i$  делалась замена переменной  $s_{ij} = \sigma_i + \xi^3$ . Точки деления промежутка  $[0, s_0]$  выбирались равномерно. Вычисления проводились при числе узлов  $n = 15, 20$ . Относительная погрешность вычислений не превышает 0.1%.

На фиг. 3 приведены графики зависимости  $\lambda_{11} = \lambda_{11}(b)$  при  $\kappa = 0.9, \gamma = 150^\circ, 90^\circ, 30^\circ$  (кривые 1, 2, 3), при  $\kappa = 0.5$  и тех же значениях угла  $\gamma$  (кривые 4, 5, 6), при  $\kappa = 0.1, \gamma = 150^\circ, 30^\circ$  (кривые 7, 8). График  $\lambda_{11}(b)$  при  $\kappa = 0.1, \gamma = 90^\circ$  лежит между кривыми 7 и 8. Отметим, что при  $b = 0$  при всех значениях  $\gamma$  и  $\kappa$   $\lambda_{11} = 0$ . Это соответствует тому, что в сферическом сосуде точка  $b = 0$  при всех углах сма-





Фиг. 5

$\psi = 0$ , что физически соответствует состоянию покоя. На фиг. 5 приведены для этого же случая типичные формы колебаний при  $b = 1$  с теми же обозначениями кривых, что и на фиг. 4. Все кривые на фиг. 5 нормированы так, что  $\psi(s_0) = 1$ .

Авторы благодарят А. Д. Мышкиса, А. Д. Тюпцова и Г. В. Щербину за внимание к работе и ряд полезных советов.

Поступило 13 XII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
2. Моисеев Н. Н., Черноусько Ф. Л. Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
3. Тюпцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 2.
4. Темкин Л. А. О нахождении собственных частот и форм малых колебаний идеальной жидкости в сферическом сосуде в слабом силовом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
5. Копачевский Н. Д., Темкин Л. А., Темкина В. С. О колебаниях капли жидкости, расположенной на плоскости, в условиях невесомости. В сб.: «Математическая физика и функциональный анализ», Сб. научн. тр., вып. 1, Харьков, 1969.
6. Chu W. H. Fuel sloshing in a spherical tank filled to an arbitrary depth. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 11. (Русск. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1964, № 11).
7. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
8. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приближенное решение. Докл. АН СССР, 1929, № 12, стр. 283.
9. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.
10. Budiansky S. Sloshing of liquids in circular canals spherical tanks. J. Aero/Space Sci., 1960, vol. 27, No. 3.
11. Моисеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. М., ВЦ АН СССР, 1966.