

УДК 533.6.011.5

К РЕШЕНИЮ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О ПОСТРОЕНИИ КОНТУРА СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ СОПЛА

А. А. ОСИПОВ

(Москва)

Рассмотрен вопрос о построении жесткого (нерегулируемого) контура сверхзвукового сопла, оптимального в смысле решения некоторой траекторной задачи. Исследован случай, когда у сопла нет дозвуковой части, а на его входе (в конце камеры сгорания) имеют место изменения параметров газа по времени. В каждый момент времени поток на входе в сопло считается равномерным и сверхзвуковым. Если отклонения числа Маха этого потока от некоторой величины, превышающей единицу, невелики, то соответствующие им отклонения безразмерных параметров течения от своих «стационарных» значений в области определенности искомого контура могут быть найдены из решения некоторой линейной задачи. В пределах справедливости этого решения показано, что искомый оптимальный контур следует выбирать из известного семейства контуров, реализующих максимум тяги в стационарной задаче [1, 2]. Для выяснения вопроса о диапазоне справедливости сделанного вывода проведены численные интегрирование нелинейных уравнений для параметров течения газа и множителей Лагранжа и проверка точного условия оптимальности. Выполненные расчеты показали, что найденное на основе линейного анализа решение применимо не только для малых, но и для весьма значительных изменений числа Маха на входе в сопло.

В основе исследования лежат результаты работы [3], в которой наряду с получением соответствующих необходимых условий оптимальности были рассмотрены (без использования линеаризации) два частных случая: плоского «короткого» сопла и неизменных в процессе полета безразмерных параметров на входе в сопло. В этих случаях оптимальные контуры также оказались принадлежащими семейству оптимальных «стационарных» контуров.

1. В работе [3] поставлена вариационная задача о построении жесткого контура ab сверхзвуковой части сопла (фиг. 1), являющегося оптимальным в смысле решения определенной траекторной задачи с учетом изменения условий полета летательного аппарата и режима работы двигателя. Рассматривается плоское движение летательного аппарата, который считается материальной точкой, в атмосфере при наличии постоянного гравитационного поля. Для описания течения газа в сопле использовано квазистационарное приближение. При этом поток на входе в сопло (при $x = 0$ на фиг. 1, где x и y — оси прямоугольной системы координат) считается равномерным и сверхзвуковым.

Опуская подробности постановки вариационной задачи, данной в [3], отметим только, что жесткий контур сопла $x = x(y) \leq X$, где X — максимально допустимая длина, должен проходить через заданную точку a и обеспечивать при фиксированных параметрах летательного аппарата в начальной точке траектории максимум некоторой функции от траекторных параметров в конечной точке.

Как показано в [3], форма оптимального контура и ордината его концевой точки определяются из уравнений

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho v W (u - \mu_2 y^{-\nu})' dt = 0 \text{ на } ab \quad (1.1)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\lambda_2}{m} F_{y_b}{}^4 - W y^\nu (p - \rho v v \operatorname{tg} \alpha) \right\} dt = 0$$

от ζ вычисляются при «невозмущенном» течении, соответствующем $M = M^0$.

Если исходный контур $x = \xi(y)$ заменить некоторым новым «близким» контуром с уравнением $x = \xi(y) + \Delta\xi(y)$, то в выражении для ζ появится дополнительное слагаемое $\Delta\zeta$. В итоге вместо (2.2) получим

$$\zeta(x, y, t) = \zeta^0(x, y) + \zeta_M(x, y)\Delta M(t) + \Delta\zeta(x, y) \quad (2.3)$$

причем функция $\Delta\zeta(x, y)$, отвечающая деформации контура $\Delta\xi(y)$, определяется при $M = M^0$. В соответствии с определением $\Delta\zeta(x, y) \equiv 0$ при $\Delta\xi(y) \equiv 0$.

Функции $\zeta_M(x, y)$ и $\Delta\zeta(x, y)$, входящие в правую часть (2.3), могут быть найдены подстановкой указанных разложений в соответствующие уравнения и граничные условия работы [3] и последующей линеаризацией. Последняя проводится в предположении малости $\Delta M(t)$ и деформации стенки, т. е. последнего слагаемого в (2.3). Деформацию стенки будем характеризовать величиной $\Delta\xi'(y) \equiv d\Delta\xi(y)/dy$. Уравнения для первых членов разложений (u^0, v^0, \dots), которые получаются при этом, совпадают с исходными нелинейными уравнениями, а соответствующие граничные условия отвечают недеформированному контуру, т. е. $\Delta\xi'(y) \equiv 0$, и $M(t) \equiv M^0 = \text{const}$. В то же время уравнения для ζ_M и $\Delta\zeta$ — линейные уравнения с переменными коэффициентами (известными функциями первых членов разложений и их производных по x и y). Оказывается, что уравнения для ζ_M и для $\Delta\zeta$ совпадают. Различие же соответствующих функций вызвано различием граничных условий на контуре ab и на замыкающей характеристике af пучка волн разрежения, выходящего из точки a , которые удобно использовать вместо граничных условий в сечении $x = 0$. При этом распределение ζ_M на af можно определить по результатам численного расчета пучков, соответствующих $M = M^0$ и $M^0 + \delta$, где δ — достаточно малое число.

Формула (2.3) дает значение ζ при фиксированных x и y . В соответствии с этим значение ζ на стенке (при фиксированном y) равно

$$\zeta_x(y, t) \equiv \zeta\{\xi(y) + \Delta\xi(y), y, t\} = \zeta^0(y) + \zeta_x(y)\Delta\xi(y) + \zeta_M\Delta M(t) + \Delta\zeta(y) \quad (\zeta_x = (\partial\zeta^0/\partial x)_y) \quad (2.4)$$

Здесь в функциях, стоящих в правой части, опущен первый аргумент $x = \xi(y)$.

Отметим, кстати, что при малой деформации стенки между $\Delta\zeta(y)$ на контуре и $\Delta\xi'(y)$ имеет место в некотором смысле линейная связь. Анализируя влияние деформации отдельных участков контура на величину $\Delta\zeta(y)$, можно показать, что указанная связь может быть записана в виде

$$\Delta\zeta(y) = R^1(y)\Delta\xi'(y) + R^2(y, y_b)\Delta\xi'(y_b) + \int_{y_u}^y R^3(y, \eta)\Delta\xi'(\eta)d\eta + \int_y^{y_b} R^4(y, \eta)\Delta\xi'(\eta)d\eta \quad (2.5)$$

Поясним смысл выражения (2.5) и входящих в него функций R^1, R^2, R^3, R^4 . Рассмотрим возмущение параметра ζ в точке стенки с заданным y при малой деформации стенки. Пусть ζ — параметр течения газа. Тогда в силу гиперболичности уравнений газовой динамики возмущения ζ появляются как вследствие деформации стенки непосредственно в этой точке, что отражает первое слагаемое в (2.5), так и за счет деформации всего

участка стенки выше по потоку от рассматриваемой точки. При этом функция $R^1(y)$ может быть получена непосредственно из соотношений для волны разрежения Прадтля — Майера. Степень же воздействия на ζ в точке с заданным y со стороны точки стенки с ординатой η характеризуется функцией влияния $R^3(y, \eta)$, и поэтому третье слагаемое в (2.5) отражает воздействие всего влияющего участка стенки. Пусть теперь ζ — множитель Лагранжа μ_1 или μ_2 . Система квазистационарных дифференциальных уравнений, описывающая изменение μ_i в поле течения, также гиперболична, а граничные условия для нее формулируются на характеристике fb и контуре ab . При этом значения μ_i на fb явным образом зависят от параметров течения в точке b . Поэтому кроме воздействия на ζ через газодинамические параметры, входящие в уравнения для μ_i , существует влияние деформации стенки непосредственно в точке b (за счет граничных условий) и всего участка стенки от y до y_b . Последний факт отражают второе и четвертое слагаемые в (2.5) с функциями влияния R^2 и R^4 . Заметим, что функции R^i различны для каждого из параметров течения и множителей Лагранжа.

3. Вернемся к вариационной задаче. Рассмотрим однопараметрическое семейство оптимальных контуров, соответствующее фиксированному числу Маха на входе в сопло, равному M° , при максимально допустимой длине X . Параметром, отличающим конкретное решение из этого класса, является значение ординаты концевой точки сопла y_b . Пусть исходный контур Γ принадлежит этому семейству, а значение y_b выберем таким образом, чтобы в результате процедуры построения оптимального контура было выполнено второе условие оптимальности из (1.1). Очевидно, что в принципе такой выбор всегда возможен. Если $\Delta M \equiv M(t) - M^\circ$ невелики, то можно ожидать, что контур, оптимальный с точки зрения траекторной задачи, может быть получен малой деформацией Γ . При этом такой деформированный контур в силу его оптимальности обязан иметь ту же концевую точку b , т. е.

$$\int_{y_a}^{y_b} \Delta \xi'(y) dy = 0 \tag{3.1}$$

Условие оптимальности заданного контура при $M(t) = M^\circ$ означает, что в каждой точке его выполняется равенство [4]

$$u^\circ - \mu_2^\circ y^{-\nu} = \text{const} \tag{3.2}$$

Воспользуемся теперь полученными линеаризованными выражениями для параметров течения и множителей Лагранжа (2.4) для определения оптимальной деформации $\Delta \xi'(y)$ исходного контура. После подстановки (2.4), где $\zeta \equiv Q$, в первое соотношение (1.1) и линеаризации с учетом (3.2) приходим к следующему условию оптимальности:

$$\varepsilon(Q_M)' + (\Delta Q)' = 0$$

$$\left(Q \equiv u - \frac{\mu_2}{y^\nu}, \quad \varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} \Delta M W dt / \int_{t_1}^{t_2} W dt \right) \tag{3.3}$$

При получении (3.3) учтено то обстоятельство, что ΔM и W зависят только от времени.

Первое слагаемое в (3.3) можно обратить в нуль, если M° выбрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_{t_1}^{t_2} \Delta M W dt = 0 \tag{3.4}$$

При этом значение M° , удовлетворяющее условию (3.4), определяется по формуле

$$M^\circ = \int_{t_1}^{t_2} MW dt / \int_{t_1}^{t_2} W dt \quad (3.5)$$

Если положить деформацию контура $\Delta \xi'$ в каждой точке равной нулю, то в соответствии с определением ΔQ обращается в нуль. Соотношение (3.3), а также условие (3.1) в этом случае выполняются тождественно.

Следовательно, контур сопла, выбранный из семейства контуров, отвечающих решению вариационной задачи с фиксированным в соответствии с (3.5) числом Маха на входе в сопло M° , является оптимальным и в смысле решения траекторной задачи. Выбор конкретного контура из указанного семейства определяется вторым соотношением (1.2), которое после линеаризации с учетом (3.4) преобразуется к виду

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\lambda_2}{m} F_{y_b}{}^1 dt - y_b{}^0 (p - \rho uv \operatorname{tg} \alpha)_b{}^0 \int_{t_1}^{t_2} W dt = 0$$

Полученный результат позволяет найти оптимальное сопло непосредственным перебором в известном классе контуров в серии параметрических расчетов.

Отметим одну особенность рассматриваемой задачи, которая формально не была учтена при получении сформулированного выше результата. Дело в том, что отраженная от оси симметрии первая характеристика se пучка волн разрежения, образующегося при обтекании точки a , а также отраженная от стенки линия Маха eg , как и замыкающая характеристика начального пучка ac , являются линиями разрыва частных производных ξ_x и ξ_y . Пусть D_1 — та часть области течения газа в сопле, которую пробегает указанные линии при возмущении числа Маха на входе во всем диапазоне его изменения во время полета (полоса, ограниченная пунктирными линиями на фиг. 1). Заметим, кстати, что возможны и конфигурации, отличные от изображенной на фиг. 1, а именно такие, для которых замыкающая характеристика db пересекает весь пучок волн разрежения. В этом случае D_1 лежит вне области определенности контура ab .

Для любой точки внутри D_1 вследствие существования разрыва значений частных производных ξ_x и ξ_y вдоль указанных характеристик функции ζ_M оказывается зависящей от времени. Поэтому запись ζ в форме (2.3) в области D_1 и, следовательно, в форме (2.4) на соответствующем участке стенки сопла несправедлива. Пусть e — точка пересечения возмущенной характеристики se со стенкой при некотором возмущении числа Маха на входе в сопло, а e° — аналогичная точка при $M = M^\circ$. В соответствии с этим в процессе полета точка e пробегает весь участок стенки сопла, лежащий внутри D_1 . Зафиксируем какую-либо точку e^* на этом участке. Можно показать, что для тех моментов времени, когда e^* оказывается между точками e и e° , добавок, соответствующий третьему слагаемому в (2.4), которое записано для e^* , преобразуется к виду

$$\zeta_M(x, y) \Delta M \pm y_M (\zeta_+{}' - \zeta_-{}') (\Delta M - \Delta M^*) \quad (3.6)$$

Здесь $y_M = \partial y_e / \partial M$ — величина, характеризующая темп смещения ординаты точки e при возмущении числа Маха на входе в сопло; $\Delta M^* = \Delta M^*(y)$ — такое возмущение числа Маха, при котором точка e совпадает с рассматриваемой точкой стенки e^* . Знак плюс в (3.6) соответствует случаю, когда $\Delta M^* > 0$, минус — когда $\Delta M^* < 0$. Индексы плюс и минус приписаны производной ζ' , вычисленной соответственно справа и слева от точки e° . Функция $\zeta_M(x, y)$ в (3.6) та же, что и в выражении (2.4), которое справедливо в рассматриваемой точке e^* во все прочие моменты времени. Для $\zeta(x, y, t)$ в точке e° выражение (2.4) можно оставить неизменным, однако, следует иметь в виду, что для моментов времени, когда $\Delta M < 0$ и $\Delta M > 0$, функция ζ_M вычисляется соответственно справа и слева от точки e° .

После преобразования (2.4) в соответствии с (3.6) и подстановки получающегося выражения в (1.1) можно видеть, что при $\zeta \equiv Q$ второе слагаемое в (3.6) обращается в нуль. Последнее обстоятельство непосредственно следует из (3.4). Таким образом, несмотря на отмеченную особенность, оказывается, что соотношение

оптимальности (3.3) сохраняет свою справедливость в каждой точке стенки сопла. Заметим лишь, что в соответствии с вышесказанным функция $(Q_M)'$ в (3.3) терпит разрыв в точке e^0 .

4. Изложенный выше результат получен в предположении малости изменения параметров газа на входе в сопло в процессе полета. С другой стороны, представляется интересным выяснить вопрос о том, насколько полученный результат применим в тех случаях, когда эти изменения значительны. Ответ на этот вопрос может быть получен при непосредственном сравнении данного оптимального решения с каким-либо другим решением. Вообще говоря, для такого сравнения необходимо решать полную задачу, т. е. ее траекторную и газодинамическую части, что весьма сложно. В то же время, используя первое условие оптимальности (1.4), отличие рассматриваемого контура сопла от оптимального в каждой его точке можно характеризовать значением интеграла, стоящего в левой части соответствующего равенства

$$K \equiv \int_{t_1}^{t_2} \rho v W(t) (u - \mu_2/y^v)' dt$$

Наряду с K введем интегральный параметр L , характеризующий в целом близость рассматриваемого контура к оптимальному и равный

$$L \equiv \int_{y_a}^{y_b} |K| dy / \int_{t_1}^{t_2} W(t) dt \quad (4.1)$$

Кроме того, введем средний интеграл сил давления, который получается осреднением по времени аналогично (3.5)

$$P \equiv \int_{t_1}^{t_2} W(t) \int_{y_a}^{y_b} p y^v dy dt / \int_{t_1}^{t_2} W(t) dt \quad (4.2)$$

и дает некоторое представление об эффективности сравниваемых сопел.

Пусть известны длина X и ордината y_c концевой точки сопла. Тогда для построения контура сопла в соответствии с (3.5) достаточно задать функции $M(t)$ и $W(t)$, характеризующие траекторную часть задачи. Значения параметров течения и множителей Лагранжа, необходимые для вычисления (4.1) и (4.2), для известного контура сопла и заданных функций $M(t)$ и $W(t)$ могут быть найдены численно.

Оптимальное сопло, полученное из решения траекторной задачи, т. е. в соответствии с п. 3 данной работы, представляется естественным сравнить с соплом, которое отвечает решению стационарной задачи для того же значения ординаты концевой точки y_b , длины X и среднего по времени числа Маха $\langle M \rangle$ на входе, определяемого по формуле

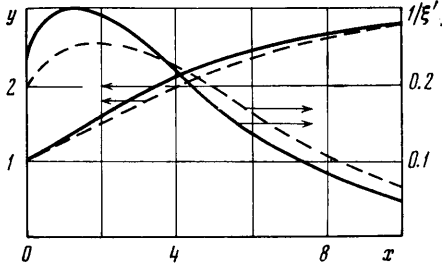
$$\langle M \rangle = (t_2 - t_1)^{-1} \int_{t_1}^{t_2} M(t) dt \quad (4.3)$$

Ниже приведены результаты выполненного численного сравнения. При этом зависимости от времени функции $W(t)$ и числа Маха $M(t)$ брались следующими:

$$W(t) = W_1 e^{-nt}, \quad M(t) = M_1 + (M_2 - M_1) (1 - e^{-t}) / (1 - e^{-t_2}) \quad (4.4)$$

Здесь $W_1 = W(t_1)$, где $t_1 = 0$, а вместо значения t_2 задавалось отношение W_2 / W_1 , где $W_2 = W(t_2)$; M_1 и M_2 — известные значения $M(t)$ соответственно в моменты времени t_1 и t_2 .

Для M° , определенного по формуле (3.5), и заданных y_b и X строится оптимальный контур осесимметричного сопла. Затем на отрезке оси времени (t_1, t_2) задаются N точек и для соответствующих им согласно (4.4) значений числа Маха рассчитываются параметры течения газа и множители Лагранжа на контуре ab . Расчет проводится методом характеристик сначала для параметров течения с граничными условиями на замыкающей характеристике пучка af и контуре сопла ab , а затем для множителей Лагранжа μ , с граничными условиями на bf и ab . Заметим, что расчет веера волн разрежения около точки a , необходимый для постановки граничных условий на af , проводится для каждого из указанных значений числа



Фиг. 2

Маха на входе в сопло. При вычислении интегралов в (4.1) и (4.2) значения параметров течения и множителей Лагранжа на каждом шаге интегрирования находятся с помощью интерполяции по известным точкам, число которых N выбирается из соображений точности. Далее аналогичная процедура проводится для контура сопла, отвечающего решению стационарной вариационной задачи и рассчитанного на среднее по времени число Маха на входе $\langle M \rangle$, которое определяется по формуле (4.3). Значения L и P , соответствующие $\langle M \rangle$ обозначим через $\langle L \rangle$ и $\langle P \rangle$, а соответствующие M° — через L° и P° .

В расчетах, выполненных для трех вариантов сопел, величины M_1 , M_2 и W_2/W_1 , характеризующие соответствующие условия полета, значения y_b и X , а также значения вычисленных в результате параметров были следующими:

M_1	1.5	1.5	1.3
M_2	2.5	3.0	2.6
W_2/W_1	0.005	0.01	0.001
y_b	2.0	2.7	2.8
X	7.0	10.0	10.0
M°	1.69	1.83	1.51
$\langle M \rangle$	2.01	2.28	1.99
L°	0.0029	0.0038	0.0031
$\langle L \rangle$	0.0188	0.0144	0.0220
P°	0.1163	0.1239	0.1771
$\langle P \rangle$	0.1153	0.1228	0.1756

Как видно, оптимальные сопла, спрофилированные в соответствии с выводом п. 3, имеют в 4—7 раз меньшие значения невязки L , а также несколько большие величины осредненных интегралов сил давления P . Подчеркнем еще раз, что в действительности сравниваться должны значения функционалов, оптимизируемых в траекторной задаче. Следует заметить, что в каждом из вариантов расчета при вычислении L и P в обоих сравниваемых случаях были использованы одни и те же функции $M(t)$ и $W(t)$, тогда как в действительности эти функции в зависимости от конфигурации сопла видоизменяются. Однако слабая зависимость P от формы контура сопла оправдывает сделанное допущение. Слабое влияние оптимального профилирования контура на величину P позволяет ожидать, что и выигрыш в значении оптимизируемого в траекторной задаче параметра будет также незначительным.

На фиг. 2. представлены контуры сравниваемых сопел, а также кривые $1/\xi'(x)$ для третьего варианта расчета, причем сплошные линии соответствуют соплу, рассчитанному на число Маха M° на входе. Масштаб вдоль оси x на фиг. 2 в два раза больше, чем вдоль оси y .

Автор благодарит А. Н. Крайко за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе, а также Ю. Д. Шмыглевского за критические замечания.

Поступило 25 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
2. Гонор А. Л., Крайко А. Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях. В кн. «Теория оптимальных аэродинамических форм», М., «Мир», 1969, стр. 455—492.
3. Крайко А. Н., Осипов А. А. О построении контура сверхзвукового сопла с учетом изменения условий полета летательного аппарата. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6, стр. 1067—1075.
4. Борисов В. М., Шипилин А. В. О соплах максимальной тяги с произвольными изопериметрическими условиями. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, стр. 182, 183.