УДК 532.529.2

КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОСТИ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИ СВЯЗАННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ КАНАЛАХ

Л. Г. БОГАТЫРЕВА, Г. Ф. ШАЙДУРОВ

(*Пермь*)

В работе [1] найдены условия возникновения конвективной циркуляции жидкости в замкнутом контуре, состоящем из двух одинаковых круглых вертикальных труб, соединенных между собой вверху и внизу. В обеих трубах контура задавался одинаковый градиент температуры, направленный вниз, а на их внешних поверхностях осуществлялись условия конвективного теплообмена. В этих предположениях скорости движения жидкости в трубах связаны только кинематическим условием замкнутости потока. Учет теплового взаимодействия каналов через теплопроводный массив сделан в [2].

В данной работе рассматривается случай, когда продольные градиенты температуры на вертикальных участках контура не одинаковы по величине. В такой постановке скорости конвективного движения жидкости в вертикальных трубах контура связаны не только условием замкнутости, но и гидродинамически, а кризис равновесия определяется уже не одним, а двумя числами Рэлея. Получено точное решение рассматриваемой задачи конвективной устойчивости. Найдены критические значения чисел Рэлея в зависимости от параметра, определяющего затухание температурных возмущений в стенках труб. Результаты теории подтверждены экспериментом.

1. Замкнутый контур, образованный двумя одинаковыми вертикальными круглыми трубами, заполнен несжимаемой жидкостью, которая может свободно перетекать из одной трубы в другую. Внутренний a и внешний b радиусы труб малы по сравнению с их длиной. В жидкости и стенках одной из труб создан стационарный градиент температуры $\mathbf{A}_1$, а во второй — градиент $\mathbf{A}_2$. Градиенты однородны по длине и сечению каждой из труб и направлены вертикально вниз.

Механическое равновесие жидкости в контуре возможно, если вес жидкости в каждом из вертикальных каналов одинаков. Поскольку $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ однородны по координатам, а зависимость плотности жидкости от температуры предполагается линейной, для равновесия необходимо равенство температур, усредненных по объему жидкости в трубах контура. Предполагая эти требования выполненными, найдем условия, при которых равновесие становится неустойчивым и в контуре возникает конвективная циркуляция.

Рассматривая возмущения равновесия вида

$$v_x = v_y = 0, \qquad v_z = v(x, y), \qquad t = t(x, y) \tag{1.1}$$

запишем стационарные уравнения малых возмущений для каждой из труб

$$\nu\Delta v_i = -g\beta t_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_i}{\partial z}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial x} = \frac{\partial P_i}{\partial y} = 0$$

$$\chi\Delta t_i = -A_i v_i, \qquad \Delta t_{mi} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{1.2}$$

Здесь g, ρ, β, ν, χ — ускорение силы тяжести, плотность, коэффициенты теплового расширения, кинематической вязкости и температуропроводности жидкости, v, p, t, t_m — возмущения скорости, давления, температуры в жидкости и стенках труб, Δ — оператор Лапласа.

В отличие от случая $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$, когда можно считать $\nabla p = 0$ (см. [1, 2]), при $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{A}_2$ обязательно $\nabla p \neq 0$. Из (1.2) следует, что $\partial p / \partial z = \mathrm{const}$.

Исключая в (1.2) температуру, приходим к уравнениям для возмущений скорости

$$\Delta^2 v_i - k_i^4 v_i = 0, \qquad k_i^4 = g\beta / (\nu\chi)^{-1} A_i \tag{1.3}$$

совпадающим с полученными в работах [3] (для конвекции в одиночном вертикальном канале) и [1].

На границе жидкость — стенка трубы скорость обращается в нуль, а температуры и тепловые потоки непрерывны

$$v_i = 0, \quad t_i = t_{mi}, \quad \lambda \frac{\partial t_i}{\partial r} = \lambda_m \left(\frac{\partial t_m}{\partial r} \right) \quad (r = a) \tag{1.4}$$

Будем считать, что затухание температурных возмущений на внешней поверхности труб происходит за счет конвективного теплообмена с окружающей средой

$$-\lambda_m (\partial t_{mi} / \partial r) = \alpha t_{mi} \qquad (z = b) \tag{1.5}$$

Здесь z — расстояние от оси любой из труб, λ и λ_m — коэффициенты теплопроводности жидкости и материала стенок труб, α — коэффициент теплоотдачи.

Простейшей форме конвективного движения (конвективной циркуляции с осесимметричным профилем скорости) должно соответствовать наименьшее критическое число Рэлея $R \equiv (ka)^4$. Ограничиваясь рассмотрением этого физически наиболее интересного случая, запишем решение уравнений (1.3) в виде

$$v_i = v_{0i}[I_0(k_i a) J_0(k_i r) - J_0(k_i a) I_0(k_i r)] \tag{1.6}$$

Эта линейная комбинация функций Бесселя первого рода нулевого порядка от вещественного и мнимого аргументов удовлетворяет граничным условиям для скорости. Связь между амплитудами возмущений скорости

$$v_{02} = -v_{01} \frac{k_2}{k_1} \frac{J_1(k_1 a) I_0(k_1 a) - J_0(k_1 a) I_1(k_1 a)}{J_1(k_2 a) I_0(k_2 a) - J_0(k_2 a) I_1(k_2 a)} \tag{1.7}$$

находится из условия равенства нулю расхода жидкости через поперечное сечение контура. При $A_1 = A_2$ скорости в трубах должны отличаться только знаком [1]. Этот результат содержится в (1.7).

Подставляя (1.6) в первое уравнение системы (1.2), найдем возмущение температуры жидкости

$$t_i = v_{0i} \frac{\nu k_i^2}{g\beta} [I_0(k_i a) J_0(k_i r) + J_0(k_i a) I_0(k_i r)] + \frac{1}{\rho g \beta} \frac{\partial p_i}{\partial z} \tag{1.8}$$

Осесимметричное возмущение температуры в стенках труб, удовлетворяющее уравнению теплопроводности, имеет вид

$$t_{mi} = C_i + D_i \ln r / a$$

Постоянные

$$D_i = v_{0i} \frac{\lambda}{\lambda_m} \frac{\nu k_i^3 a}{g\beta} [J_0(k_i a) I_1(k_i a) - J_1(k_i a) I_0(k_i a)]$$

$$C_i = -D_i (B^{-1} + \ln b / a)$$

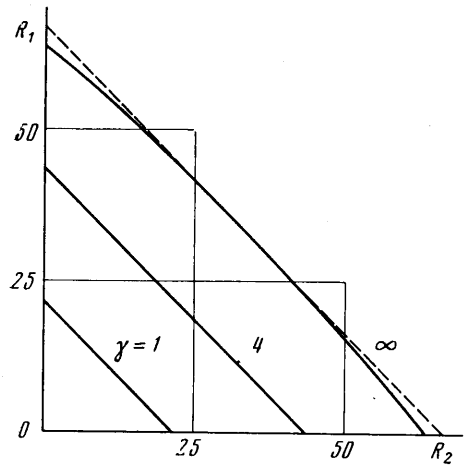
определяются из условий непрерывности тепловых потоков при $r = a$ и граничного условия (1.5). Здесь $B \equiv \alpha b \lambda_m^{-1}$ — число Био.

Используя условие непрерывности температуры при $r = a$ и естественное требование $\partial p_1 / \partial z = \partial p_2 / \partial z$, учитывающее гидродинамическое взаимодействие вертикальных труб контура, получаем

$$R_1+R_2=2\gamma\sum_{i=1}^{2}M_i(k_ia)^3,\qquad M_i=\left[\frac{J_1(k_ia)}{J_0(k_ia)}-\frac{I_1(k_ia)}{I_0(k_ia)}\right] \tag{1.9}$$

Параметр $\gamma\equiv(\lambda_m/\lambda)(B^{-1}+\ln b/a)^{-1}$ определяет затухание температурных возмущений в стенках труб.

Уравнение (1.9) упрощается, если в одной из труб контура градиент температуры равен нулю. Учитывая два первых члена разложения в ряд функций Бесселя при $A\to0$, будем иметь $R_0=2\gamma[8+M(ka)^3]$. Это выражение можно получить и непосредственно из уравнений малых возмущений (1.2). При $A_1=A_2$ формула (1.9) переходит в уравнение $R==2\gamma M(ka)^3$, полученное в [1]; кризис равновесия жидкости в контуре здесь также определяет одно критическое значение числа Рэлея.

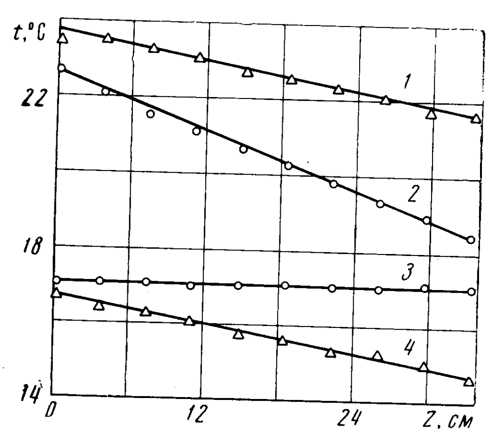


Фиг. 1

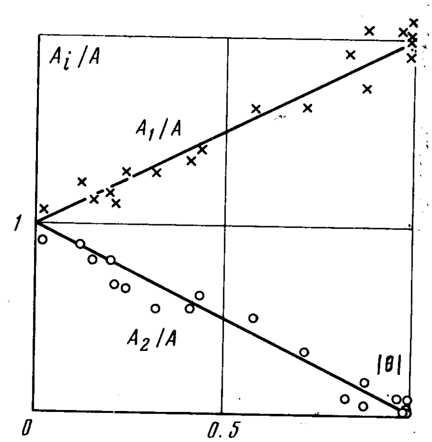
В общем случае неустойчивость определяется двумя критическими числами R_1 и R_2, связанными между собой уравнением (1.9). Если в первой и второй трубах контура числа Рэлея равны этим критическим, то равновесие жидкости становится неустойчивым, и в контуре возникает циркуляционное конвективное движение.

Результаты решения уравнения (1.9) для трех значений γ приведены на фиг. 1. Как видно из фиг. 1, с уменьшением числа Рэлея (градиента температуры) в одной из труб контура критическое число Рэлея для второй трубы монотонно растет, достигая максимального значения при отсутствии продольного градиента в первой трубе.

Устойчивость равновесия жидкости в контуре зависит от затухания температурных возмущений в стенках труб, определяемого параметром γ. В случае теплоизолированных стенок ($\gamma=0$) имеет место абсолютная конвективная неустойчивость: $R_1=R_2=0$. При увеличении затухания возмущений (с увеличением γ) числа Рэлея монотонно растут, достигая максимальных значений при $\gamma=\infty$, т. е. в случае, когда температурные возмущения на стенках труб полностью затухают.



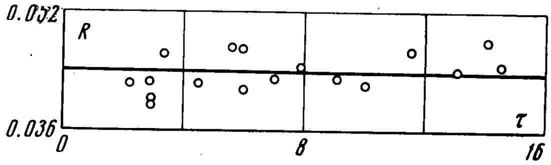
Фиг. 2



Фиг. 3

Заметим, что кривые фиг. 1 не очень сильно отличаются от прямых $R_1 + R_2 = 2R$, где R — критическое число Рэлея в случае $A_1 = A_2$. Одна из таких прямых изображена на фиг. 2 пунктиром. Максимальное отличие в 4.5% имеет место при $\gamma = \infty$. Отклонения от прямой уменьшаются с γ и, например, при $\gamma = 4$ составляют 1.9%. Зависимость R от γ приведена в работе [1].

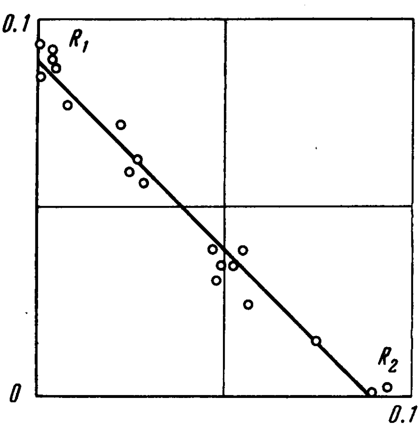
2. Эксперименты были выполнены на модели, состоящей из двух вертикальных стеклянных трубок с радиусами $a = 1.17$ *мм*, $b = 2.38$ *мм* и длиной 370 *мм*, сообщающихся вверху и внизу с резервуарами, которые заполнены вместе с трубками ртутью. Ртуть в нижнем резервуаре нагревалась, а в верхнем — охлаждалась циркуляционными ультратермостатами. Измерение распределения температуры вдоль каждой из трубок производилось с помощью десяти медно-константановых термопар с диаметром проводов 0.1 *мм*, горячие спаи которых припаивались к кольцам из мед-



Фиг. 4

ной фольги шириной 1 *мм* и толщиной 0.05 *мм*, плотно насаженным на трубки на расстоянии 37 *мм* друг от друга. Общий холодный спай термопар поддерживался при комнатной температуре. Показания термопар снимались зеркальным гальванометром либо записывались на движущуюся фотобумагу с помощью пирометра ФПК-59. Опыты проводились в стационарном тепловом режиме или в условиях квазистационарного естественного охлаждения модели, между холодильником и нагревателем которой предварительно создавалась значительная разность температур.

Температурные измерения, проведенные в этих двух режимах, дали совпадающие результаты.



Фиг. 5

Опыты показали, что при разности температур между нагревателем и холодильником, превышающей критическую, в контуре возникает циркуляционное конвективное движение: в одной из трубок жидкость поднимается, в другой — опускается. Направление движения определяется, по-видимому, случайными причинами. Трубка с восходящим потоком жидкости всегда более нагрета, нежели труба, в которой жидкость опускается. Возникающая поперечная разность температур пропорциональна скорости конвективной циркуляции, что было установлено в экспериментах по измерению конвективных скоростей с помощью электромагнитного расходомера [4] и следует из (1.8).

На фиг. 2 изображено распределение температуры вдоль труб контура в двух опытах. Температура труб изменяется с продольной координатой z по линейному закону. В первом опыте (кривые *1*) продольные градиенты в трубах контура почти одинаковы, а во втором (кривые *2*) — сильно отличаются по величине: в одной из труб контура градиент равен нулю, зато во второй трубе примерно в два раза больше, чем в первом опыте.

Установлено, что $A_1 \neq A_2$ в тех случаях, когда теплообмен одной из труб контура с воздухом комнаты отличается по величине от теплообмена другой. Такое отличие в теплообмене определяется безразмерной температурой $\theta = (t_+ + t_-) / (t_+ - t_-)$, где $t_+ \geqslant 0$, $t_- \leqslant 0$ — температуры нагревателя и холодильника, отсчитанные от температуры окружающего воздуха.

Зависимость от θ градиентов A_1 и A_2, отнесенных к $A = 0.5\,(A_1 + A_2)$, представлена на фиг. 3. При $\theta = 0$ ($t_+ = |t_-|$) теплоотдача труб отличается лишь знаком, и $A_1 = A_2$. При $|\theta| > 0$ симметрия в теплообмене нарушается, поэтому $A_1 \neq A_2$. С ростом $|\theta|$ разница между A_1 и A_2 увеличивается, достигая максимального значения $2A$ при $|\theta| = 1$. В последнем случае температура нагревателя (или холодильника) равна температуре комнаты. При этом обращается в нуль градиент температуры в той трубе контура, в которой жидкость движется от резервуара с нулевой температурой (теплообмен этой трубы с воздухом комнаты отсутствует).

По измеренным в экспериментах градиентам A_1 и A_2 вычислялись числа Рэлея R_1 и R_2. На фиг. 4 среднее число Рэлея $R = 0.5\ (R_1 + R_2)$ отложено в функции средней поперечной разности температур τ между вертикальными трубами контура. Последняя растет с разностью температур нагревателя и холодильника и интенсивностью конвективного движения. Напротив, R в весьма широких пределах (по-видимому, вплоть до турбулизации) не зависит от τ и интенсивности конвекции и, следовательно, совпадает с критическим числом Рэлея, определяющим возникновение конвективной циркуляции жидкости в контуре.

Связь между критическими числами R_1 и R_2 изображена на фиг. 5. Теоретическая кривая (1.9) построена для $\gamma = 0.00276$, найденного по результатам экспериментов при $A_1 = A_2$. С точностью до 5% это значение совпадает с измеренным по методике, разработанной в [1]. Как видно из графика, экспериментальные точки группируются около теоретической кривой. Таким образом, с точностью до погрешностей эксперимента теоретические и экспериментальные значения критических чисел Рэлея совпадают.

Поступило 13 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Shaidurov G. F. Convective liquid stability in closed circuits. Internat. Pleat and Mass Transfer, 1968, vol. 11, No. 2, p. 235.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шайдуров Г. Ф. О конвективной неустойчивости жидкости в связанных вертикальных каналах. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
4. Богатырева Л. Г., Шайдуров Г. Ф. Опыт использования электромагнитного расходомера для измерения скорости конвективного движения жидкости при малых определяющих размерах. В кн. «Сборник материалов к IV Таллинскому совещанию по электромагнитным расходомерам», 1970, т. 1, вып. 3.