УДК 532.529

СТЕРЖНЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ ВОЛОКНИСТОЙ СУСПЕНЗИИ

В. А. БАБКИН

(*Петрозаводск*)

Построена модель волокнистой суспензии в стержневом течении. Решение задачи о течении суспензии в прямой круглой трубе получено для двух частных случаев и сравнивается с экспериментом.

При течении волокнистой суспензии в круглой трубе различают несколько режимов течения [1-3]. Если скорость течения сравнительно невелика, то в трубах устанавливается так называемое «стержневое течение». Оно характерно тем, что в трубе образуются две области течения: ядро течения, или стержень [1-3], в котором сосредоточена вся масса волокон, и пристенный слой, в котором волокон нет и течет только жидкая фаза суспензии. При достижении суспензией определенной скорости стержень начинает разрушаться и течение перестает быть стержневым.

1. Постановка задачи. Модель течения. Пусть по прямой круглой трубе радиуса $R = {}^1/_2 D$ в направлении оси x течет волокнистая суспензия известной весовой концентрации c. Между заданными сечениями x_1 и $x_2 (x_2 - x_1 = l)$ поддерживается постоянный перепад давления $p_1 - p_2 = \Delta p$. Требуется определить расход суспензии.

При построении модели течения воспользуемся следующими экспериментальными фактами [1-3]. Если течение суспензии таково, что $|\tau_w| < \tau_*$, где τ_w — касательное напряжение на стенке трубы, а τ_* — характерная для суспензии константа, то в суспензии происходит частичное разделение фаз. Около твердой стенки образуется тонкий слой жидкости, свободный от волокон, тогда как вся масса волокон движется в ядре течения (соответственно области *1* и *2*). В ядре течения волокна образуют плотную сеть, которая обладает упругостью и прочностью, так что скорость по сечению ядра постоянна. Течение жидкости в пристенном слое ламинарное. Задача состоит в том, чтобы найти распределение скоростей в областях *1* и *2* и границу раздела областей, т. е. толщину пристенного слоя d.

Ламинарное течение жидкости в пристенном слое описывается уравнением Навье — Стокса. Его решение для одномерного осесимметричного течения с учетом прилипания на стенке $r = R$ имеет вид

$$v_1 = \frac{P}{4\eta}(R^2 - r^2) + C \ln\left(\frac{r}{R}\right), \quad R - d < r \leqslant R, \quad P = \frac{\Delta p}{l} \tag{1.1}$$

где η — вязкость жидкости; C — константа интегрирования.

Ядро течения будем рассматривать как насыщенную пористую среду, твердая фаза которой (сеть волокон) движется со скоростью w, а жидкая фаза (жидкость) — со скоростью v_2. Относительное движение жидкости в сети волокон, которая описывается уравнением фильтрации Дарси [4]

$$P = -dp / dx = a(v_2 - w), \quad 0 < r \leqslant R - d \tag{1.2}$$

где a — коэффициент сопротивления, известным образом [4] зависящий от вязкости жидкости η и пористости среды m. Из опытов [1, 2] следует, что при стержневом течении $w = \text{const}$. Величина w должна быть найдена в ходе решения задачи.

Жидкость, фильтрующая через сеть волокон, вызывает деформацию сети, вследствие чего в области течения образуется пристенный слой. Толщину слоя d найдем, рассматривая относительное равновесие сети волокон как равновесие сплошной упругой среды.

Если учесть, что все силы приложены к сети волокон симметрично относительно оси x, коллинеарно ей и не зависят от координат x и θ, то в системе координат, жестко связанной с сетью волокон, уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\frac{\partial\sigma_{rx}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rx}}{r}=\frac{dp}{dx}=-P, \qquad \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0 \tag{1.3}$$

где σ_{ij} — фиктивные напряжения [5] в пористой среде.

Напряжения σ_{ij} определим законом Гука четвертой степени

$$\sigma_{ij}=(1-m)^k(F_0\delta_{ij}+2F_1\varepsilon_{ij}+4F_2\varepsilon_{i\alpha}\varepsilon_{\alpha j}) \tag{1.4}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, ε_{ij} — малые конечные деформации [6], $i, j = r, \theta, x$; по одинаковым индексам проводится суммирование от 1 до 3. Скаляры F_0, F_1, F_2 имеют следующий вид

$$F_0=\lambda_1I_1+\lambda_2I_2+\lambda_3I_3+\lambda_4I_1^2+\lambda_5I_1I_2+$$
$$+\lambda_6I_2^2+\lambda_7I_1I_3+\lambda_8I_1^3+\lambda_9I_1^2I_2+\lambda_{10}I_1^4 \tag{1.5}$$
$$F_1=\mu_0+\mu_1I_1+\mu_2I_2+\mu_3I_3+\mu_4I_1^2+\mu_5I_1I_2+\mu_6I_1^3$$
$$F_2=\varkappa_0+\varkappa_1I_1+\varkappa_2I_2+\varkappa_3I_1^2$$
$$I_1=\varepsilon_{\alpha\alpha},\qquad I_2=\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\alpha},\qquad I_3=\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma}\varepsilon_{\gamma\alpha}$$

где λ_i, μ_j, $\varkappa_k$ — константы, зависящие от типа волокон.

В процессе деформации пористость среды меняется. Найдем формулу, связывающую пористости среды в деформированном и недеформированном состояниях. По определению [5]

$$1-m=dV'/dV \tag{1.6}$$

где dV' — объем твердой фазы, находящейся в объеме пористой среды dV. Если dV_0 — объем среды до деформации, то объем среды после деформации dV определяется формулой [6]

$$dV_0/dV=[1-2I_1+2(I_1^2-I_2)-{}^4/_3(I_1^3-3I_1I_2+2I_3)]^{1/2} \tag{1.7}$$

Считая, что собственный объем волокон dV' в процессе деформации не изменяется, из (1.6), (1.7) легко получим

$$1-m=(1-m_0)[1-2I_1+2(I_1^2-I_2)-{}^4/_3(I_1^3-3I_1I_2+2I_3)]^{1/2} \tag{1.8}$$

где m_0 — пористость среды в недеформированном состоянии.

Вследствие одномерности и симметрии деформации относительно оси трубы смещения точек сети волокон будем искать в виде

$$u_r=u_r(r),\qquad u_\theta=0,\qquad u_x=u_x(r) \tag{1.9}$$

Конечные деформации ε_{ij} выражаются через смещения (1.9) по формулам

$$\varepsilon_{rr}=u_{r,r}-{}^1/_2(u_{r,r}^2+u_{x,r}^2)$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}=u_r/r-u_r/2r^2,\qquad \varepsilon_{rx}=u_{x,r}/2$$
$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{x\theta}=\varepsilon_{r\theta}=0,\qquad u_{i,r}=du_i/dr,\qquad i=r,\ x \tag{1.10}$$

Равенства (1.1) — (1.5), (1.8) — (1.10) составляют замкнутую систему уравнений, описывающих стержневое течение суспензии в трубе.

Сформулируем граничные условия. Поскольку условие прилипания жидкости при $r = R$ учтено в формуле (1.1), граничные условия зададим только на границе пристенного слоя и ядра течения. Потребуем, чтобы при $r = R - d$ были выполнены следующие равенства:

$$v_1 = w, \quad \tau_{rx} = \sigma_{rx}, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad u_r = -d \tag{1.11}$$

где τ_{rx} — касательное напряжение в жидкости. Кроме того, необходимо потребовать, чтобы на оси трубы $r = 0$ смещение u_r и напряжение σ_{rx} были конечны.

Первое равенство (1.11) представляет собой кинематическое условие на границе $r = R - d$. Поясним его. Вообще говоря, кинематическое условие на границе пристенного слоя и ядра течения должно связывать три скорости: v_1, v_2, w. Для вязкой жидкости при $r = R - d$ эти скорости должны быть равны, т. е. $v_1 = w = v_2$.

Отсюда и из (1.2) следует, то, если $v_2(r)$ есть непрерывная функция и $r \to R - d$, то $a \to \infty$. Поскольку a конечно, что это означает, что в рамках модели пористой среды с уравнением фильтрации (1.2) скорость жидкости терпит скачок при переходе границы $r = R - d$, т. е. $v_1 \neq v_2$ при $r = R - d$, и кинематическое граничное условие имеет вид первого равенства (1.11).

Второе и третье равенства (1.11) получены из условия, что поток импульса всей среды на поверхности разрыва $r = R - d$ непрерывен.

Четвертое условие (1.11) соответствует предположению, что в недеформированном состоянии сеть волокон касалась стенок трубы. Это вполне согласуется с опытами [1, 2].

В заключение отметим, что приведенные выше соотношения могут быть обобщены на случай произвольного течения волокнистой суспензии, происходящего без разрушения сети волокон.

2. **Частные случаи течения.** Решение задачи, поставленной в п. 1, в общем случае связано с большими математическими трудностями. Рассмотрим два частных случая. Полученные решения позволяют выявить некоторые характерные свойства предложенной модели и, что очень важно, провести сравнение с экспериментом.

Первый частный случай. Пусть течение суспензии таково, что $u_{r,r}$, u_r/r имеют порядок $u_{x,r}^2$, а величинами порядка $u_{x,r}^n$, где $n > 2$, можно пренебречь. Тогда согласно (1.4), (1.5), (1.8), (1.10) уравнения для компонент, входящих в (1.3) и (1.4), а также для пористости имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= (1 - m_0)^k[(\lambda_1 + 2\mu_0)u_{r,r} + \lambda_1 u_r/r + \\ &\quad + {}^1/_2(\lambda_2 - \lambda_1 - 2\mu_0 + 2\varkappa_0)u_{x,r}^2] \\ \sigma_{\theta\theta} &= (1 - m_0)^k[\lambda_1 u_{r,r} + (\lambda_1 + 2\mu_0)u_r/r + {}^1/_2(\lambda_2 - \lambda_1)u_{x,r}^2] \\ \sigma_{xr} &= (1 - m_0)^k\mu_0 u_{x,r}, \qquad m = m_0 + (1 - m_0)(u_{r,r} + u_r/r) \end{aligned} \tag{2.1}$$

После подстановки (2.1) в уравнение (1.3) получим уравнение для смещения u_x

$$\frac{d^2u_x}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_x}{dr} = -\frac{P}{\mu_0(1 - m_0)^k} \tag{2.2}$$

С учетом конечности напряжений σ_{rx} при $r = 0$ решение уравнения (2.2) имеет вид

$$u_x = -Pr^2/4\mu_0(1 - m_0)^k + C_1 \tag{2.3}$$

где C_1 — константа интегрирования.

Подставляя (2.1) во второе уравнение (1.3) и принимая во внимание формулу (2.3), получим уравнение для смещения u_r

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\frac{u_r}{r^2}=\frac{rP^2}{4f_1} \tag{2.4}$$

$$f_1=\mu_0^2(1-m_0)^{2k}(\lambda_1+2\mu_0)\,/\,(\lambda_1-\lambda_2+3\mu_0-3\varkappa_0)$$

Решая уравнение (2.4) с учетом третьего и четвертого условий (1.11), а также с учетом конечности смещения u_r при $r=0$, найдем

$$u_r=\frac{P^2}{32}\left[\frac{r^3}{f_1}+\frac{r(R-d)^2}{q_1}\right],\qquad \frac{d}{R}=\frac{P^2R^2}{32E_1^2} \tag{2.5}$$

$$q_1=\mu_0^2(1-m_0)^{2k}(\lambda_1+2\mu_0)(\lambda_1+\mu_0)\left[2\lambda_1\varkappa_0-\mu(\lambda_1+\lambda_2+\mu_0-\varkappa_0)\right]^{-1}$$

$$\frac{1}{E_1^2}=-\left(\frac{1}{f_1}+\frac{1}{q_1}\right)=\frac{\lambda_2-\lambda_1+\varkappa_0-\mu_0}{\mu_0^2(1-m_0)^{2k}(\lambda_1+\mu_0)}$$

Из опытов [1, 2] следует, что величина $(d/R)^2$ много меньше единицы. Как при выводе второй формулы (2.5), так и везде ниже величины порядка $(d/R)^n$ (где $n>1$) не учитывались.

Для определения поля скоростей в пристенном слое надо найти константу C в формуле (1.1). Используя второе граничное условие (1.11), получим, что $C=0$ и

$$v_1=(4\eta)^{-1}P(R^2-r^2) \tag{2.6}$$

Постоянная скорость сети волокон w (см. п. 1) согласно первому условию (1.11) равна v_1 при $r=R-d$, т. е.

$$w=(2\eta)^{-1}PRd \tag{2.7}$$

Скорость жидкости в ядре течения v_2 определяется из уравнения (1.2). Ограничиваясь величинами порядка d/R, найдем

$$v_2=P(Rd\,/\,2\eta+1\,/\,a_0) \tag{2.8}$$

где a_0 — значение коэффициента сопротивления a при $m=m_0$.

Задача решена полностью: формулы (2.6) — (2.8) определяют поле скоростей в пристенном слое и ядре течения, а вторая формула (2.5) — границу раздела областей.

Второй частный случай. Рассмотрим частный случай модели, когда коэффициенты, входящие в уравнения (1.4), (1.5), удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1=\lambda_2,\qquad \mu_0=\varkappa_0,\ \mu_1=\mu_2 \tag{2.9}$$

Тогда, как видно из (2.1), в уравнениях состояния для σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ пропадут члены с $u_{x,r}{}^2$. Кроме того, благодаря последнему равенству (2.9) в формуле, определяющей σ_{rx}, пропадет член с $u_{x,r}{}^3$.

Пусть сеть волокон деформируется так, что $u_{r,r}$, u_r/r имеют порядок величин $u_{x,r}{}^4$, а величинами порядка $u_{x,r}{}^n$, где $n>4$, можно пренебречь. В этом случае уравнения состояния сети волокон примут вид

$$\begin{gathered}\sigma_{rr}=(1-m_0)^k[(\lambda_1+2\mu_0)u_{r,r}+\lambda_1u_r/r+\\+{}^1/_8(2\lambda_1-3\lambda_3+2\lambda_4-2\lambda_5+2\lambda_6+8\mu_0-4\varkappa_1+4\varkappa_2)u_{r,x}{}^4]\\ \sigma_{\theta\theta}=(1-m_0)^k[(\lambda_1+2\mu_0)u_{r,r}+\lambda_1u_r/r+\\+{}^1/_8(2\lambda_1-3\lambda_3+2\lambda_4-2\lambda_5+2\lambda_6)u_{x,r}{}^4]\\ \sigma_{rx}=(1-m_0)^k\mu_0u_{x,r},\qquad m=m_0+(1-m_0)(u_{r,r}+u_r/r)\end{gathered} \tag{2.10}$$

Рассуждая почти точно так же, как в первом случае, после вычислений получим

$$u_r = \frac{P^4}{768}\left[\frac{r^5}{f_2} + \frac{r(R-d)^4}{q_2}\right], \qquad \frac{d}{R} = \frac{P^4R^4}{768E_2^4} \tag{2.11}$$

$$f_2 = \mu_0^4(1-m_0)^{4k}(\lambda_1 + 2\mu_0)(3\lambda_3 - 2\lambda_1 - 2\lambda_4 + 2\lambda_5 - 2\lambda_6 - 10\mu_0 + 5\varkappa_1 - 5\varkappa_2)^{-1}$$

$$q_2 = \mu_0^4(1-m_0)^{4k}(\lambda_1 + 2\mu_0)(\lambda_1 + \mu_0)[\lambda_1(4\mu_0 - 3\varkappa_1 + 3\varkappa_2) + \mu_0(3\lambda_3 - 2\lambda_4 + 2\lambda_5 - 2\lambda_6 + 2\mu_0 - \varkappa_1 + \varkappa_2)]^{-1}$$

$$\frac{1}{E_2^4} = -\left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{q_2}\right) = \frac{2\lambda_1 - 3\lambda_3 + 2\lambda_4 - 2\lambda_5 + 2\lambda_6 + 4\mu_0 - 2\varkappa_1 + 2\varkappa_2}{\mu_0^4(1-m_0)^{4k}(\lambda_1 + \mu_0)}$$

Так же как в первом случае, скорости жидкости и сети волокон определяются по формулам (2.6) — (2.8), с той только разницей, что толщину пристенного слоя надо брать согласно второй формуле (2.11).

Дальнейшие рассуждения будем вести одновременно для обоих случаев. Формулы с параметром E_1 будут относиться к первому случаю, а формулы с параметром E_2 — ко второму.

С точностью до величин порядка $(d/R)^2$ средняя скорость суспензии v определяется формулой

$$v = m_0 v_2 + (1-m_0)w = P\left(\frac{Rd}{2\eta} + \frac{m_0}{a_0}\right) \tag{2.12}$$

Заменяя здесь P касательным напряжением на стенке τ_w по известной формуле $P = 2\tau_w/R$ и подставляя вместо d его выражения (2.5), (2.11), получим связь между средней скоростью v и напряжением на стенке для обоих случаев

$$\frac{v}{2R} = \frac{\tau_w^3}{16\eta E_1^2} + \frac{m_0\tau_w}{a_0R^2}, \qquad \frac{v}{2R} = \frac{\tau_w^5}{96\eta E_2^4} + \frac{m_0\tau_w}{a_0R^2} \tag{2.13}$$

Найдем условия, когда слагаемыми в правых частях формул (2.13) можно пренебречь, и они примут вид степенных зависимостей

$$\tau_w = (16\eta E_1^2)^{1/3}\left(\frac{v}{2R}\right)^{1/3}, \qquad \tau_w = (96\eta E_2^4)^{1/5}\left(\frac{v}{2R}\right)^{1/5} \tag{2.14}$$

Для этого вторые слагаемые в формулах (2.13) разделим на первые, а затем вместо средней скорости v подставим ее выражения из формул (2.14). Выразив τ_w через P и R по формуле $\tau_w = PR^2/2$, получим искомые условия

$$\frac{64\eta m_0 E_1^2}{a_0P^2R^4} \ll 1, \qquad \frac{1536\eta m_0 E_2^4}{a_0P^4R^6} \ll 1 \tag{2.15}$$

Из формул (2.13) сразу же следует, что при постоянном $v/2R$ напряжение τ_w растет с увеличением радиуса, достигая максимального значения (2.14) при $R = \infty$ (так называемый «масштабный эффект» [1]). В степенных формулах (2.14) напряжение τ_w зависит только от отношения $v/2R$ аналогично степенной неньютоновской жидкости [7], и масштабный эффект в этом случае не наблюдается.

3. Сравнение с экспериментальными результатами. При постановке задачи в п. 1 труба считалась гладкой. Следует ожидать, что влиянием шероховатости на течение суспензии можно пренебречь в том случае, когда средняя абсолютная шероховатость трубы много меньше толщины пристенного слоя.

Для сопоставления решения с экспериментами возьмем данные работ, в которых шероховатость труб была мала, а толщина пристенного слоя значительна. Этому условию отвечают работы [1, 2], в которых изучалось движение суспензий малой концентрации в стеклянных трубах. Анализ результатов этих работ, относящихся к стержневому течению, приводит к следующим основным выводам.

Связь между касательным напряжением на стенке трубы τ_w и средней скоростью суспензии v можно выразить формулой вида [1, 2]

$$\tau_w = K'(8v / D)^{n'}, \qquad D = 2R \tag{3.1}$$

где K' и n' — константы.

Параметры K' и n' зависят не только от сорта волокон, концентрации суспензии, но и от диаметра трубы, т. е. при течении суспензии наблюдается масштабный эффект [1].

Толщина пристенного слоя, образующегося при течении, хорошо описывается формулой [2]

$$d = \eta v / \tau_w \tag{3.2}$$

Разрушение волокнистого стержня начинается при определенном значении касательного напряжения на стенке трубы τ_*, причем напряжение τ_* зависит от сорта волокон, концентрации суспензии, но не зависит от диаметра трубы [1]. Иными словами, стержневое течение осуществляется при условии

$$|\tau_w| < \tau_* \tag{3.3}$$

Сравним эти общие выводы и некоторые конкретные данные работы [1] с результатами п. 2.

Из сопоставления формул (3.1) и (2.13) видно, что соотношение (3.1) можно рассматривать как аппроксимацию формул (2.13).

Если параметры течения удовлетворяют неравенствам (2.15), то формула (3.1) перейдет в соответствующие формулы (2.14), если только

$$n' = 1/3, \qquad K' = (2\eta E_1^2)^{1/3} \tag{3.4}$$

$$n' = 1/5, \qquad K' = (12\eta E_2^4)^{1/5} \tag{3.5}$$

Эксперименты [1] показывают, что действительно существуют суспензии, показатель n' которых близок к $1/3$ или $1/5$. В таблице приведены экспериментальные

c	n'		K'		E_1	E_2
0.25	GW	0.21	GW	1.8	GW	3.5
0.50	0.32	0.23	0.99	4.0	7.7	9.5
0.75	0.33	0.19	2.0	6.7	22	19
1.00	0.33	LL	3.9	LL	60	LL

значения K' в *дин·сек*$^{n'}$·*см*$^{-2}$ и показателя n' для суспензий волокон Poplar Groundwood (GW) и Long Lac 17 (LL). Близость теоретических и экспериментальных значений n' очевидна.

Зная из эксперимента K' и η, по формулам (3.4), (3.5) легко найти эффективные модули упругости E_1 и E_2. Вычисленные таким образом значения E_1 и E_2 в *дин/см*^{2} приведены в таблице. По порядку величины они совпадают со значениями модуля сдвига волокнистой суспензии, экспериментально определенными в работах [3, 8].

Испытания в трубах разного диаметра [1] показали, что при одинаковом $v / 2R$ напряжение на стенке τ_w будет большим для труб большего диаметра. Этот же результат был получен в п. 2.

Решив соотношение (2.12) относительно d и выразив P через τ_w, получим

$$d = \frac{\eta v}{\tau_w} - \frac{2\eta m_0}{a_0 R} \tag{3.6}$$

Формулы (3.2) и (3.6) отличаются только вторым слагаемым. Если параметры течения удовлетворяют одному из неравенств (2.15), то формулы (3.2) и (3.6) совпадут.

Проведенный краткий анализ свидетельствует о качественном совпадении результатов п. 2 с результатами работ [1, 2], а также о количественном совпадении с отдельными результатами работы [1]. Однако не все данные [1] количественно согласуются с результатами п. 2. Это и естественно, так как обсуждаемое решение задачи получено лишь для частных случаев.

В заключение автор благодарит В. В. Лохина и С. А. Регирера за внимание к работе и плодотворную критику.

Поступило 24 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Bugliarello G., Daily J. Rheological models and laminar shear flow of fiber Suspensions. Tappi, 1961, vol. 44, No. 12.
2. Форгес О. Л., Робертсон А. А., Мэзон С. Г. Гидродинамическое поведение волокон, применяемых для выработки бумаги. Сб. «Основные представления о волокнах, применяемых в бумажной промышленности». М., Гослесбумиздат, 1962.
3. Raij U., Wahren D. An experimental investigation of paper pulp stock flow in a straight pipe. Svensk Papperstidning, 1964, vol. 67, No. 5.
4. Han S. T., Ingmanson W. L. A simplified theory of filtration. Tappi, 1967, vol. 50, No. 4.
5. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
6. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М., Физматгиз, 1962.
7. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости. М., «Мир», 1964.
8. Шайдуров Г. Ф. О вязкости и упругости бумажной массы. Коллоидн. ж. 1955, т. 17, вып. 5.