

УДК 532.526.2

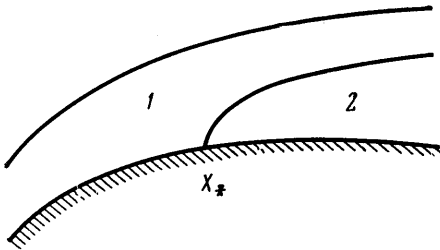
## К ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ВНЕЗАПНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. И. ЕЛИСЕЕВ

(Днепропетровск)

Внезапное изменение граничных условий приводит к нарушению основных положений теории пограничного слоя, однако такое нарушение проявляется в области, характерный размер которой составляет величину, соизмеримую с толщиной пограничного слоя, и влияние этой области на основное течение сказывается лишь при учете величин второго порядка малости. Это делает возможным рассматривать задачи с локальными особенностями в рамках теории пограничного слоя, но все же требует развития иных методов решения, основанных на сращивании решений, полученных в соседних областях. В данной работе при построении решений в пограничном слое для потенциального течения  $U = cx^m$  используется метод сращиваемых асимптотических разложений [1]. Область 2 (фиг. 1), в которой имеет место изменение того или иного граничного условия, является внутренней по отношению к области 1, поэтому решения в области 2 будем называть внутренними, а в области 1 — внешними. Такое разбиение всего вязкого слоя предполагает наличие как бы развивающегося нового пограничного слоя внутри уже развитого. Эта идея уже нашла свое успешное применение в работах [2-4].

В качестве безразмерного малого параметра для асимптотических разложений возьмем величину  $\varepsilon = \delta_2 / \delta_1$ , где  $\delta_1$  характеризует толщину пограничного слоя в каждом сечении  $x$ , а  $\delta_2$  — толщину области 2 в том же сечении. Считая, что область 2 начинается с некоторой точки  $x_*$  и с ростом  $x$  расширяется, стремясь к полному совпадению с пограничным слоем при  $x \rightarrow \infty$ , имеем,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .



Фиг. 1

1. Уравнение плоского пограничного слоя имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = U \frac{dU}{dx} + \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} \quad (1.1)$$

$$Y = \nu^{-1/2} y, \quad \Psi = \nu^{-1/2} \psi(x, y)$$

Рассмотрим два типа задач, для которых построение решений имеет общий характер. К первому типу отнесем задачи пограничного слоя со вдувом и отсосом за точкой  $x_*$ , ко второму — задачу о следе за бесконечно тонкой конечной пластиной. При построении решения необходимо различать три случая:  $m < 1$ ,  $m = 1$  и  $m > 1$ .

В первом случае решения во внутренней и внешней областях представим в виде

$$\Psi = \Psi_1 = (1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots) r \delta_1^\alpha [F_0(n) + \varepsilon F_1(n) + \dots] \quad (1.2)$$

$$\Psi = \Psi_2 = (1 + a_1 \varepsilon + a_2 \varepsilon^2 + \dots) r \delta_1^\alpha \varepsilon^2 [G_0(N) + \varepsilon G_1(N) + \dots] \quad (1.3)$$

$$N = Y / \delta_2$$

$$\alpha = (1 + m) / (1 - m), \quad n = Y / \delta_1$$

Здесь  $a_j$  — постоянные коэффициенты,  $r$  — постоянная,  $F_0$  — решение Фокнера — Скэн [5] для соответствующего показателя  $m$ ,  $F_j$  — возмущенные решения в области 1 за точкой  $x_*$ . Автомодельная переменная  $n$  во

внешней области до точки  $x_*$  отличается от соответствующей переменной в решении Фокнера — Скэн тем, что в нее входит сомножителем некоторая произвольная величина  $a$ , т. е.  $\delta_1$  может быть представлена в виде  $\delta_1 = \delta_0 = (ax/\gamma)^\gamma$ ,  $\gamma = 1/2(1-m)$ . Чтобы написанная форма решений (1.2) и (1.3) могла удовлетворить уравнению пограничного слоя (1.1) в рассматриваемом случае, для  $\delta_1$  и  $\delta_2$  необходимо выполнение следующих условий:

$$\delta_1' = a\delta_1^{-\alpha}(1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots) \quad (a > 0) \quad (1.4)$$

$$\delta_2' = b\delta_1^k\delta_2^p(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots) \quad (1.5)$$

Величины  $b$ ,  $k$ ,  $p$  — некоторые постоянные,  $b_j$  и  $c_j$  — поправочные коэффициенты, учитывающие возмущения, которые возникают вследствие взаимного влияния областей 1 и 2 за точкой  $x_*$  при  $\varepsilon > 0$ . С помощью выражений (1.4) и (1.5) составим производную от  $\varepsilon$  по  $x$

$$\varepsilon' = a\delta_1^{-1/\gamma} \varepsilon [\varepsilon^{p-1}(1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots)ba^{-1} - (1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots)] \quad (1.6)$$

$$p = - \left( k + \frac{1+m}{1-m} \right)$$

Выражение дает возможность получить целые показатели степеней при  $\varepsilon$  в (1.6) и записать

$$\frac{d\delta_2}{d\delta_1} = \frac{b}{a} \varepsilon^r \frac{1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots}{1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots}$$

Система величин  $a_j$ ,  $b_j$  и  $c_j$  не может быть определена однозначно, так как для этого не хватает условий, однако связать эти группы коэффициентов друг с другом можно. Учитывая, что при  $x \rightarrow \infty$   $\delta_2 \rightarrow \delta_1$ , т. е.  $d\delta_2/d\delta_1 \rightarrow 1$ , выберем коэффициенты  $b$ ,  $c_j$  и  $b_j$  наиболее простым способом, а именно  $b = a$ ,  $c_j = b_j$ . Величину  $p$  найдем после подстановки внутреннего разложения (1.3) в уравнение (1.1), при этом потребуем, чтобы в уравнении для определения  $G_0$  были сохранены вязкие и динамические члены. Этому требованию удовлетворяет  $p = -2$ . Теперь нетрудно получить

$$\delta_2 = [\delta_1^3 - \delta_1^3(x_*)]^{1/3}, \quad \delta_1 = \delta_1(x_*) (1 - \varepsilon^3)^{-1/3} \quad (1.7)$$

$$\varepsilon' = a\delta_1^{-1/\gamma} \varepsilon^{-2}(1 - \varepsilon^3)(1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots) \quad (1.8)$$

После подстановки внешнего разложения можно заметить, что  $F_j'$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, а так как  $F_0'(\infty) = 1$ , то

$$(1 + a_1\varepsilon + \dots)r\delta_1^s = c\varepsilon^m, \quad s = m/\gamma$$

Это условие позволяет связать  $a_j$  с  $b_j$ . Из уравнения (1.4) видно, что  $\delta_1$  во всей области можно представить в виде

$$\delta_1 = \delta_0(1 + d_1\varepsilon + d_2\varepsilon^2 + \dots) \quad (1.9)$$

Коэффициенты  $d_j$  можно выразить через  $b_j$  после подстановки этого выражения в уравнение (1.4). Выпишем несколько величин

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0, \quad d_4 = 1/4b_1, \quad d_5 = 1/5(b_2 - b_1^2)$$

Теперь из условия на бесконечности можно получить

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{2m}{1-m}d_4, \quad a_5 = -\frac{2m}{1-m}d_5, \quad r = c \left( \frac{2a}{1-m} \right)^{-s}$$

Выпишем уравнения во внешней и внутренней областях, получающиеся после подстановки разложений (1.2) и (1.3) в (1.1)

$$\begin{aligned} F_0'F_1' - F_0''F_1 &= 0 \\ F_0'F_2' - F_0''F_2 &= -1/2(F_1'^2 - F_1F_1'') \\ F_0'F_3' - F_0''F_3 &= -1/3\{2(F_1'F_2' - F_1''F_2) + (F_1'F_2' - F_1F_2'') + \\ &+ 2b_1(F_0'F_2' - F_0''F_2) + b_1(F_1'^2 - F_1F_1'')\} + \\ &+ 1/3(1-m)^{-1} + [(1-m)F_0''' + r2m - r2mF_0'^2 - r(1+m)F_0F_0''] \\ G_0''' &= ra(G_0'^2 - 2G_0G_0'') \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} G_1''' &= ra[3G_0'G_1' - 2G_0G_1'' - 3G_0''G_1 - 2m/(1-m) + b_1(G_0'^2 - 2G_0G_0'')] \\ G_2''' &= ra[4G_0'G_2' - 2G_0G_2'' - 4G_0''G_2 + 2G_1'^2 - 3G_1G_1'' + \\ &+ b_1(3G_0'G_1' - 2G_0G_1'' - 3G_0''G_1) + b_2(G_2'^2 - 2G_0G_0'')] \end{aligned} \quad (1.11)$$

В уравнении для  $F_3$  (1.10) выражение в квадратных скобках равно нулю, так как оно приводится к уравнению Фокнера — Скэн для  $F_0$ . Интегрируя уравнения (1.10), находим

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1F_0' \quad F_2 = (2!)^{-1}(k_1^2F_0'' + 2k_2F_0') \\ F_3 &= (3!)^{-1}(k_1^3F_0''' + 6k_1k_2F_0'' + 6k_3F_0') \\ F_4 &= (4!)^{-1}[k_1^4F_0^{IV} + 12k_1^2k_2F_0''' + 12(2k_1k_3 + k_2^2)F_0'' + \\ &+ 24k_4F_0' - 6b_1(F_0 - nF_0')] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Постоянные  $k_j$  могут быть определены из условий срачивания решений. Учитывая, что  $F_0(0) = F_0'(0) = 0$ , и используя правило срачивания решений, можно получить при  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} G_0 &\sim 1/2F_0''(0)N^2 + k_1F_0''(0)N \\ G_1 &\sim 1/6F_0'''(0)N^3 + 1/2k_1F_0''(0)N^2 + 1/2[k_1^2F_0'''(0) + 2k_2F_0''(0)]N \\ G_2 &\sim 0N^4 + 0N^3 + 1/2k_2F_0'''(0)N^2 + [k_1k_2F_0'''(0) + k_3F_0''(0)]N \end{aligned} \quad (1.13)$$

Из (1.11) видно, что решения во внутренней области на бесконечности могут быть представлены в виде полиномов

$$G_j = \sum_{s=0}^{j+2} p_{js}N^s \quad (1.14)$$

Подставляя эти полиномы в соответствующие уравнения, можно убедиться, что условия (1.13) выполняются, при этом  $p_{j0} = F_{j+2}(0)$ . Последнее равенство показывает, что требования правила срачивания решений полностью выполняются. Продолжая включать все большее количество членов, можно увидеть, что процесс срачивания не зависит от величин  $b_j$ .

Для случая, когда  $m > 1$ , вид разложений и  $\delta_2$  остаются прежними, производную же  $\delta_1'$  запишем так:

$$\delta_1' = -a\delta_1^{-\alpha}(1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots), \quad (a > 0) \quad (1.15)$$

Положим  $b = a$ , а  $c_j$  выберем следующим образом:

$$1 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \dots = (1 - 2\varepsilon^3)(1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots)$$

$$\delta_1 = \delta_1(x_*) (1 - \varepsilon^3)^{1/3}, \quad \delta_2 = \delta_1^{-1}(x_*) [\delta_1^3(x_*) - \delta_1^3]^{1/3} \quad (1.16)$$

$$\varepsilon' = a\delta_1^{1/\alpha}\varepsilon^{-2}(1 - \varepsilon^3)(1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots) \quad (1.17)$$

После подстановки внешнего разложения в основное уравнение получим систему уравнений вида (1.10), решениями которой являются выражения (1.12). Во внутренней области форма решений также сохранится.

В случае  $m = 1$  решения ищем в виде

$$\Psi = \Psi_1 = cx\delta_1[F_0(n) + \varepsilon F_1(n) + \dots], \quad (1.18)$$

$$\Psi = \Psi_2 = cx\delta_1\varepsilon^2[G_0(N) + \varepsilon G_1(N) + \dots] \quad (1.19)$$

Величина  $\delta_1$  до точки  $x_*$  постоянна, обозначим ее через  $\delta_*$ . Чтобы сохранить форму решений (1.12), положим  $\delta_1 = \delta_*$  во всей области, а

$$\varepsilon' = x^{-1}\varepsilon^{-2}(1 - \varepsilon^3)(1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \dots). \quad (1.20)$$

При этом невозмущенное решение  $F_0$  определяется из уравнения

$$F_0''' = c\delta_*^2(F_0'^2 - F_0F_0'' - 1) \quad (1.21)$$

которое может быть приведено к соответствующему уравнению Фокнера — Скэн.

Уравнения во внутренней области имеют вид

$$\begin{aligned} G_0''' &= c\delta_*^2(G_0'^2 - 2G_0G_0'') \\ G_1''' &= c\delta_*^2[3G_0'G_1' - 2G_0G_1'' - 3G_0''G_1 - 1 + b_1(G_0'^2 - 2G_0G_0'')] \\ G_2''' &= c\delta_*^2[4G_0'G_2' - 2G_0G_2'' - 4G_0''G_2 + 2G_1'^2 - 3G_1G_2'' + \\ &+ b_1(3G_0'G_1' - 2G_0G_1'' - 3G_0''G_1) + b_2(G_0'^2 - 2G_0G_0'')] \end{aligned} \quad (1.22)$$

Нетрудно заметить, что асимптотический вид функций  $G_j$  при  $N \rightarrow \infty$  совпадает с выражением (1.14). Это значит, что правило сращивания решений полностью выполняется при любых  $b_j$  и в этом случае.

**2. Пограничный слой с вдувом или отсосом в области за точкой  $x_*$ .** Из уравнений (1.8), (1.17) и (1.20) видно, что  $x$  можно представить в виде

$$x = x_* + \varepsilon^3(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots)$$

тогда функция  $\Psi_2$  при  $N = 0$  в области 2 может быть задана следующим образом:

$$\Psi_2 = (1 + a_i\varepsilon^4 + \dots)r\delta_1^2\varepsilon^3(A_1 + \varepsilon A_2 + \dots) \quad (m \neq 1) \quad (2.1)$$

$$\Psi_2 = c\delta_1 x \varepsilon^3(A_1 + \varepsilon A_2 + \dots) \quad (m = 1) \quad (2.2)$$

Эти выражения показывают, что граничные условия для первого члена внутреннего разложения при  $N = 0$  будут однородны. Решением уравнения во внутренней области будет

$$G_0 = \omega N^2, \quad \omega = 1/2 F_0''(0) \quad (2.3)$$

откуда видно, что  $k_1 = 0$ . Решение второго уравнения во внутренней области для произвольного  $A_1$  удобно представить в виде

$$\begin{aligned} G_1 &= G_{10} + G_{11} + B_1 G_{12} \\ G_{10} &= (3!)^{-1} F_0'''(0) N^3 \quad G_{11} = (3!)^{-1} \beta^3 A_1 N^3 + A_1 \\ \beta &= (ra\omega)^{1/3} \quad (m \neq 1), \quad \beta = (c\delta_*^2\omega)^{1/3} \quad (m = 1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $G_{10}$  удовлетворяет неоднородному уравнению с однородными граничными условиями при  $N = 0$ ,  $G_{11}$  удовлетворяет однородному уравнению и граничному условию  $G_{11}(0) = A_1$ , а  $G_{12}$  также удовлетворяет однород-

ному уравнению и следующим граничным условиям:

$$G_{12}(0) = G_{12}'(0) = 0, \quad G_{12}''(0) = 1$$

Здесь удобно ввести следующую замену:

$$G_{12} = \beta^{-2}g[\beta N]$$

Тогда

$$\begin{aligned} g''' + 2t^2g'' - 6tg' + 6g &= 0 & (t = \beta N) \\ g(0) = g'(0) &= 0, & g''(0) = 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

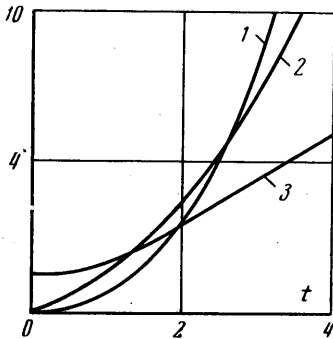
На фиг. 2 представлены функции  $g$ ,  $g'$  и  $g''$  ( $1-g$ ,  $2-g'$ ,  $3-g''$ ), полученные численным интегрированием уравнения (2.5). Величины  $B_1$  и  $k_2$  могут быть определены из граничных условий на бесконечности

$$B_1 = 5.073A_1\beta^2, \quad k_2 = 2.597\beta A_1 / F''_0(0)$$

Используя полученные зависимости для двухчленного разложения, определим

$$\begin{aligned} \tau_w &= \nu^{1/2}r\delta_1^* [F''_0(0) + \varepsilon 5.073\beta^2 A_1], & \kappa &= (3m-1)/(1-m) \quad (m \neq 1) \\ \tau_w &= \nu^{1/2}c^{3/2}\alpha [1.233 + \varepsilon 3.655c^{1/2}\delta_* A_1] & & (m = 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Теперь, зная решения уравнений во внешней и внутренней областях, можно показать, что интегральное уравнение импульсов не дает дополнительных условий для определения коэффициентов  $b_j$ . Выпишем уравнение импульсов в следующем виде:



Фиг. 2

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[ \delta_1 \int_0^\infty \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} \left( U - \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} \right) dn + \right. \\ & \left. + \delta_2 \int_0^1 \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y} \left( U - \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y} \right) dN \right] + \\ & + \frac{dU}{dx} \left[ \delta_1 \int_0^\infty \left( U - \frac{\partial \Psi_1}{\partial Y} \right) dn + \right. \\ & \left. + \delta_2 \int_0^1 \left( U - \frac{\partial \Psi_2}{\partial Y} \right) dN \right] + \\ & + U \frac{d\Psi_2(x, 0)}{dx} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial Y^2} \Big|_{Y=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя сюда решения и группируя члены с одинаковыми степенями при  $\varepsilon$ , а затем приравнявая их к нулю, получим систему условий. Выпишем первое выражение, являющееся коэффициентом при  $\varepsilon^0$

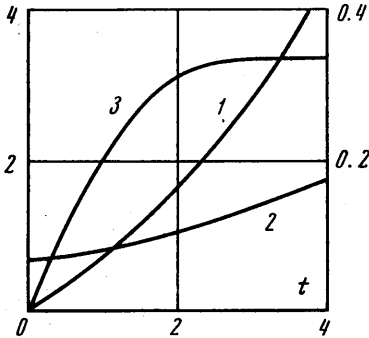
$$G_1(1) - 1/6 F''_0(0) - k_2 F''_0(0) = 0 \quad (2.8)$$

Для случая, когда  $A_1 = 0$ , это условие выполняется тождественно, так как  $G_1 = G_{10}$  и  $k_2 = 0$ . При  $A_1 \neq 0$  функция  $g$  для  $t \rightarrow \infty$  представима в виде

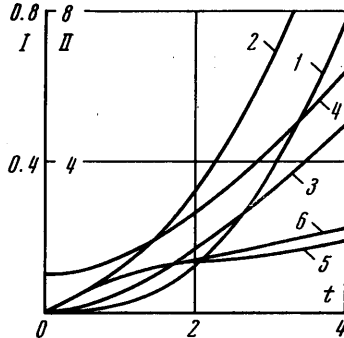
$$g = C_3 t^3 + C_2 t^2 + C_1 t + C_0$$

Подставляя известные величины в (2.8), получим уравнение относительно  $\beta$ , вид которого совпадает с последним выражением, а оно удовлетворяется только при  $\beta \rightarrow \infty$ , т. е. опять получили асимптотический вид функции  $g$ . Последующие выражения, получающиеся из интегрального условия (2.7) при  $\beta \rightarrow \infty$  вырождаются также в тождества.

**3. След за пластиной.** Впервые задача о ближнем следе за бесконечно тонкой конечной пластиной рассматривалась Гольдштейном [6], который использовал в качестве начального профиля решение Блазиуса [7]. О правомерности такого подхода можно судить по результатам работы [8], в ко-



Фиг. 3



Фиг. 4

торой авторы провели анализ влияния задней кромки на основное течение. В предложенном построении решения также используется профиль Блазиуса. Вид разложений в рассматриваемой задаче дан выражениями (1.2), (1.3), где  $r = c = U_\infty$ ,  $a_j = 0$ ,  $F_0$  — решение Блазиуса, а  $F_j$  даны в (1.12). Во внутренней области, сделав замену

$$G_j = \beta^{-1} g_j(\beta N), \quad \beta = (2ac)^{1/2}$$

будем иметь

$$g_0''' = 1/2(g_0''^2 - 2g_0 g_0''') \quad (3.1)$$

$$g_0(0) = g_0''(0) = 0, \quad g_0''(\infty) = 0.332,$$

$$g_1''' = 1/2[3g_0' g_1' - 2g_0 g_1'' - 3g_0' g_1 + b_1(g_0''^2 - 2g_0 g_0''')] \quad (3.2)$$

$$g_1(0) = g_1''(0) = 0, \quad g_1''(\infty) = 0$$

Решение  $g_1$  для произвольного  $b_1$  представим в виде

$$g_1 = g_{11} + B_1 g_{12} \quad (3.3)$$

где  $g_{11}$  определяется из неоднородного уравнения при  $b_1 = 1$  с однородными граничными условиями при  $t = 0$ , а  $g_{12}$  определяется из однородного уравнения для следующих граничных условий:

$$g_{12}(0) = g_{12}''(0) = 0, \quad g_{12}'(0) = 1$$

Определив численно решения  $g_0$  и  $g_1$ , найдем  $k_1$ ,  $k_2$  и  $B_1$

$$k_1 = \frac{0.374}{F_0''(0)}, \quad k_2 = -\frac{0.036}{F_0''(0)} b_1, \quad B_1 = -0.077 b_1$$

На фиг. 3 показаны кривые: 1 —  $g_0$ , 2 —  $g_0'$ , 3 —  $g_0''$ , масштаб для  $g_0''$  — слева. Функция  $g_{11}$  (I) и  $g_{12}$  (II) представлены на фиг. 4: 1 —  $g_{11}$ , 3 —  $g_{11}'$ , 5 —  $g_{11}''$ , 2 —  $g_{12}$ , 4 —  $g_{12}'$ , 6 —  $g_{12}''$ . Теперь получим безразмерную скорость

на оси  $x$  в следе с точностью до второго порядка

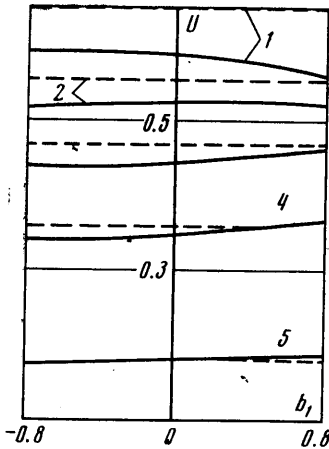
$$U = u / U_{\infty} = 0.675\varepsilon - 0.077b_1\varepsilon^2 \quad (3.4)$$

$$\varepsilon = \left[ \left( 1 + \frac{b_1}{4} \varepsilon^4 \right)^3 \left( \frac{x}{x_*} \right)^{3/2} - 1 \right]^{1/6} \left( 1 + \frac{b_1}{4} \varepsilon^4 \right)^{-1} \left( \frac{x}{x_*} \right)^{-1/2} \quad (3.5)$$

Интегральное уравнение импульсов и здесь не дает дополнительных условий для определения коэффициентов  $b_i$ . Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть условие, являющееся коэффициентом при  $\varepsilon^{-1}$

$$G_0(1) - 1/2 F_0''(0) - k_1 F_0''(0) - 1/2 k_1^2 F_0''(0) = 0 \quad (3.6)$$

После подстановки в (3.6)  $G_0 = \beta^{-1} g_0(\beta)$  можно заметить, что это равенство выполняется при  $\beta \rightarrow \infty$ , но в этом случае оно переходит в условие сращивания решения для  $g_0$ . Таким образом, коэффициенты  $b_i$  в предложенном построении решений произвольные. Смысл этого факта заключается в том, что  $\delta_1$  и  $\delta_2$  имеют чисто условный характер. На фиг. 5 показаны значения безразмерной скорости  $U$  в нескольких точках  $x$ , рассчитанные по формулам (3.4) и (3.5) при изменении величины  $b_1$  от  $-0.8$  до  $0.8$  (линии 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют следующим значениям безразмерной координаты  $x/x_*$ : 2, 1.5, 1.256, 1.108, 1.0135). Штриховыми линиями даны значения безразмерной скорости, взятые из [9]. Как видно из фиг. 5, полученное решение с учетом двух членов разложения дает удовлетворительное совпадение с указанными значениями для величин  $x/x_* < 1.5$  при различных  $b_1$  из взятого промежутка. Для вычисления параметров пограничного слоя на более далеких расстояниях от задней кромки необходимо производить учет следующих членов разложения.



Фиг. 5

более далеких расстояниях от задней кромки необходимо производить учет следующих членов разложения.

Поступило 5 VII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
2. Шманенков В. Н. К исследованию ламинарного пограничного слоя за точкой скачкообразного изменения граничных условий. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3, стр. 114—116.
3. Демьянов Ю. А. Об одном способе построения решения уравнений типа Прандтля в окрестности точек нарушения аналитичности граничных условий. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1969, т. 7, № 4.
4. Демьянов Ю. А., Покровский А. Н., Шманенков В. Н. О подобных решениях уравнений пограничного слоя в неравномерном внешнем потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2, стр. 78—83.
5. Falkner V. M., Skan S. W. Some approximate solutions of the boundary layer equations. Philos. Mag., 1931, vol. 12, pp. 865—896; ARC—Report 1314, 1930.
6. Goldstein S. Concerning some solutions of the sonndary layer equations in hydrodynamics. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1930, vol. 26, pt 1, pp. 1—30.
7. Blasius H. Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. J. Math. Phys., 1908, Bd 56, pp. 1—37.
8. Talke F. E., Berger S. A. The flat plate trailing edge problem. J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, p. 1 (Рус. перев.: Течение вблизи задней кромки плоской пластины. Механика. Сб. перев. иностр. статей, 1970, т. 5, стр. 123.)
9. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.