УДК 517.9:532

О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ

(*Харьков*)

Рассматривается плоская задача об определении собственных частот малых колебаний вязкой жидкости, вращающейся в частично заполненном цилиндрическом сосуде в условиях полной невесомости. Если угловая скорость вращения сосуда достаточно мала, то поверхностные силы, действующие на границе жидкость — газ, оказываются одного порядка с центробежными силами и существенно влияют на характер поведения частот колебаний. Методом «пограничного слоя» получены асимптотические формулы, выражающие зависимость частот колебаний жидкости от параметров задачи, в предположении, что отношение вязких сил к центробежным мало.

1. Постановка задачи. Пусть цилиндрический сосуд радиуса R_1 частично заполнен несжимаемой жидкостью и равномерно вращается с угловой скоростью Ω, направленной вдоль оси вращения сосуда. Предположим, что на жидкость не действуют никакие массовые силы, кроме центробежных, т. е. жидкость находится в условиях полной невесомости. Тогда она примет форму цилиндрического кольца, внешний радиус R_1 которого соответствует твердой стенке сосуда Σ, а внутренний радиус R — свободной поверхности жидкости Γ.

Рассмотрим задачу о малых колебаниях жидкости относительно равномерного вращения, причем возмущения и всю задачу в целом будем считать плоскими. Кроме того, будем считать, что жидкость вращается достаточно медленно, так что в процессе колебаний следует учитывать капиллярные силы на свободной поверхности Γ. Иными словами, предположение сводится к тому, что безразмерный параметр σ, характеризующий отношение капиллярных сил к центробежным, есть величина порядка единицы

$$\sigma = \alpha(\rho\Omega^2 R^3)^{-1} = O(1) \qquad (1.1)$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость — газ, ρ — плотность жидкости.

Запишем сначала уравнения и краевые условия в задаче о колебаниях идеальной жидкости. Если декартова система координат (x, y, z) вращается вместе с сосудом с угловой скоростью $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$, то линеаризованная задача имеет вид (см., например, [1])

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u} + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad (1.2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \quad u_n = \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \quad (\mathbf{r}\in\Sigma)$$

где через $\mathbf{u}(x, y, t)$ обозначено поле относительных скоростей жидкости, $p(x, y, t)$ — поле давлений, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к Σ. На свободной поверхности Γ должно выполняться динамическое условие (см. [2])

$$p - p_0 = -\alpha K \qquad (1.3)$$

(K — кривизна плоской кривой, образующей поверхность Γ), означающее, что разность давлений в жидкости и в газе (движением и плотностью которого пренебрегаем) равна капиллярному скачку.

Преобразуем задачу (1.2), (1.3) к более удобному виду. Прежде всего заметим, что второе и третье слагаемые слева в первом уравнении (1.2) — потенциальные векторы. Поэтому поле скоростей $\mathbf{u}(x, y, t)$ также потенциально, $\mathbf{u}=\nabla\Phi$, где $\Phi(x, y, t)$ — потенциал скорости. Тогда из условия неразрывности в (1.2) следует, что Φ — гармоническая функция. Запишем первый интеграл уравнения (1.2)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\Omega(x^2+y^2)+2\Omega\Psi(x, y, t)+\frac{1}{\rho}p=0 \tag{1.4}$$

на свободной движущейся поверхности Г, приняв во внимание условие (1.3). В (1.4) $\Psi(x, y, t)$ — функция тока, связанная с потенциалом скорости условиями Коши — Римана.

Далее проделаем следующую процедуру (см., например, [3, 4]). Линеаризуем динамическое условие (1.4), считая малым отклонение $r-R=\eta(\theta, t)$ (в полярной системе координат (r, θ)) свободной поверхности жидкости от равновесной цилиндрической поверхности. Продифференцируем полученное соотношение по времени и учтем, что на Г выполняется также кинематическое условие

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\qquad(r=R)$$

Перейдем затем к безразмерным переменным (будем обозначать их теми же буквами). В качестве характерного размера l_* выберем радиус R свободной равновесной поверхности Г, а для других переменных — такие величины:

$$t_*=\Omega^{-1},\qquad u_*=\Omega R,\qquad p_*=\rho_*=\rho\Omega^2R^2$$

Таким образом, придем к задаче о малых колебаниях идеальной жидкости, которая состоит в нахождении гармонической функции $\Phi(x, y, t)$, удовлетворяющей условию непротекания при $r=q=R_1/R>1$ и динамическому условию

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+2\frac{\partial\Psi}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\sigma\left[1+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0\qquad(r=1) \tag{1.5}$$

Параметр σ определен в (1.1).

Сформулируем теперь задачу о малых колебаниях вязкой жидкости. В уравнении движения (1.2) справа добавится слагаемое $\nu\Delta\mathbf{u}$, где ν — кинематическая вязкость жидкости, а вместо граничного условия из (1.2) нужно потребовать обращения в нуль всех компонент скорости жидкости на Σ. На свободной поверхности Г должны выполняться условия непрерывности (с учетом капиллярного скачка) нормальных и касательных напряжений [2]. Линеаризуя эти условия и переходя к безразмерным переменным, получим следующую задачу:

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{r})+2\mathbf{k}\times\mathbf{u}=-\nabla p+\varepsilon^2\Delta\mathbf{u}\qquad\nabla\cdot\mathbf{u}=0\qquad(1\leqslant r\leqslant q) \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}=0,\quad\frac{\partial}{\partial t}\left(p-2\varepsilon^2\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\sigma\left[1+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]u_r=0\quad(r=1) \tag{1.7}$$

$$\mathbf{u}=0\qquad(r=q),\qquad\varepsilon^2=\nu(\Omega R^2)^{-1} \tag{1.8}$$

Здесь ε^2 — параметр, характеризующий отношение вязких сил к центробежным, $\mathbf{k}$ — единичный орт вдоль направления угловой скорости $\mathbf{\Omega}$.

2. Свободные колебания идеальной жидкости. Рассмотрим сначала задачу о нормальных колебаниях идеальной жидкости, т. е. о решениях $\Phi(x, y, t)$, зависящих от времени по закону $\exp(-i\omega t)$, где ω — частота колебаний. Аналогичная задача без учета поверхностных сил изучена в [5]. Уравнение Лапласа в плоском кольце $1 \leqslant r \leqslant q$ допускает разделение переменных. Его частные решения, удовлетворяющие условию непротекания при $r = q$, таковы

$$\Phi_n(r, \theta) = (r^n + q^{2n}r^{-n}) \exp(in\theta) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.1}$$

(Здесь более удобна комплексная форма записи; комплексно сопряженные функции не дают новых вещественных решений.) Соответствующие функции тока равны

$$\Psi_n(r, \theta) = -i(r^n - q^{2n}r^{-n}) \exp(in\theta) \tag{2.2}$$

Подставляя функции (2.1) и (2.2), умноженные на $\exp(-i\omega t)$, в граничное условие (1.5), получим характеристическое уравнение

$$\omega^2 - \varkappa_n^2[2\omega + n + \sigma n(n^2 - 1)] = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.3}$$

где

$$\varkappa_n^2 = (1 - q^{-2n}) / (1 + q^{-2n})$$

Решения этого уравнения дают частоты колебаний идеальной жидкости

$$\omega_n^{\pm} = \varkappa_n^2 \pm \varkappa_n\sqrt{\varkappa_n^2 + n + \sigma n(n^2 - 1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

При $\sigma = 0$ (поверхностные силы не учитываются) из (2.4) следует результат Сунь Цао [5].

Сформулируем общие выводы, которые непосредственно следуют из (2.4).

1. Поверхностные силы не оказывают влияния на первую (главную) частоту колебаний при $n = 1$, так как этой частоте соответствует перемещение свободной поверхности жидкости в виде кругового цилиндра без изменения формы свободной поверхности; изменения поверхностной энергии при этом не происходит.

2. Остальные частоты колебаний существенно зависят от капиллярных сил, причем характер их асимптотического поведения при $n \to \infty$ принципиально меняется в случае $\sigma \neq 0$

$$\omega_n^{\pm} = 1 \pm \sqrt{n}\left[1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + O(n^{-3})\right] \qquad (\sigma = 0)$$

$$\omega_n^{\pm} = 1 \pm \sqrt{\sigma n(n^2-1)}\left[1 + \frac{1}{2\sigma n(n-1)} - \frac{1}{4\sigma^2 n^2(n-1)^2} + O(n^{-6})\right] \tag{2.5}$$
$$(\sigma > 0)$$

3. Каждой частоте колебаний ω_n соответствует возмущение свободной поверхности жидкости (бегущая волна), пропорциональное функции

$$\exp[i(n\theta - \omega_n t)] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

причем величина ω_n / n равна угловой скорости распространения волны. Знаку плюс в (2.4) соответствует волна, бегущая вперед (т. е. в сторону вращения сосуда с жидкостью), а знаку минус — обратная волна. При $\sigma = 0$ обратная волна имеет угловую скорость, меньшую единицы при всех n, и поэтому суммарное вращение частиц жидкости в абсолютном движении происходит вперед (угловая скорость сосуда в безразмерных переменных равна единице). Совсем иная картина получается при $\sigma > 0$. Из второй формулы (2.5) следует, что при больших n будет $\omega_n^- = O(n^{3/2})$; этим частотам соответствуют волны, бегущие назад в абсолютном движении.

4. Если угловая скорость Ω вращения сосуда мала, т. е. $\delta = \Omega / \Omega_0$, где Ω_0 — некоторая принятая за характерную угловая скорость, много меньше единицы, то из (2.4) следует асимптотическая формула:

$$\frac{\omega_n^\pm}{\Omega_0} = \pm \varkappa_n \sqrt{\sigma n(n^2-1)} \left[1 \pm \frac{\varkappa_n \delta}{\sqrt{\sigma n(n^2-1)}} + \frac{(\varkappa_n^2 + n)\delta^2}{2\sigma n(n^2-1)} + O(\delta^3) \right]$$

$$(n = 2, 3, \ldots)$$

Здесь $\omega_n^\pm$ — физическая (размерная) частота колебаний, а величина σ из (1.1) составлена по угловой скорости Ω_0. При $\delta \to 0$ получаем известную формулу для частот плоских колебаний невращающейся жидкости.

3. Нормальные колебания маловязкой жидкости. Будем теперь считать, что жидкость вязкая, однако параметр ε^2 из (1.8) мал. Например, для воды $\nu = 0.01$ *см*$^2\cdot$*сек*$^{-1}$, $\alpha = 72.5$ *г*$\cdot$*сек*$^{-2}$; если выбрать $\Omega = 0.01$ *сек*$^{-1}$, $R = 100$ *см*, то получим $\varepsilon = 0.01$. В то же время предположение (1.1) оправдывается, так как при этом $\sigma = 0.725 = O(1)$.

При решении задачи о колебаниях маловязкой жидкости используем метод пограничного слоя [6–8]. Решения задачи (1.6) — (1.8) будем считать зависящими от времени по закону $\exp(\lambda t)$, где λ — (безразмерная) комплексная частота.

Пространственную часть поля скорости в (1.6) представим в виде [6]

$$u = \nabla\Phi - \nabla^*\varphi, \qquad \nabla^*\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{3.1}$$

Тогда из уравнения неразрывности в (1.6) следует, что Φ — гармоническая функция. Первое уравнение (1.6) теперь можно записать в виде

$$\nabla[\lambda\Phi - {}^1/_2 r^2 + p + 2\varphi + 2\Psi] + \nabla^*[-\varepsilon^2\Delta\varphi + \lambda\varphi] = 0$$

где Ψ — функция тока (см. п. 1). Потребуем, чтобы в этом соотношении каждое из двух слагаемых обращалось в нуль. Это приводит к двум уравнениям для искомых функций $\Phi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$

$$\varepsilon^2\Delta\varphi - \lambda\varphi = 0, \qquad \lambda\Phi - {}^1/_2 r^2 + p + 2\varphi + 2\Psi = 0 \tag{3.2}$$

Аналогично п. 1 линеаризуем второе соотношение (3.2) в окрестности поверхности Γ, исключим из него и условия (1.7) давление и продифференцируем по времени. Получим граничное условие

$$\lambda^2\Phi - u_r + 2\lambda\varphi + 2\lambda\Psi + 2\varepsilon^2\lambda\frac{\partial u_\tau}{\partial r} + \sigma\left[1 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right] u_r = 0 \quad (r = 1) \tag{3.3}$$

Таким образом, задача о нормальных колебаниях вязкой жидкости сводится к нахождению решений уравнений (3.2), уравнения Лапласа для функции Φ и граничных условий (1.7), (1.8) и (3.3). Функции Φ и φ связаны соотношением (3.1), а Φ и Ψ — условиями Коши — Римана.

Первое уравнение (3.2) содержит малый параметр ε^2 при старших производных. Поэтому решения этого уравнения — типа пограничного слоя:

они будут практически отличны от нуля только в малой окрестности твердой стенки Σ при $r = q > 1$ и свободной поверхности Γ при $r = 1$. Построим сначала решение первого уравнения (3.2) в окрестности Σ. Для этого осуществляем замену переменных $r = q - \varepsilon\xi$, $\xi \geqslant 0$. Разлагая затем решение $\varphi(\xi, \theta, \varepsilon)$ в ряд по ε

$$\varphi(\xi, \theta, \varepsilon) = \varphi_0(\xi, \theta) + \varepsilon\varphi_1(\xi, \theta) + \varepsilon^2\varphi_2(\xi, \theta) + O(\varepsilon^3) \tag{3.4}$$

и подставляя в уравнение, получим последовательность уравнений для функций φ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Решения этих уравнений, затухающие в глубь жидкости, пропорциональны $\exp[-\sqrt{\lambda}\xi]$, если $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} > 0$. Выпишем функцию $\varphi(\xi, \theta, \varepsilon)$ из (3.4)

$$\varphi(\xi, \theta, \varepsilon) = \left\{a(\theta, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2q} a(\theta, \varepsilon)\xi + \frac{\varepsilon^2}{8q^2}\left[3a(\theta, \varepsilon)\xi^2 + \right.\right. \tag{3.5}$$

$$\left.\left. + \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}\left(a(\theta, \varepsilon) + 4\frac{\partial^2 a}{\partial\theta^2}\right)\right]\right\} \exp(-\sqrt{\lambda}\xi) + O(\varepsilon^3), \qquad \xi = (q - r)/\varepsilon$$

Здесь $a(\theta, \varepsilon)$ — произвольная пока функция, разлагающаяся подобно (3.4) в ряд по ε.

Как и в п. 1, частные решения уравнения Лапласа для функции Φ можно взять в виде

$$\Phi_n(r, \theta, \varepsilon) = (C_{1n}r^n + C_{2n}r^{-n}) \exp(in\theta) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

Однако постоянные C_{1n} и C_{2n} теперь следует считать зависящими от ε. Из граничного условия (1.8) и соотношения (3.1) следует, что функции $a(\theta, \varepsilon)$ из (3.5) пропорциональны $\exp(in\theta)$, т. е.

$$a = a_n(\theta, \varepsilon) = A_n(\varepsilon)\exp(in\theta) = [A_{n0} + \varepsilon A_{n1} + \varepsilon^2 A_{n2} + O(\varepsilon^3)]\exp(in\theta)$$

где коэффициенты A_{nk}, $k = 0, 1, 2, \ldots$ еще подлежат определению. Подставляя функции $\varphi_n(\xi, \theta, \varepsilon)$ с выбранными $a_n(\theta, \varepsilon)$ и функции $\Phi_n(r, \theta, \varepsilon)$ в граничное условие (1.8), получим соотношения

$$C_{2n}(\varepsilon) = C_{1n}q^{2n}\left[1 - \frac{2}{q\sqrt{\lambda}}\varepsilon + \frac{n(2n-1)}{q^2\lambda}\varepsilon^2\right] + O(\varepsilon^3) \tag{3.7}$$

$$A_n(\varepsilon) = C_{1n}\left[\frac{2inq^{n-1}}{\sqrt{\lambda}}\varepsilon - \frac{in(2n-1)q^{2n-2}}{\lambda}\varepsilon^2\right] + O(\varepsilon^3)$$

Здесь коэффициент C_{1n} произволен и имеет порядок $O(1)$. Аналогичную процедуру (построение решения типа пограничного слоя) можно проделать и в окрестности свободной поверхности Γ при $r = 1$. После замены $r = 1 + \varepsilon\eta$ решения уравнения пограничного слоя и использования касательного граничного условия (1.7) получим

$$\varphi_n(\eta, \theta, \varepsilon) = B_n(\varepsilon)\exp(in\theta)\left\{1 - \frac{1}{2}\eta\varepsilon + \left[\frac{3}{8}\eta^2 + \frac{(1-4n^2)}{8\sqrt{\lambda}}\eta\right]\varepsilon^2 + \right.$$

$$\left. + O(\varepsilon^3)\right\}\exp[-\sqrt{\lambda}\eta], \qquad \eta = (r-1)/\varepsilon \tag{3.8}$$

$$B_n(\varepsilon) = \frac{2in\varepsilon^2}{\lambda}C_{1n}[(n-1) - q^{2n}(n+1)] + O(\varepsilon^3) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Функция тока $\Psi_n(r, \theta, \varepsilon)$ равна

$$\Psi_n(r, \theta, \varepsilon) = -i[C_{1n}r^n - C_{2n}(\varepsilon)r^{-n}] \exp(in\theta) + O(\varepsilon^3)$$

где $C_{2n}(\varepsilon)$ определен в (3.7).

Таким образом, функции $\Phi_n(r, \theta, \varepsilon)$, $\varphi_n(r, \theta, \varepsilon)$ и $\Psi_n(r, \theta, \varepsilon)$, а потому и поле скоростей в задаче о колебаниях маловязкой жидкости найдены с точностью до произвольного множителя $C_{1n} \neq 0$. Подставляя их в динамическое условие (3.3), получим приближенное характеристическое уравнение для определения частот колебаний

$$\begin{gathered}\{\lambda^2 - n - 2i\lambda - \sigma n(n^2-1) + q^{2n}[\lambda^2 + n + 2i\lambda + \sigma n(n^2-1)]\} - \\ - \frac{2n\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} q^{2n-1}[\lambda^2 + n + 2i\lambda + \sigma n(n^2-1)] + \varepsilon^2\{2\lambda[n(n-1) + q^{2n}n(n+1)] + \\ + \frac{n(2n-1)}{\lambda} q^{2n-2}[\lambda^2 + n + 2i\lambda + \sigma n(n^2-1)] + \frac{2in}{\lambda}[-in + 2\lambda - \\ - i\sigma n(n^2-1)][(n-1) - q^{2n}(n+1)]\} = O(\varepsilon^3) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (3.9)\end{gathered}$$

Решение $\lambda_n(\varepsilon)$ этого уравнения будем искать в виде ряда по ε

$$\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_{0n} + \varepsilon\lambda_{1n} + \varepsilon^2\lambda_{2n} + O(\varepsilon^3)$$

Нулевое приближение λ_{0n}, как видно из (3.9), является решением уравнения

$$\lambda^2(1 + q^{2n}) + 2i\lambda(q^{2n} - 1) + n(q^{2n} - 1) + \sigma n(n^2-1)(q^{2n} - 1) = 0$$

и после замены $\lambda = -i\omega$ переходит в уравнение (2.3) для определения частот колебаний идеальной жидкости. Таким образом, $\lambda_{0n}^{\pm} = -i\omega_n^{\pm}$, где $\omega_n^{\pm}$ определены в (2.4). При нахождении λ_{1n} из уравнения для первого приближения

$$2\lambda_{1n}[\lambda_{0n}(q^{2n} + 1) + i(q^{2n} - 1)] - \frac{2nq^{2n-1}}{\sqrt{\lambda_{0n}}}[\lambda_{0n}^2 + 2i\lambda_{0n} + n + \sigma n(n^2-1)] = 0 \qquad (3.10)$$

следует учесть, что

$$(\lambda_{0n}^{\pm})^{-1/2} = \frac{(1 \pm i)}{\sqrt{2|\omega_n^{\pm}|}}$$

так как еще в (3.5) условились считать $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda} > 0$. Поэтому из (3.10) находим

$$\lambda_{1n}^{\pm} = (-1 \pm i)\mu_n|\omega_n^{\pm}|^{3/2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\mu_n = \frac{nq^{2n-1}(1 - \varkappa_n^2)}{(q^{2n} + 1)\sqrt{2\varkappa_n^3}\sqrt{\varkappa_n^2 + n + \sigma n(n^2-1)}} > 0, \qquad \varkappa_n^2 = \frac{1 - q^{-2n}}{1 + q^{-2n}} \qquad (3.11)$$

Приведем окончательный результат для второго приближения

$$\lambda_{2n}^{\pm} = [\varkappa_n\sqrt{\varkappa_n^2 + n + \sigma n(n^2-1)}]^{-1}\Big\{-|\omega_n^{\pm}|[\mu_n^2(\omega_n^{\pm})^2 + 2n^2 +$$

$$+n(\varkappa_n^2+\varkappa_n^{-2})]-\sqrt{2}nq^{2n-1}(q^{2n}+1)^{-1}\mu_n^2|\omega_n^\pm|^{3/2}(|\omega_n^\pm|\mp 1)(1\pm i)+$$
$$\left.+\frac{n(2n-1)q^{2n-2}(1-\varkappa_n^2)}{2\varkappa_n^2(q^{2n}+1)}\right\} \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (3.12)$$

Таким образом, с точностью до членов $O(\varepsilon^3)$ собственные значения λ в задаче о нормальных колебаниях вязкой жидкости равны

$$\lambda_n^\pm=-i\omega_n^\pm+\mu_n|\omega_n^\pm|^{3/2}(-1\pm i)\varepsilon+\lambda_{2n}^\pm\varepsilon^2 \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (3.13)$$

где величины $\omega_n^\pm$ определены в (2.4), μ_n — в (3.11), а $\lambda_{2n}^\pm$ — в (3.12).

Сформулируем выводы, которые следуют из формулы (3.13).

1. Наличие вязких сил приводит к уменьшению частот колебаний маловязкой жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде по сравнению с идеальной. При этом уменьшение частоты, как следует из (3.11), равно декременту затухания и пропорционально квадратному корню из вязкости. Этот факт для колебаний «тяжелой» маловязкой жидкости в произвольном сосуде установлен в [1].

2. Учет капиллярных сил приводит к изменению декремента затухания колебаний жидкости, а для достаточно коротких волн ($n\to\infty$) — к более быстрому затуханию.

Поступило 17 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, М., ВЦ АН СССР, 1968, вып. 7.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.— Л., Гостехиздат, 1953.
3. Копачевский Н. Д. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости. Сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости», М., ВЦ АН СССР, 1968, стр. 98—134.
4. Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. Гидродинамика в слабых силовых полях. О малых колебаниях вязкой жидкости в потенциальном поле массовых сил. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6, стр. 1054—1063.
5. Сунь Цао. О волнах на поверхности жидкости под действием центробежной силы. ПМТФ, 1960, № 3.
6. Моисеев Н. Н. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье — Стокса в случае, когда вязкость мала. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3, стр. 548—550.
7. Шмидт А. Г. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности шарового слоя вязкой гравитирующей жидкости. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 1, стр. 183—189.
8. Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. О свободных колебаниях жидкого самогравитирующего шара с учетом вязких и капиллярных сил. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 6, стр. 1291—1305.