

5. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1945, № 9.
6. Севостьянов Г. Д., Фалькович С. В. Симметричное обтекание клина плоской звуковой струей, вытекающей из канала. В сб. «Трансзвуковые течения газа», вып. 2. Саратов, Изд-во Саратовск. ун-та, 1968.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
8. Ehlers F. E. On some solutions on the hodograph equation which yield transonic flows through a Laval nozzle. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 2.
9. Скрипкин В. А. Об околозвуковом истечении плоской газовой струи из насадка с параллельными стенками. ПИММ, 1955, т. 19, вып. 1.
10. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959.

УДК 536.248+535.231

РАСЧЕТ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Л. А. ДОМБРОВСКИЙ

(Москва)

В случае однородного слоя получено аналитическое решение, дающее правильные предельные значения радиационного теплового потока.

Дан пример расчета излучения для потока однородных сферических частиц, ограниченного стенками. При этом характеристики взаимодействия излучения с частицами рассчитывались по теории Ми [1].

Имеется много различных методов решения уравнения переноса излучения как приближенных, так и точных (см., например, [2, 3]). Существующие численные методы позволяют рассчитать радиационный теплообмен в плоскопараллельном слое с любой заданной точностью. Эти методы требуют больших затрат машинного времени и не позволяют получить решение в аналитическом виде. Поэтому имеется необходимость создания простых приближенных способов расчета, дающих достаточно точные результаты для практических целей.

Эффективным методом решения уравнения переноса является получивший широкое распространение метод сферических гармоник [4]. Для высокой точности метода необходимо использовать приближения высоких порядков, что связано с серьезными вычислительными трудностями. В работе [5] был предложен способ расчета, эквивалентный первому приближению метода сферических гармоник. Однако этот способ дает завышенное значение радиационного теплового потока на границе области, так как не учитывается разрывность решения на границе при $\mu = 0$.

В настоящей работе предложен метод расчета, основанный на идее двойных сферических гармоник [6], лучше соответствующий физической картине процесса и обладающий большей точностью, чем обыкновенный метод сферических гармоник.

Уравнение переноса излучения решается в симметричном плоскопараллельном слое поглощающей и рассеивающей среды. Этот метод в отличие от метода работы [5] позволяет учесть старшие моменты индикатрисы рассеяния, что может оказаться существенным для сред, содержащих частицы, большие по сравнению с длиной волны излучения [7, 8].

1. Рассматривается симметричный слой рассеивающей и поглощающей среды толщиной $2z_0$, ограниченный одинаковыми плоскими и параллельными стенками.

Уравнение переноса излучения для плоской геометрии имеет следующий вид:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d\psi' \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu') G(\mu_0) d\mu' + \Sigma_a B_\lambda(T) \quad (1.1)$$

$$\mu = \cos \theta, \quad \Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s, \quad \mu_0 = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\psi - \psi')$$

Здесь $\varphi(z, \mu)$ — спектральная интенсивность излучения, Σ_a и Σ_s — соответственно спектральные коэффициенты поглощения и рассеяния, отнесенные к единице объема, $G(\mu_0)$ — индикатриса рассеяния, $B_\lambda(T)$ — функция Планка, θ — угол рассеяния.

Граничные условия при изотропно излучающей стенке с температурой T_w и спектральной степенью черноты ϵ_w

$$z = 0, \quad \varphi(0, -\mu) = \varphi(0, \mu) \quad (1.2)$$

$$z = z_0, \quad \Phi(z_0, -\mu) = (1 - \epsilon_w) \int_0^1 \Phi(z_0, \mu) d\mu + 2\pi\epsilon_w B_\lambda(T_w) \quad (1.3)$$

$$\Phi(z_0, -\mu) = (1 - \epsilon_w) \Phi(z_0, \mu) + 2\pi\epsilon_w B_\lambda(T_w)$$

Здесь (1.3.1) и (1.3.2) соответствуют изотропному и зеркальному отражению. Расчет радиационного теплообмена состоит в определении величины теплового потока в стенку

$$Q = \int_0^\infty d\lambda \int_{-1}^1 \Phi(z_0, \mu) \mu d\mu$$

2. Функция $\Phi(z_0, \mu)$ разрывна при $\mu = 0$. Поэтому $\Phi(z, \mu)$ целесообразно искать в виде

$$\Phi(z, \mu) = \begin{cases} \Phi^-(z, \mu), & -1 \leq \mu < 0 \\ \Phi^+(z, \mu), & 0 < \mu \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Вспользуемся следующими разложениями по полиномам Лежандра:

$$\Phi^\pm(z, \mu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Phi_n^\pm(z) P_n(2\mu \mp 1) \quad (2.2)$$

$$G(\mu_0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_k P_k(\mu_0)$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в уравнение переноса (1.1) и используя теорему сложения полиномов Лежандра, получаем

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(2\mu \mp 1) \left(\mu \frac{d\Phi_n^\pm}{dz} + \Sigma \Phi_n^\pm \right) = {}^{1/2}\Sigma_s \left[(\Phi_n^- + \Phi_n^+) \delta_{0n} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_k P_k(\mu) (\Phi_n^- I_{nk}^- + \Phi_n^+ I_{nk}^+) \right] + \Sigma_a B_\lambda(T) \quad (2.3)$$

$$I_{nk}^- = \int_{-1}^0 P_n(2\mu+1) P_k(\mu) d\mu, \quad I_{nk}^+ = \int_0^1 P_n(2\mu-1) P_k(\mu) d\mu$$

где δ_{0n} — символ Кронеккера.

Домножая (2.3) на $P_n(2\mu \mp 1)$ и интегрируя по μ , после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений:

$$(n+1)g_{n+1} + ng_{n-1} - (2n+1)h_n' + 2\Sigma(2n+1)g_n = 2\Sigma_s \delta_{0n} g_n + S_n^+ + 8\pi\delta_{0n} \Sigma_a B_\lambda(T) \quad (2.4)$$

$$(n+1)h_{n+1}' + nh_{n-1}' - (2n+1)g_n' + 2\Sigma(2n+1)h_n = S_n^- \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

где

$$g_n = \Phi_n^- + \Phi_n^+, \quad h_n = \Phi_n^- - \Phi_n^+$$

$$S_n^\pm = {}^{1/2}\Sigma_s (2n+1) \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1) G_k (I_{nk}^- \pm I_{nk}^+) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) [g_m (I_{mk}^- + I_{mk}^+) + h_m (I_{mk}^- - I_{mk}^+)]$$

Если в системе (2.4) оставить только уравнения с $n \leq j$ опустив член с g_{j+1}' , h_{j+1}' и суммировать по m лишь до j , то получается система $2(j+1)$ уравнений относительно $2(j+1)$ неизвестных функций.

Из (1.2) и (1.3) получаются граничные условия для функций g_n и h_n

$$\begin{aligned} z = 0, \quad h_{2k} = 0, \quad g_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) \\ z = z_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_w g_0 + (2 - \varepsilon_w) h_0 = 4\pi \varepsilon_w B_\lambda(T_w) \\ g_i + h_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, j) \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_w g_{2k} + (2 - \varepsilon_w) h_{2k} = 4\pi \varepsilon_w B_\lambda(T_w) \\ (2 - \varepsilon_w) g_{2k+1} + \varepsilon_w h_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) \end{cases} \quad (2.7)$$

(2.6) и (2.7) соответствуют изотропному и зеркальному отражению.

Замену уравнения переноса (1.1) с граничными условиями (1.2) и (1.3) системой $2(j+1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями (2.5)–(2.7) назовем DP_j -приближением.

Спектральный поток излучения в DP_j -приближении

$$q_\lambda(z) = \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu) \mu d\mu = \frac{1}{2} [g_1(z) - h_0(z)] \quad (2.8)$$

3. Из общих уравнений (2.4) можно получить систему уравнений DP_1 -приближения, которая после преобразований имеет вид

$$\frac{d}{dz} \begin{vmatrix} g_0 \\ h_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3(\Sigma + {}^1/2\bar{\mu}\Sigma_s) - {}^9/2\Sigma_s\sigma_1 & 3(\Sigma - {}^1/2\bar{\mu}\Sigma_s) - {}^3/2\Sigma_s\sigma_1 \\ 3(\Sigma - \Sigma_s\sigma_1) & \Sigma - \Sigma_s\sigma_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_1 \\ h_0 \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dz} \begin{vmatrix} g_1 \\ h_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma_a & 3(\Sigma - 6\Sigma_s\sigma_2) \\ 3\Sigma_a & 3(\Sigma - 6\Sigma_s\sigma_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g_0 \\ h_1 \end{vmatrix} - 4\pi\Sigma_a B_\lambda(T) \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\sigma_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{4k-1}{k^2} G_{2k-1} \left[\prod_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \left(1 - \frac{1}{2i} \right) \right]^2$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_{2k}}{4k+1} \left[1 + \frac{4k^2-1}{4k(k+1)} (-1)^{k+1} \right]^2 \left[\prod_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} \left(1 - \frac{1}{2i} \right) \right]^2$$

Здесь $\bar{\mu} = G_1$ — средний косинус угла рассеяния.

Граничные условия (2.5)–(2.7) в частном случае DP_1 -приближения

$$z = 0, \quad \begin{vmatrix} g_1 \\ h_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$z = z_0, \quad \varepsilon_w \begin{vmatrix} g_0 \\ h_1 \end{vmatrix} + A \begin{vmatrix} g_1 \\ h_0 \end{vmatrix} = 4\pi \varepsilon_w B_\lambda(T_w) \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 - \varepsilon_w \\ \varepsilon_w & 0 \end{vmatrix}, \quad A = (2 - \varepsilon_w) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

где (3.3.1) и (3.3.2) соответствуют изотропному и зеркальному отражениям.

Система уравнений (3.1) с граничными условиями (3.2) и (3.3) решается численно методом матричной факторизации.

При постоянных Σ_a , Σ_s , $G(\mu_0)$ и T систему уравнений DP_1 -приближения можно решить аналитически. В результате для спектрального потока излучения получается следующее выражение:

$$q_\lambda(z) = \frac{4\pi \varepsilon_w [B_\lambda(T) - B_\lambda(T_w)]}{\xi(\lambda_1)\eta(\lambda_2) - \xi(\lambda_2)\eta(\lambda_1)} \left[\eta(\lambda_2) \frac{\text{sh}(\lambda_1 \Sigma z)}{\text{ch}(\lambda_1 \Sigma z_0)} - \eta(\lambda_1) \frac{\text{sh}(\lambda_2 \Sigma z)}{\text{ch}(\lambda_2 \Sigma z_0)} \right] \quad (3.4)$$

$$\xi(\lambda) = \frac{2 - \varepsilon_w}{1 - \beta\sigma_1} \left[\frac{\lambda^2}{6\alpha} + 1 + \frac{\beta}{2} (\bar{\mu} - 3\sigma_1) \right] \text{th}(\lambda\Sigma z_0) + \varepsilon_w \frac{\lambda}{\alpha}$$

$$\eta(\lambda) = (2 - \Delta) \left\{ 3 \left[1 - \frac{\beta}{2} (\bar{\mu} + \sigma_1) \right] - \frac{\lambda^2}{2\alpha} \right\} \text{th}(\lambda\Sigma z_0) +$$

$$+ \frac{\lambda\Delta}{1 - 6\beta\sigma_2} \left[2 - \frac{\beta}{2} (\bar{\mu} + 3\sigma_1) - \frac{\lambda^2}{6\alpha} \right] \quad (3.5)$$

$$\lambda_{1,2} = (6[p + \alpha - \frac{1}{4}\bar{\mu}\alpha\beta \mp \sqrt{(p + \alpha - \frac{1}{4}\bar{\mu}\alpha\beta)^2 - p\alpha(1 - \bar{\mu}\beta)}])^{1/2} \quad (3.6)$$

$$\alpha = \Sigma_a / \Sigma, \quad \beta = 1 - \alpha, \quad p = (1 - 6\beta\sigma_2)(1 - \beta\sigma_1)$$

где $\Delta = 1$ — изотропное отражение, $\Delta = \varepsilon_w$ — зеркальное отражение, ε_λ — спектральная степень черноты.

Для чисто поглощающей оптически толстой среды ($\alpha = 1, \Sigma z_0 \rightarrow \infty$) из соотношений (3.4)–(3.6) получается $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_w$, тогда как решение, предложенное в работе [3], приводит к неверной формуле

$$\varepsilon_\lambda = 4\varepsilon_w [4 - (2 - \sqrt{3})\varepsilon_w]^{-1}$$

При $\alpha \rightarrow 0, \Sigma z_0 \rightarrow \infty$ DP_1 -приближение дает

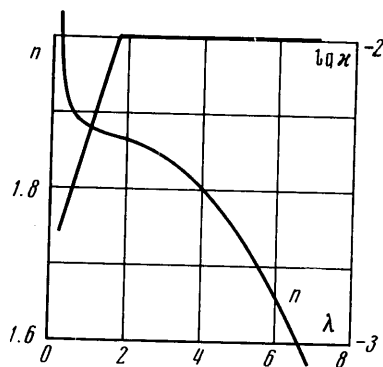
$$\varepsilon_\lambda = 4(\alpha/3)^{1/2} (1 - \bar{\mu})^{-1/2} \varepsilon_w$$

4. Для примера рассчитаем излучение однородного потока сферических частиц, ограниченного параллельными плоскими стенками.

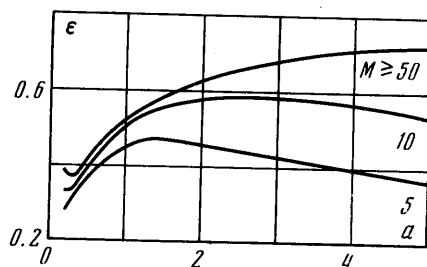
Частицы одинаковые, их температура $T = 3000^\circ \text{K}$ и плотность ρ . Массовая концентрация частиц $M = \text{const}$ во всем объеме. Нетрудно показать, что если скорости частиц одинаковы, то тепловой поток в стенку при постоянном расходе не зависит от профиля концентрации.

Температура стенок $T_w = 2000^\circ \text{K}$, степень черноты $\varepsilon_w = 0.8$. Стенки излучают и отражают изотропно.

Коэффициенты Σ_a, Σ_s и индикатриса $G(\mu_0)$, входящие в уравнение переноса (1.1), определялись по теории Ми [1]. Для расчетов по теории Ми необходимо задать пока-



Фиг. 1



Фиг. 2

затель преломления n и показатель поглощения k материала частиц. Функции $n(\lambda)$ и $k(\lambda)$, принятые для расчетов, изображены на фиг. 1 (λ в микрометрах).

Расчеты проводились в DP_1 -приближении с учетом только первого момента индикатрисы рассеяния.

На фиг. 2 изображены зависимости интегральной степени черноты $\varepsilon = Q\sigma^{-1} \times (T^4 - T_w^4)^{-1}$ от радиуса частиц a для различных постоянных M при $\rho z_0 = 2500 \text{ кг/м}^2$. Величины a даны в микрометрах, а M — в г/м^3 .

При большой концентрации облако крупных частиц близко к абсолютно черному вследствие сильной вытянутости вперед индикатрисы рассеяния. Для очень малых частиц индикатриса рассеяния симметрична, но рассеяние мало, что также приводит к высокой степени черноты. Существует радиус частиц, при котором радиационный тепловой поток в стенку минимален. При малой концентрации частиц определяющим является изменение количества частиц, что приводит к уменьшению оптической толщины слоя для крупных частиц.

Изложенный метод может быть использован для параметрического анализа излучения плоскопараллельного облака частиц, а также для исследования эффективности слоя частиц в качестве завесы, защищающей стенку от радиационного нагрева.

Поступило 4 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
3. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
4. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Тр. Матем. ин-та АН СССР. М., Изд-во АН СССР, 1961, № 59.
5. Поляков В. И., Румынский А. Н. Лучистый теплообмен в плоскопараллельном слое излучающего, поглощающего и рассеивающего газа при произвольной индикатрисе рассеяния. Изв. АН СССР, МЖТ, 1968, № 3.
6. Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.
7. Clark G. C., Chu C. M., Churchill S. W. Angular distribution coefficients for radiation scattered by a spherical particle. J. Opt. Soc. Amer., 1957, vol. 47, No. 1.
8. Ивэнс, Чу, Черчилль. Влияние анизотропного рассеяния на перенос излучения. Теплопередача, № 3, М., «Мир», 1965.

УДК 531/534:061.3

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. М. В. ЛОМОНОСОВА

СЕМИНАРЫ

Семинар по численным методам решения задач аэродинамики под руководством Г. И. Петрова, Г. Ф. Теленина, Л. А. Чудова, Г. С. Рослякова

13 V 1971. Б. М. Берковский (Москва). Численное исследование стационарной конвекции при высоких числах Грасгофа.

Рассмотрены конечно-разностные схемы, позволяющие получить решение стационарных уравнений естественной конвекции в области высоких чисел Грасгофа ($Gr \cong 10^{40}$). Детально проанализированы четыре явные однородные схемы, удовлетворяющие принципу максимума при любом шаге h . Две схемы — первого порядка, одна из них дивергентная. Конвективные члены аппроксимированы односторонними направленными разностями, диффузионные — центральными. Аналогично построены две другие схемы, но они второго порядка точности. Сравниваются различные способы организации счета.

Изложены результаты исследования интенсивности и структуры конвекций, локального и общего теплообмена в прямоугольных горизонтальных полостях ($0,1 \leq H/L \leq 10$) с неподвижными непроницаемыми стенками, полученные с помощью указанных методов. Использовались два типа тепловых граничных условий: нагрев сбоку и синусоидальный нагрев сверху.

Проведено сравнение результатов счета при различных величинах сеточных параметров ($0,025 \leq h \leq 0,05$), степени дивергентности и порядка аппроксимации схемы.

27 V 1971. А. Н. Ширшов, Г. И. Мигунова (Москва). Течение тяжелой вязкой жидкости в канале с внезапным сужением.

Численно исследуются случаи напорного и безнапорного течения вязкой жидкости в канале с уступом. Вязкость жидкости учтена только вблизи уступа. В подводящем и отводящем каналах течение принимается потенциальным. Оба вида течений сопрягались между собой вблизи уступа, что достигалось плавным изменением граничных условий. В связи с выбранной математической моделью выполнены численные эксперименты по исследованию влияния граничных условий на структуру течения. Установлено, что для образования водоворотной области перед ступенькой достаточно выполнения условий прилипания только вблизи стенки. При исследовании безнапорного течения найдена форма свободной поверхности. Расчеты выполнены при отношении высоты уступа к поперечному размеру отводящего канала, равном 0,2, и при $Re = 100$.