

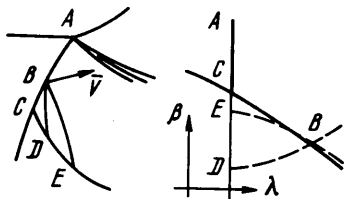
К ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ РАВНОМЕРНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУЕЙ

Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Рассматривается равномерная струя, обтекающая профиль с отошедшей ударной волной. Анализ проводится при малых сверхзвуковых скоростях набегающего потока, когда допустимо пренебрегать изменениями энтропии на ударной волне.

При исследовании обтекания бесконечного клина [1] в предположении непрерывности течения за ударной волной было установлено, что звуковая линия выходит из точки пересечения ударной волны с границей струи. Это доказательство не изменится и в случае обтекания профиля, если угол наклона его касательной к оси симметрии всюду превышает угол отклонения вектора скорости в звуковой точке ударной волны (для вогнутого профиля это условие излишне).



Фиг. 1

Аналогичный результат имеет место и при невыполнении этого условия, если ширина струи достаточно мала по отношению к характерному размеру профиля, так что точка пересечения ударной волны с границей струи принадлежит минимальной области влияния смешанного течения. Действительно, в противном случае зву-

ковая линия должна выходить из некоторой точки ударной волны (на свободной границе скорость сверхзвуковая) и, следовательно, существует отрезок ударной волны, на котором скорость за волной сверхзвуковая. Так как этот отрезок принадлежит минимальной области влияния, характеристики, проведенные из него, могут оканчиваться только на звуковой линии.

Это невозможно, так как образ звуковой линии в плоскости годографа λ, β (λ — коэффициент скорости, β — угол наклона вектора скорости) в соответствии с «законом монотонности» [2] расположен на линии $\lambda = 1$ не ниже звуковой точки ударной волны, сверхзвуковой отрезок которой, наоборот, лежит ниже этой точки (т. е. на нем $\beta < \beta_*$). На фиг. 1 показано положение характеристики, выпущенных из ударной волны, относительно образа звуковой линии.

При установлении формы минимальной области влияния оказывается полезным использовать свойство, что на звуковой линии в потенциальном течении не существует точек K_- . (Точками K_+ (K_-) называем точки ортогональности звуковой линии вектору скорости, расположенные внутри области течения, в которых звуковая линия обращена выпуклостью в сторону области сверхзвуковых (соответственно дозвуковых) скоростей.)

Для доказательства выпустим характеристики из звуковой линии в достаточно малой окрестности точки K_- (если она существует). Характеристика, проведенная вверх по потоку, снова попадет на звуковую линию (течение предполагается непрерывным). Так как образ характеристики в плоскости годографа — эпициклоида, в обоих звуковых точках этой характеристики значения угла β одинаковы. Это противоречит закону монотонности [2], так как $\beta = \text{const}$ на звуковой линии может быть только в случае, когда она прямая.

Ввиду отсутствия точек K_- на звуковой линии может быть не более одной точки K_+ .

Рассмотрим случай выпуклого профиля. Установим форму минимальной области влияния, когда ширина струи достаточно мала.

Так как на границе струи скорость сверхзвуковая, в точке пересечения ударной волны с границей струи будет происходить расширение потока от звуковой скорости за ударной волной; будем называть ее «угловой точкой».

При обтекании выпуклого профиля угол наклона звуковой линии к вектору скорости (обращенного в сторону увеличения скорости) острый [3], поэтому на звуковой линии существует единственная точка K_+ (фиг. 2).

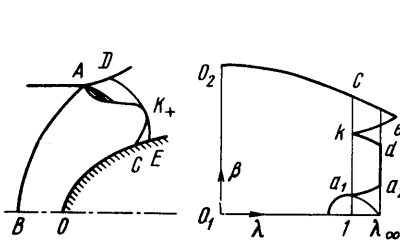
Точка K_+ аналогична центру сопла Лавала (но несимметричного). Заранее неизвестно, какой именно тип особенности здесь будет осуществляться. Ввиду асимметрии для изучения особенности здесь должны привлекаться помимо «антисимметричных» решений уравнения Трикоми для функции тока еще и «симметричные» (по β) решения. (Систематическое исследование центра сопла в классе степенных особенностей дано в монографии [4].)

Как и в случае бесконечного клина, при обтекании профиля граница минимальной области влияния может содержать отрезок свободной границы AD (фиг. 2).

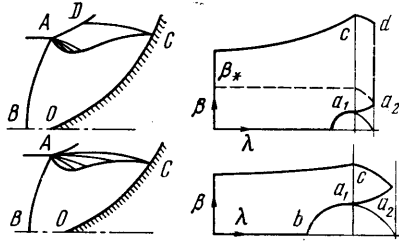
Представляет интерес также случай обтекания всюду вогнутого профиля. Звуковая линия здесь всегда выходит из угловой точки. Минимальная область влияния показана на фиг. 3.

Если угол при вершине β_0 достаточно велик ($\beta_0 > \beta_{**}$, определение величины β_{**} ясно из фиг. 3), может реализоваться только первый случай фиг. 3.

Звуковая линия в точке C составляет с вектором скорости тупой угол [3], поэтому при обтекании вогнутого профиля на звуковой линии не существует точек K_+ .



Фиг. 2



Фиг. 3

Как частный случай выпуклого профиля рассмотрим обтекание конечного клина. Стенка клина должна быть короче отрезка дозвуковой скорости на стенке бесконечного клина (с тем же углом при вершине, в струе той же ширины). С другой стороны, клин должен быть длиннее того клина, минимальная область влияния которого при обтекании безграничным потоком помещается внутри струи.

Если конечный клин является передней частью составного тела, предполагается, что выпуклый угол между касательными в точке излома достаточно велик.

Граница минимальной области влияния в плоскости годографа состоит из известных кривых: отрезков прямых $\beta = 0$, $\beta = \beta_0$, $\lambda = 0$ (линии тока), ударной полярны, характеристик $a_1 a_2$ и $c_1 c_2$ (угловые точки в струе и на клине), характеристик kc_2 и ka_2 (или kd) (фиг. 4).

Здесь, как и прежде, могут представиться два случая обтекания в зависимости от угла разворота потока в точке A . В связи с тем что положение точки K_+ (т. е. β_k) заранее неизвестно, нельзя сказать, какой из этих двух вариантов осуществляется.

Если считать в «обратной» задаче β_k известным параметром, для функции тока $\psi(\lambda, \beta)$, удовлетворяющей уравнению Чаплыгина, формулируется обобщенная задача Трикоми (на дозвуковом отрезке ударной полярны задается условие $\psi_\lambda = a(\lambda)\psi_\beta$ [5]).

Здесь существенно, что в точке A (т. е. на $a_1 a_2$) всегда может быть задано условие $\psi = 1$ (на клине можно положить $\psi = 0$).

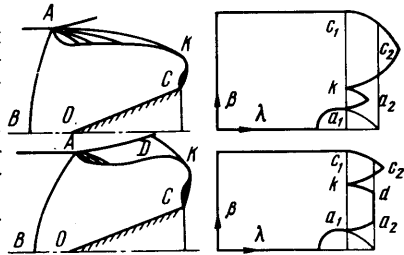
Если сформулированная задача имеет решение, то параметр β_k определяет длину стенки клина. Таким образом, прямая задача отличается от обратной тем, что в первой задается длина клина, а во второй — параметр β_k .

При $\beta_k = \beta_c$ минимальная область влияния будет такой же, как при обтекании бесконечного клина, а при $\beta_k = \beta_A$ — как при обтекании конечного клина безграничным потоком.

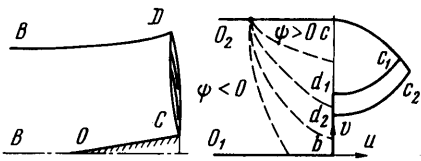
Предположим, что сформулированная обратная задача имеет единственное решение при каждом β_k , $\beta_A < \beta_k < \beta_c$, непрерывно зависящее от β_k . Тогда существует непрерывная однозначная функция $x_c = x_c(\beta_k)$ (x_c — длина клина).

Если зависимость $x_c(\beta_k)$ монотонная, то решение прямой задачи будет единственным, и наоборот.

Рассмотрим обратную задачу. Следуя [5], можно дать доказательство единственности «квазирегулярного» решения (без исследования законности применения формулы Грина в окрестности особых точек). Непосредственной проверкой здесь до-



Фиг. 4



Фиг. 5

статочно убедиться, что оценка

$$\int_c^A \psi \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} d\beta \geq 0, \quad \sigma = \int_{\ln \lambda}^0 \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{1/(k-1)} d \ln \lambda$$

полученная в [6] из условия $\psi = 0$ на характеристике, остается в силе и в случае, когда это условие задано на произвольной кривой внутри характеристического треугольника, пересекающей каждую характеристику не более одного раза. Граница сверхзвуковой области помимо этой кривой может содержать свободные от граничных условий характеристики, выпущенные из звуковой линии.

Вопрос о единственности решения прямой задачи в общем случае остается открытым. Дадим простое доказательство для случая обтекания конечного клина звуковой струей в рамках уравнения Трикоми

$$\psi_{uu} = u\psi_{vv}, \quad u = (k+1)^{1/2}(\lambda-1), \quad v = \beta.$$

(В [6] построено аналитическое решение для газа Жермена — Лиже, однако исследование зависимости $x_c(\beta_k)$ по формулам [6], по-видимому, затруднительно.)

Предположим, что при обтекании клина звуковой струей существуют два течения, соответствующие двум задачам Трикоми с различными значениями параметра β_d . Положим $\psi_{1,2} = 0$ на $bd_{1,2}$, $\psi_{1,2} = 1$ на $boc_{1,2}$, $\beta_{d_1} > \beta_{d_2}$ (фиг. 5). Таким образом, граничное значение разрывно в звуковой точке b .

Из условия физической реализуемости следует, что $\psi_{1,2}$ ограничены. Следуя [7], (стр. 300) можно доказать единственность ограниченного решения задачи Дирихле с кусочно-непрерывным граничным условием при $u \leq 0$. В качестве мажоранты, вместо решения $\varepsilon \ln(D/r)$, здесь можно взять, например, решение $\varepsilon(9v^2 - 4u^2)^{-1/2}$.

Отсюда следует, что решения $\psi_{1,2}$ в окрестности точки b имеют представление

$$\psi_{1,2} = \psi_3 + \psi_{4,5}$$

Здесь ψ_3 — решение, указанное в [8, 9], $\psi_3 = 0$ при $u = 0$, $\psi_3 = 1$ при $v = 0$; $\psi_{4,5}$ — непрерывные решения, обращающиеся в точке b в нуль.

Таким образом, для разности $\psi = \psi_2 - \psi_1$ имеет место задача Трикоми с непрерывным граничным условием

$$\psi = 0 \quad \text{на } d_2bo_1oc_1$$

$$\psi = \psi_2 \quad \text{на } d_1d_2 \quad (\text{фиг. 5})$$

Если решение ψ_2 физически реализуется, то без ограничения общности можно считать, что $\psi_2 > 0$ при $\lambda = 1$, $\beta_{d_2} < \beta < \beta_{d_1}$.

Кроме того, так как в решениях $\psi_{1,2}$ длина клина одинакова, должно быть

$$\int_{oc} \psi_v(u, v_c) du = 0$$

Отсюда следует существование по крайней мере двух областей, примыкающих к прямой $v = v_c$, $u < 0$, в которых ψ имеет разные знаки. Общая граница этих областей, кривая $\psi = 0$, одним концом опирается на прямую $v = v_c$.

Другой конец этой кривой не может лежать ни на границе d_2boc (тогда в соответствии с принципом максимума для эллиптических уравнений было бы $\psi \equiv 0$), ни в интервале d_1d_2 линии $u = 0$ (где $\psi = \psi_2 > 0$), ни в интервале d_1c линии $u = 0$ (по «принципу экстремума» ([10], стр. 84), для решений задачи Трикоми для уравнения Трикоми, обращающихся в нуль на характеристике, было бы $\psi \equiv 0$).

Таким образом, исходное предположение о существовании двух различных решений приводит к противоречию.

Поступило 13 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин Э. Г. К задаче обтекания бесконечного клина сверхзвуковой струей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
2. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
4. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавала. М., ВЦ АН СССР, 1965.

5. Франкль Ф. И. О задачах С. А. Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. Изв. АН СССР, Сер. матем., 1945, № 9.
6. Севостьянов Г. Д., Фалькович С. В. Симметричное обтекание клина плоской звуковой струей, вытекающей из канала. В сб. «Трансзвуковые течения газа», вып. 2. Саратов, Изд-во Саратовск. ун-та, 1968.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
8. Ehlers F. E. On some solutions on the hodograph equation which yield transonic flows through a Laval nozzle. J. Aeronaut. Sci., 1955, vol. 22, No. 2.
9. Скрипкин В. А. Об околозвуковом истечении плоской газовой струи из насадка с параллельными стенками. ПИММ, 1955, т. 19, вып. 1.
10. Бицадзе А. В. Уравнения смешанного типа. М., Изд-во АН СССР, 1959.

УДК 536.248+535.231

РАСЧЕТ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ ПОГЛОЩАЮЩЕЙ И РАССЕИВАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Л. А. ДОМБРОВСКИЙ

(Москва)

В случае однородного слоя получено аналитическое решение, дающее правильные предельные значения радиационного теплового потока.

Дан пример расчета излучения для потока однородных сферических частиц, ограниченного стенками. При этом характеристики взаимодействия излучения с частицами рассчитывались по теории Ми [1].

Имеется много различных методов решения уравнения переноса излучения как приближенных, так и точных (см., например, [2, 3]). Существующие численные методы позволяют рассчитать радиационный теплообмен в плоскопараллельном слое с любой заданной точностью. Эти методы требуют больших затрат машинного времени и не позволяют получить решение в аналитическом виде. Поэтому имеется необходимость создания простых приближенных способов расчета, дающих достаточно точные результаты для практических целей.

Эффективным методом решения уравнения переноса является получивший широкое распространение метод сферических гармоник [4]. Для высокой точности метода необходимо использовать приближения высоких порядков, что связано с серьезными вычислительными трудностями. В работе [5] был предложен способ расчета, эквивалентный первому приближению метода сферических гармоник. Однако этот способ дает завышенное значение радиационного теплового потока на границе области, так как не учитывается разрывность решения на границе при $\mu = 0$.

В настоящей работе предложен метод расчета, основанный на идее двойных сферических гармоник [6], лучше соответствующий физической картине процесса и обладающий большей точностью, чем обыкновенный метод сферических гармоник.

Уравнение переноса излучения решается в симметричном плоскопараллельном слое поглощающей и рассеивающей среды. Этот метод в отличие от метода работы [5] позволяет учесть старшие моменты индикатрисы рассеяния, что может оказаться существенным для сред, содержащих частицы, большие по сравнению с длиной волны излучения [7, 8].

1. Рассматривается симметричный слой рассеивающей и поглощающей среды толщиной $2z_0$, ограниченный одинаковыми плоскими и параллельными стенками.

Уравнение переноса излучения для плоской геометрии имеет следующий вид:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \Sigma \varphi = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^1 \varphi(z, \mu') G(\mu_0) d\mu' + \Sigma_a B_\lambda(T) \quad (1.1)$$

$$\mu = \cos \theta, \quad \Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s, \quad \mu_0 = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\psi - \psi')$$

Здесь $\varphi(z, \mu)$ — спектральная интенсивность излучения, Σ_a и Σ_s — соответственно спектральные коэффициенты поглощения и рассеяния, отнесенные к единице объема, $G(\mu_0)$ — индикатриса рассеяния, $B_\lambda(T)$ — функция Планка, θ — угол рассеяния.

Граничные условия при изотропно излучающей стенке с температурой T_w и спектральной степенью черноты ϵ_w

$$z = 0, \quad \varphi(0, -\mu) = \varphi(0, \mu) \quad (1.2)$$