УДК 532.546.2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОДОЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В НЕДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ СОРБЦИИ

И. В. РОЗЕН, Л. К. ЦАБЕК

(*Москва*)

Предложен анализ выражения для суммарного коэффициента продольного перемешивания в пористой недеформируемой среде, получены аналитические выражения для начальных и центральных статистических моментов. Распределение концентраций вдоль канала фильтрации для фиксированного времени и распределение концентраций на выходе канала фиксированной длины получены в виде полиномов Эрмита (прямая задача). Указан метод определения коэффициента продольного перемешивания из экспериментальных распределений и аналитических выражений для моментов (обратная задача). Приведены численные значения коэффициентов продольного перемешивания, найденные по рассматриваемой методике.

1. Фильтрация газовой (или жидкой) смеси через насыпную пористую однородную недеформируемую среду, представляющую собой систему однородных симметричных зерен с параметром симметрии ν, при наличии на границе газообразной (жидкой) и твердой фаз сорбции описывается системой уравнений [1, 2]:

Уравнением непрерывности в канале, наполненном пористой средой

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial uc}{\partial z}+\delta\gamma(c-c^\circ|_{r=a})=\frac{\partial}{\partial z}\left[D(u)\frac{\partial c}{\partial z}\right],\quad \delta=\frac{1-\sigma}{\sigma},\quad \gamma=\frac{1+\nu}{a}\beta \tag{1.1}$$

$$D=D_0\zeta_0^{-1}+(\alpha_1+\alpha_2)au+\alpha_3(R/a)^2a^2u^2D_0^{-1}+\alpha_0a^2u^2(D_0+\alpha_0^\circ au)\approx$$

$$\approx D_g+D_1u+D_2u^2,\quad u=u_0(1-z/L_0)^{-1/n},\quad L_0=P_0/n\left.\frac{dP_0}{dz}\right|_{z=0}\quad (2\leqslant n\leqslant 3)$$

Уравнением непрерывности внутри симметричного зерна

$$\frac{\partial q^\circ}{\partial t}+\frac{\partial c^\circ}{\partial t}=D_i\left(\frac{\partial^2c^\circ}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial c^\circ}{\partial r}\right) \tag{1.2}$$

Уравнением кинетики на границе газообразной (жидкой) и твердой фаз зерна пористой среды

$$\partial q^\circ/\partial t=k_1c^\circ-k_2q^\circ,\qquad k=k_1/k_2 \tag{1.3}$$

с граничными условиями

непрерывности потоков потока вещества смеси на внешней и внутренней границах зерна

$$\beta(c-c^\circ|_{r=a})=D_i\left.\frac{\partial c^\circ}{\partial r}\right|_{r=a},\quad \beta=\beta_0\left(\frac{u}{u_0}\right)^{1/m}\quad (2\leqslant m\leqslant 3) \tag{1.4}$$

условием симметрии в центре зерна

$$\left.\frac{\partial c^\circ}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \tag{1.5}$$

для полуограниченной задачи в начале канала фильтрации

$$c(z,t)|_{z=0}=c_0^\circ\delta(t),\quad c_0^\circ=\mathrm{const},\quad \left.\frac{\partial c(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0}=f_0(t) \tag{1.6}$$

и нулевыми начальными условиями

$$c(z,t)|_{t=0}=0,\quad c^\circ(z,r,t)|_{t=0}=0,\quad q^\circ(z,r,t)|_{t=0}=0 \tag{1.7}$$

Здесь $c(z,t)$ — концентрация вещества (сорбата) в потоке газовой (жидкой) смеси, $u(z)$ — фильтрационная линейная скорость потока, σ — доля свободного пространства недеформируемой пористой среды, γ — кинетический коэффициент (сорбции), учитывающий скорость подвода вещества к поверхности зерна потоком и диффузией (внешней), β — коэффициент (внешнего) массообмена на внешней границе зерна, ν — параметр симметрии ($\nu=2$ для сферических зерен с радиусом зерна a, $\nu=1$ для цилиндрических зерен с радиусом цилиндра a, $\nu=0$ для зерен в виде пластинок толщиной $2a$), D_i — коэффициент (внутренней) диффузии внутри узких каналов зерна (сорбента), $c^\circ(z,r,t)$ — концентрация вещества (сорбата) внутри свободного пространства зерен, $q^\circ(z,r,t)$ — концентрация поглощенного вещества твердой фазой зерна, k_1, k_2 — коэффициенты сорбции и десорбции соответственно, D_0 — молекулярный коэффициент диффузии, R — радиус канала, по которому протекает смесь, ζ_0 — коэффициент извилистости, u_0 — скорость фильтрационного потока на входе в канал, P_0, $\left.\dfrac{dP}{dz}\right|_{z=0}$ — давление и градиент давления на входе в канал (параметр $n=2$ соответствует учету только вязких сил при фильтрации газовой смеси, $n=3$ — учету только инерциальных сил).

Ввиду того что изучается распространение по пористой среде $\delta(t)$-образного возмущения (1.6), то для описания расплывшегося $\delta(t)$-образного возмущения, по форме кривой близкого к гауссовской, можно использовать в основном первый начальный и три центральных статистических момента [3]. Для нахождения аналитических выражений моментов решение системы (1.1)—(1.3) будем искать, используя двухмерное интегральное преобразование Лапласа

$$C(s,p)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-sz-pt}c(z,t)\,dz\,dt \tag{1.8}$$

Для асимптотических значений $z\to\infty$, $t\to\infty$ (соответственно $s\to0$, $p\to0$) решение системы (1.1)—(1.3) будем искать в окрестности точки $s=0$, $p=0$, поэтому ряды по малым параметрам s, p будут сходиться и соответствующие оригиналы иметь смысл. Выражения для моментов, получаемые из решения уравнения (1.1) при $u(z)\neq\mathrm{const}$, $D(u)\neq0$, находятся в виде громоздких квадратур, которые сложно использовать для расчетов. Поэтому в начале найдем более простые выражения для моментов при $D\sim0$ (малой роли продольного перемешивания).

Из уравнений (1.2), (1.3) с граничными условиями (1.4), (1.5) и начальными условиями (1.7) найдем изображение концентрации вещества внутри зерен для $1<\nu\leqslant2$

$$C^\circ(z,r,p)=\left(\frac{r}{a}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu-1)}\beta C(z,p)\,\frac{\mathrm{I}_{\frac{1}{2}(\nu-1)}(\lambda r)}{\mathrm{I}_{\frac{1}{2}(\nu-1)}(\lambda a)}(\beta+D_ia^{-1}B)^{-1} \tag{1.9}$$

$$B=1-\nu+\lambda a\frac{\mathrm{I}_{\frac{1}{2}(\nu-3)}(\lambda a)}{\mathrm{I}_{\frac{1}{2}(\nu-1)}(\lambda a)},\qquad \lambda=\left[D_i^{-1}\left(p+\frac{pk_1}{p+k_2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.10}$$

Подставим (1.9) в уравнение (1.1), с учетом (1.7) найдем

$$\frac{du(z)C(z,p)}{dz}+\left[p+\delta(1+\nu)D_ia^{-2}B\left(1+\frac{D_i}{a\beta}B\right)^{-1}\right]C(z,p)=0 \tag{1.11}$$

Из решения (1.11) получим

$$C(z,p)=c_0{}^\circ\frac{u_0}{u(z)}\exp\left\{-\int\limits_0^z\left[p+\delta(1+\nu)D_ia^{-2}B\left(1+\frac{D_i}{a\beta}B\right)^{-1}\right]dz\right\} \tag{1.12}$$

Выражения для начальных и центральных моментов находим из соотношений

$$\alpha_n{}^\circ=\lim_{p\to0}\left[\frac{(-1)^n}{C(p)}\frac{d^{(n)}C(p)}{dp^n}\right],\qquad \mu_n{}^\circ=\sum_{k=0}^n C_n{}^k(-\alpha_1)^k\alpha_{n-k} \tag{1.13}$$

Подставим (1.12) в (1.13), после преобразований найдем аналитические выражения для первого начального, второго и третьего центральных моментов для фиксированной длины фильтрационного канала

$$\alpha_1{}^\circ=\frac{[1+(1+k)\delta]L_0}{u_0(1+1/n)}\left[1-\left(1-\frac{L}{L_0}\right)^{(1+1/n)}\right],\qquad \mu_2{}^\circ=2\alpha_1{}^\circ\left\{\frac{1}{k_2}+\tau_i+\frac{1}{\gamma_0{}^*}\times\right.$$

$$\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nm}\right)^{-1}\left[1-\left(1-\frac{L}{L_0}\right)^{(1+1/n+1/nm)}\right]\times$$

$$\left.\times\left[1-\left(1-\frac{L}{L_0}\right)^{(1+1/n)}\right]^{-1}\right\}$$

$$\mu_3{}^\circ=6\alpha_1{}^\circ\left\{\frac{1}{k_2{}^2}+\frac{2\tau_i}{k_2}+\frac{2\tau_i{}^2(\nu+3)}{(\nu+5)}+\frac{2}{\gamma_0{}^*}\left(\frac{1}{k_2}+\tau_i\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\right. \tag{1.14}$$

$$\times\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{nm}\right)^{-1}\left[1-\left(1-\frac{L}{L_0}\right)^{(1+1/n+1/nm)}\right]\left[1-\left(1-\frac{L}{L_0}\right)^{(1+1/n)}\right]^{-1}+$$

$$+\frac{1}{\gamma_0^{*2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{2}{nm}\right)\left[1-\left(1-\frac{L}{L_0}\right)^{(1+1/n+2/nm)}\right]\times$$

$$\times\left[1-\left(1-\frac{L}{L_0}\right)^{(1+1/n)}\right]^{-1}$$

Здесь

$$\tau_i=\frac{(1+k)a^2}{(\nu+1)(\nu+3)D_i},\qquad \frac{1}{\gamma_0^*}=\frac{1+k}{\gamma_0}=\frac{(1+k)a}{(1+\nu)\beta_0} \tag{1.15}$$

τ_i — время релаксации, обусловленное конечной величиной скорости массообмена внутри зерен, $1/\gamma_0^*$ — время релаксации, обусловленное кончной величиной скорости массообмена на внешней границе зерна.

С учетом выражения для моментов (1.14) можно из (1.12) найти изображение для $c(z, t)$ в нулевом, первом и втором приближениях соответственно

$$c_0(z,t)=c_0^\circ\delta(t-\alpha_1^\circ),\qquad \alpha_{01}^\circ=t-\alpha_1^\circ,\qquad c_1(z,t)=\frac{c_0^\circ}{\sqrt{2\pi\mu_2^\circ}}\exp\left[-\frac{(\alpha_{01}^\circ)^2}{2\mu_2^\circ}\right] \tag{1.16}$$

$$c_2(z,t)=\frac{c_0^\circ}{3\pi}\left(\frac{6\alpha_{01}^\circ}{\mu_3^\circ}+\frac{3(\mu_2^\circ)^2}{(\mu_3^\circ)^2}\right)^{1/2}K_{1/3}\left[\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\mu_3^\circ}}\left(\alpha_{01}^\circ+\frac{(\mu_2^\circ)^2}{2\mu_3^\circ}\right)^{3/2}\right]\times$$

$$\times\exp\left[\frac{\alpha_{01}^\circ\mu_2^\circ}{\mu_3^\circ}+\frac{(\mu_2^\circ)^3}{3(\mu_3^\circ)^2}\right]$$

Используя выражения для моментов (1.14), проанализируем влияние переменной величины фильтрационной скорости $u(z)$ на форму кривой расплывающегося $\delta(t)$-образного возмущения. Первый начальный момент α_1° характеризует положение «центра» кривой. При изменении скорости потока $u^0\leqslant u<\infty\,(0\leqslant L\leqslant L_0)$ предельное значение первого начального момента (1.14)

$$\alpha_{1p}^\circ=\frac{[1+(1+k)\delta]L_0}{u_0(1+1/n)}=\alpha_{01}^*(1+1/n)^{-1}$$

Здесь (α_{01}^* — начальный момент при $u=u_0=\mathrm{const}$, $L=L_0$). Ввиду того что $1\leqslant\alpha_1^\circ\leqslant\alpha_{01}^*\leqslant1+1/n$, $^2/_3=\alpha_{1p}^\circ/\alpha_{01}^*$ при $n=2$, $^3/_4=\alpha_{1p}^\circ/\alpha_{01}^*$ при $n=3$ различие величин начального момента для постоянной и переменной скоростей фильтрационного потоков невелико. Поэтому разумно ввести эффективную скорость потока. При этом величина этой эффективной скорости потока находится из равенства начальных моментов (1.14) для переменной скорости потока и постоянной по величине эффективной скорости u_*

$$\alpha_1^\circ=\frac{[1+(1+k)\delta]L_0}{u_0(1+1/n)}\left[1-\left(1-\frac{L}{L_0}\right)^{(1+1/n)}\right]=\frac{[1+(1+k)\delta]L}{u_*}$$

Отсюда

$$u_*=(1+1/n)LL_0^{-1}u_0[1-(1-L/L_0)^{(1+1/n)}]^{-1}=\lambda_0u_0,\qquad 1\leqslant\lambda_0\leqslant1+1/n \tag{1.17}$$

Предельное значение последнего члена в выражении для μ_2° (1.14), рассчитанное при $L\to L_0$, $m=2$, $n=2$, равно $^6/_7\gamma_0^*\simeq0.855/\gamma_0^*$. Используя выражение предельной скорости при $n=2$ $u_{*p}={}^3/_2u_0$, найдем предельное значение последнего члена

$$\sqrt{\frac{u_0}{u_{*p}}}\frac{1}{\gamma_0^*}\simeq0.815\frac{1}{\gamma_0^*}$$

(отличие от строго рассчитанной величины 5%). Аналогичные расчеты для последнего члена μ_3° (1.14) при $m=2$, $n=2$ дают точное предельное значение $0.75/\gamma_0^{*2}$, приближенное значение с учетом постоянной величины скорости (1.16) равно $0.66/\gamma_0^{*2}$ (отличие составляет 12%). Проделанные вычисления подтверждают разумность введения эффективной скорости потока, определяемой соотношением (1.17).

2. Уравнение (1.1) с учетом (1.9) при эффективной скорости $u_* = \text{const}$ запишем в виде

$$D_* \frac{d^2C(z,p)}{dz^2} - u_* \frac{dC(z,p)}{dz} - \varphi C(z,p) = 0, \quad \varphi = p + \delta D_i(1+\nu)a^{-2}B\left(1 + \frac{D_i}{a\beta}B\right)^{-1}$$

$$D_* = D(u_*) \tag{2.1}$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа по координате с учетом условий (1.6), (1.7), найдем решение уравнения (2.1) в изображениях в виде

$$C(s,p) = \frac{D_* s c_0{}^\circ + D_* f_0(p) - u_* c_0{}^\circ}{D_* s^2 - u_* s - \varphi} = \frac{c_0{}^\circ}{(s - s_1)}\left[\frac{s - (u_*/D_* - f_0(p)/c_0{}^\circ)}{(s - s_2)}\right] \tag{2.2}$$

$$s_{1,2} = {}^1/_2 u_* D_*{}^{-1}(1 \pm (1 + 4D_*\varphi u_*{}^{-2})^{1/2}]$$

Решение (2.2) не имеет особенностей [4] при

$$c_0{}^\circ u_*[1 - (1 + 4D_*\varphi u_*{}^{-2})^{1/2}] = 2D_* f_0(p) \tag{2.3}$$

С учетом (2.3) решение (2.2) запишем следующим образом:

$$C(s,\ p) = c_0{}^\circ\{s - {}^1/_2 u_* D_*{}^{-1}[1 - (1 + 4D_*\varphi u_*{}^{-2})^{1/2}]\}^{-1} \tag{2.4}$$

Для определения моментов, описывающих выходную кривую при фиксированной длине канала фильтрации L, перепишем решение (2.4) в виде

$$C(L,p) = c_0{}^\circ \exp\{{}^1/_2 L u_* D_*{}^{-1}[1 - (1 + 4D_*\varphi u_*{}^{-2})^{1/2}]\} = c_0{}^\circ \exp\left[\sum_{n=1} (-1)^n v_n p^n\right] \tag{2.5}$$

Так как для нахождения первого начального и четырех центральных моментов достаточно знать только v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, то разлагая φ (2.1) в ряд по p, найдем

$$\begin{gathered}
v_1 = [1 + (1+k)\delta]L/u_*, \quad v_2 = v_1\left\{\tau_l + \left[\frac{k\delta}{1+(1+k)\delta}\right]\frac{1}{k_2} + \right. \\
\left. + \left[\frac{(1+k)\delta}{1+(1+k)\delta}\right]\left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0{}^*}\right)\right\} \\
v_3 = v_1\left\{2\tau_l{}^2 + 2\tau_l\left[\frac{k\delta}{1+(1+k)\delta}\right]\frac{1}{k_2} + 2\tau_l\left[\frac{(1+k)\delta}{1+(1+k)\delta}\right]\left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0{}^*}\right) + \right. \\
+ \left[\frac{k\delta}{1+(1+k)\delta}\right]\left(\frac{1}{k_2{}^2} + \frac{2\tau_i}{k_2} + \frac{2}{k_2\gamma_0{}^*}\right) + \left[\frac{(1+k)\delta}{1+(1+k)\delta}\right] \times \\
\left. \times \left[\frac{2(\nu+3)}{(\nu+5)}\tau_i{}^2 + \frac{2\tau_i}{\gamma_0{}^*} + \frac{1}{\gamma_0{}^{*2}}\right]\right\} \\
v_4 = v_1\left\{5\tau_l{}^3 + 6\tau_l{}^2\left[\frac{k\delta}{1+(1+k)\delta}\right]\frac{1}{k_2} + 6\tau_l{}^2\left[\frac{(1+k)\delta}{1+(1+k)\delta}\right]\left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0{}^*}\right) + \right. \\
+ \frac{\tau_l}{1+(1+k)\delta}\left[\frac{2k\delta}{k_2{}^2} + \frac{2k\delta(3k+2)}{(1+k)k_2}\left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0{}^*}\right) + \right. \\
\left. + 2(1+k)\delta\left(2\tau_i{}^2\frac{(\nu+3)}{(\nu+5)} + \frac{2\tau_i}{\gamma_0{}^*} + \frac{1}{\gamma_0{}^{*2}}\right)\right] + \\
+ \frac{\tau_l}{[1+(1+k)\delta]^2}\left[\frac{k\delta}{k_2} + (1+k)\delta\left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0{}^*}\right)\right]^2 + \frac{k\delta}{[1+(1+k)\delta]} \times \\
\times \left[\frac{1}{k_2{}^3} + \frac{(3k+2)}{(1+k)k_2{}^2}\left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0{}^*}\right) + \frac{6\tau_i{}^2(\nu+3)}{k_2(\nu+5)} + \frac{6\tau_i}{k_2\gamma_0{}^*} + \frac{3}{k_2\gamma_0{}^{*2}}\right] + \\
\left. + \frac{(1+k)\delta}{[1+(1+k)\delta]}\left[\frac{(5\nu+17)(\nu+3)}{(\nu+5)(\nu+7)}\tau_i{}^3 + \frac{(5\nu+17)\tau_i{}^2}{(\nu+5)\gamma_0{}^*} + \frac{3\tau_i}{\gamma_0{}^{*2}} + \frac{1}{\gamma_0{}^{*3}}\right]\right\}
\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$v_5 = v_1 \left\{ 14\tau_i^4 + 20\tau_i^3 \frac{k\delta}{[1+(1+k)\delta]k_2} + 20\tau_i^3 \frac{(1+k)\delta}{[1+(1+k)\delta]} \left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0^*}\right) + \right.$$

$$+ \frac{6\tau_i^2}{[1+(1+k)\delta]} \left[k\delta \left(\frac{1}{k_2^2} + \frac{2\tau_i}{k_2} + \frac{2}{k_2\gamma_0^*} \right) + (1+k)\delta \left(2\tau_i^2 \frac{(\nu+3)}{(\nu+5)} + \frac{2\tau_i}{\gamma_0^*} + \frac{1}{\gamma_0^{*2}} \right) \right] +$$

$$+ \frac{6\tau_i^2}{[1+(1+k)\delta]} \left[\frac{k\delta}{k_2} + (1+k)\delta \left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0^*} \right) \right]^2 + \frac{2\tau_i}{[1+(1+k)\delta]^2} \times$$

$$\times \left[\frac{k\delta}{k_2} + (1+k)\delta \left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0^*} \right) \right] \left[k\delta \left(\frac{1}{k_2^2} + \frac{2\tau_i}{k_2} + \frac{2}{k_2\gamma_0^*} \right) + \right.$$

$$\left. + (1+k)\delta \left(2\tau_i^2 \frac{(\nu+3)}{(\nu+5)} + \frac{2\tau_i}{\gamma_0^*} + \frac{1}{\gamma_0^{*2}} \right) \right] + \frac{2\tau_i k\delta}{[1+(1+k)\delta]} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{k_2^3} + \frac{(3k+2)}{k_2^2(1+k)} \left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0^*} \right) + \frac{6\tau_i^2(\nu+3)}{k_2(\nu+5)} + \frac{3}{k_2\gamma_0^*} \left(2\tau_i + \frac{1}{\gamma_0^*} \right) \right] +$$

$$+ \frac{2\tau_i(1+k)\delta}{[1+(1+k)\delta]} \left[\frac{(5\nu+17)(\nu+3)}{(\nu+5)(\nu+7)} \tau_i^3 + \frac{(5\nu+17)\tau_i^2}{(\nu+5)\gamma_0^*} + \frac{3\tau_i}{\gamma_0^{*2}} + \frac{1}{\gamma_0^{*3}} \right] +$$

$$+ \frac{k\delta}{[1+(1+k)\delta]} \left[\frac{1}{k_2^4} + \frac{2(2k+1)}{k_2^3(k+1)} \left(\tau_i + \frac{1}{\gamma_0^*} \right) + \frac{3(2k+1)}{(k+1)k_2^2} \left(2\tau_i^2 \frac{(\nu+3)}{(\nu+5)} + \frac{2\tau_i}{\gamma_0^*} + \frac{1}{\gamma_0^{*2}} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{k_2} \left(\frac{(5\nu+17)(\nu+3)}{(\nu+5)(\nu+7)} \tau_i^3 + \frac{(5\nu+17)\tau_i^2}{(\nu+5)\gamma_0^*} + \frac{3\tau_i}{\gamma_0^{*2}} + \frac{1}{\gamma_0^{*3}} \right) \right] +$$

$$+ \frac{(1+k)\delta}{[1+(1+k)\delta]} \left[\frac{2(7\nu+31)(\nu+3)^2\tau_i^4}{(\nu+5)(\nu+7)(\nu+9)} + \frac{2(7\nu+31)(\nu+3)\tau_i^3}{(\nu+5)(\nu+7)\gamma_0^*} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{6(\nu+4)\tau_i^2}{(\nu+5)\gamma_0^{*2}} + \frac{8\tau_i}{\gamma_0^{*3}} + \frac{1}{\gamma_0^{*4}} \right] \right\}$$

$$\tau_i = \frac{[1+(1+k)\delta]D_*}{u_*^2} = [1+(1+k)\delta](\lambda_0^{-2}u_0^{-2}D_g + \lambda_0^{-1}u_0^{-1}D_1 + D_2) \tag{2.7}$$

Подставим (2.5) в (1.13) и после преобразований получим выражения для моментов

$$\alpha_1 = v_1, \quad \mu_2 = 2v_2, \quad \mu_3 = 6v_3, \quad \mu_4 = 24v_4 + 12v_2^2, \quad \mu_5 = 120v_5 + 120v_2v_3 \tag{2.8}$$

Используя экспериментальные кривые c (L, t) на выходе канала фильтрации длиной L, можно найти численные значения для моментов

$$\alpha_n = \frac{1}{\alpha_0} \int_0^\infty c(L,t) t^n \, dt, \qquad \mu_n = \frac{1}{\alpha_0} \int_0^\infty (t-\alpha_1)^n c(L,t) \, dt \tag{2.9}$$

Из решения алгебраической системы (2.8) с учетом численных значений (2.9) определим величины δ, β_0, D_g, D_1, D_2 (обратная задача). При этом решение алгебраического уравнения четвертого порядка можно найти методом Эйлера [5]. Так как выходная кривая имеет форму, близкую к гауссовской кривой, аналитическое выражение для такой кривой (прямая задача) найдем в виде ряда по ортогональным полиномам Эрмита

$$c(L,t) = \sum_{n=0} A_n H_n(y) \exp(-y^2), \qquad y = (t-\alpha_1)(2\mu_2)^{-1/2} \tag{2.10}$$

С учетом ортогональности полиномов Эрмита [6] получим выражение для коэффициентов

$$A_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_2},\qquad A_n=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k 2^{(-n/2-k-1/2)}\mu_{n-2k}^{*}}{\sqrt{\pi}(n-2k)!\,\mu_2^{(n/2-k+1/2)}k!},\qquad A_1=A_2=0 \tag{2.11}$$

Если граничные условия вместо (1.6)

$$c(z,\ t)=c_0{}^{\circ}\eta(t) \tag{2.12}$$

($\eta(t)$ — единичная функция), то выходная кривая будет описываться не выражением (2.10), а следующим:

$$c(L,t)=\frac{\left\{\operatorname{erf}(y)+\operatorname{erf}(y_0)-2\sqrt{2\mu_2}\sum_{n=3}A_n[\exp(-y^2)H_{n-1}(y)+(-1)^n\exp(-y_0{}^2)H_{n-1}(y_0)]\right\}}{\left\{1+\operatorname{erf}(y_0)-2\sqrt{2\mu_2}\sum_{n=3}A_n(-1)^nH_{n-1}(y_0)\exp(-y_0{}^2)\right\}} \tag{2.13}$$

так как

$$y_0=\alpha_1(2\mu_2)^{-1/2}$$

$$\int_0^x e^{-y^2}H_n(y)\,dy=H_{n-1}(0)-e^{-x^2}H_{n-1}(x) \tag{2.14}$$

3. Для нахождения моментов, с помощью которых можно описывать кривую распределения концентраций вдоль канала фильтрации при фиксированном моменте времени T, перепишем (2.4) с учетом (2.5) следующим образом:

$$C(s,p)=c_0{}^{\circ}\{s-F_1{}^{-1}(p)\}^{-1}=-c_0{}^{\circ}\left\{F_1(p)+\sum_{n=1}s^nF_{n+1}(p)\right\} \tag{3.1}$$

$$F_1{}^{-1}(p)=f(p)=\sum_{n=1}(-1)^n v_n{}^{\circ}p^n,\qquad F_n(p)=f^{-n}(p),\qquad v_n{}^{\circ}=v_n|_{L=1}$$

Подставим (3.1) в (1.13), откуда получим выражения для начальных и центральных моментов

$$\alpha_n{}^*=n!\frac{F_{n+1}(T)}{F_1(T)}(-1)^n,\qquad \mu_n{}^*=\sum_{k=0}^{n}C_n{}^k(-\alpha_1{}^*)^k\alpha_{n-k}^{*} \tag{3.2}$$

При асимптотических больших T после преобразований найдем аналитические выражения для первого начального и четырех центральных моментов

$$\alpha_1{}^*=\frac{T}{v_1{}^{\circ}}=\frac{u_*T}{1+(1+k)\delta},\qquad \mu_2{}^*=2\alpha_1{}^*(v_2{}^{\circ})(v_1{}^{\circ})^{-2} \tag{3.3}$$

$$\mu_3{}^*=6\alpha_1{}^*(v_1{}^{\circ})^{-4}[2(v_2{}^{\circ})^2-v_1{}^{\circ}v_3{}^{\circ}],\qquad \mu_4{}^*=3(\mu_2{}^*)^2+\alpha_1{}^*(v_1{}^{\circ})^{-6}[24v_4{}^{\circ}(v_1{}^{\circ})^2+$$
$$+216(v_2{}^{\circ})^3-192v_1{}^{\circ}v_2{}^{\circ}v_3{}^{\circ}],\qquad \mu_5{}^*=10\mu_2{}^*\mu_3{}^*+20\alpha_1{}^*(v_1{}^{\circ})^{-8}[191(v_2{}^{\circ})^4+$$
$$+60(v_1{}^{\circ})^2v_2{}^{\circ}v_4{}^{\circ}-270(v_2{}^{\circ})^2v_3{}^{\circ}v_1{}^{\circ}+36(v_3{}^{\circ})^2(v_1{}^{\circ})^2-6v_5{}^{\circ}(v_1{}^{\circ})^3]$$

Используя экспериментальные кривые $c(z,\ T)$ распределения концентраций вдоль канала фильтрации, можно найти численные значения для моментов

$$\alpha_n{}^*=\frac{1}{\alpha_0}\int_0^\infty c(z,T)z^n\,dz,\qquad \mu_n{}^*=\frac{1}{\alpha_0}\int_0^\infty(z-\alpha_1{}^*)^n c(z,T)\,dz \tag{3.4}$$

Из решения алгебраической системы (3.3) с учетом известных численных значений (3.4) найдем величины δ, β_0, D_g, D_1, D_2 (обратная задача). Экспериментальное распределение $c(z, T)$ легко можно получить, когда сорбируемый газ смеси радиоактивный. Распределение концентраций вдоль канала фильтрации при распространении δ-возмущения имеет форму кривой, близкую к гауссовской кривой, поэтому аналитическое выражение для распределения концентраций (прямая задача) найдем в виде ряда по полиномам Эрмита

$$c(z, T) = \sum_{n=0} B_n H_n(y^*) \exp[-(y^*)^2], \quad y^* = (z - \alpha_1^*)(2\mu_2^*)^{-1/2}, \quad y_0^* = \alpha_1^*(2\mu_2^*)^{-1/2} \tag{3.5}$$

С учетом ортогональности полиномов Эрмита получим

$$B_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_2^*}}, \quad B_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{2^{(-n/2-k-1/2)} \overset{*}{\mu}_{n-2k} (-1)^k}{\sqrt{\pi}(n-2k)!\,(\mu_2^*)^{(n/2-k+1/2)}\, k!}, \quad B_2 = B_1 = 0$$

Для граничных условий (2.12) распределение концентраций вдоль канала фильтрации

$$c(z, T) = \frac{\left\{ \operatorname{erf}(y^*) + \operatorname{erf}(y_0^*) - 2\sqrt{2\mu_2^*} \sum_{n=3} B_n [\exp[-(y^*)^2] H_{n-1}(y^*) + (-1)^n \exp[-(y_0^*)^2] H_{n-1}(y_0^*)] \right\}}{\left\{ 1 + \operatorname{erf}(y_0^*) - 2\sqrt{2\mu_2^*} \sum_{n=3} B_n (-1)^n H_{n-1}(y_0^*) \exp[-(y_0^*)^2] \right\}} \tag{3.6}$$

4. Используя рассмотренную выше методику, были получены численные значения эффективных коэффициентов продольного перемешивания (коэффициентов дисперсии) для цилиндрической колонны длиной 1÷5 *м*, диаметром 1.5 *см* наполненной недеформируемыми зернами силикагеля КСС (пористое вещество с эффективным радиусом пор 30 Å) произвольной формы с характерным размером 0.02 *см*. Изучалось движение импульсных порций сорбируемых паров бензола (коэффициент сорбции $k = 7.2 \cdot 10^3$) и несорбируемого водорода ($k = 0$) по пористой цилиндрической колонне предварительно насыщенной азотом. Линейная скорость газоносителя азота изменялась в широком интервале (от 0.8 до 80 *см/сек*). Для определения параметра λ_0 снималась величина входного давления (выходное давление равнялось атмосферному) для колонн длиной 1. 2, 3, 4, 5 *м*. Из решения трансцендентной системы уравнений (с учетом $uP = \text{const}$) находили n, L_0, а затем по формуле (1.17) определяем λ_0.

Из обработки экспериментальных результатов было получено $n \approx 2$ (для рассматриваемых линейных скоростей режим обтекания фильтрационным потоком зерен пористой среды будет вязким), средняя величина параметра симметрии зерен $\nu \simeq 1.82$ (зерна имеют форму, близкую к сферической), пористость $\sigma = 0.318$, коэффициент извилистости $\zeta_0 = 1.44$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1.28$, $\alpha_3 = 7.1 \cdot 10^{-5}$ (в предположении отсутствия застойных зон для газового потока $\alpha_6 = 0$), коэффициент продольного перемешивания равен

$$D = 0.7D_0 + 1.28au + 7.1 \cdot 10^{-5} \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{a^2u^2}{D_0}$$

Для рассматриваемой пористой системы смеси азот — водород

$$D = 0.53 + 0.0128\,u + 2.1 \cdot 10^{-4}\,u^2$$

так как $D_0 \approx 0.76$ *см²/сек* [7].

Поступило 29 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М., «Наука», 1969.
2. Цабек Л. К. Движение газовой смеси через пористую среду при наличии сорбции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
3. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1965.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М., Физматгиз, 1962.
6. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., Физматгиз, 1953.
7. Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. М., Гостоптехиздат, 1964.