УДК 538.4

О ПОСТРОЕНИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ

В. В. УШАКОВ

(*Киев*)

Система уравнений, описывающая плоские потенциальные электрогидродинамические (ЭГД) течения с малым параметром взаимодействия, после перехода к новым переменным преобразована к одному уравнению. Найдено его частное решение, которое является электрогидродинамическим аналогом решения Гамеля в динамике вязкой жидкости.

Наложение ограничений на характер изменения электрических параметров вдоль координатных линий и соответствующая оценка членов позволили выделить два типа течений, которые описываются упрощенными уравнениями: струйное и квазиодномерное течения заряженной компоненты в криволинейном электростатическом поле и двумерном потенциальном потоке среды-носителя.

Приведены результаты решения приближенных уравнений для некоторых частных случаев.

1. Основные уравнения. Ограничимся рассмотрением простейшей модели ЭГД течений с малым параметром взаимодействия, когда влияние электрической объемной силы на гидродинамику среды-носителя пренебрежимо мало. В этом случае скорость среды-носителя $\mathbf{u}$ можно считать заданной. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и плотность объемного заряда q описываются системой уравнений [1]

$$\nabla[(k\mathbf{E}+\mathbf{u})q-D\nabla q]=0,\quad \nabla\mathbf{E}=\varepsilon^{-1}q,\quad \nabla\times\mathbf{E}=0 \qquad (1.1)$$

Здесь k — подвижность, D — коэффициент диффузии заряженных частиц, ε — диэлектрическая проницаемость, (k, ε, D = const). В случае потенциального движения несжимаемой среды-носителя уравнения (1.1) можно записать в виде

$$\nabla(\mathbf{v}q-D\nabla q)=0,\qquad \nabla\mathbf{v}=k\varepsilon^{-1}q,\qquad \nabla\times\mathbf{v}=0 \qquad (1.2)$$

$$(\mathbf{v}=k\mathbf{E}+\mathbf{u})$$

Перейдем к криволинейным ортогональным координатам φ_0, ψ_0, которые являются соответственно эквипотенциалями и линиями тока фиктивного течения со скоростью $\mathbf{v}_0$ (назовем ее наложенной)

$$\mathbf{v}_0=k\mathbf{E}_0+\mathbf{u} \qquad (1.3)$$

Указанное течение имеет место при движении заряженной компоненты в наложенном электрическом поле $\mathbf{E}_0$ и потоке среды-носителя, если диффузией и влиянием поля объемного заряда пренебречь.

Коэффициенты Лямэ $H_1=H_2=H$ для выбранных координат определяются выражением

$$H^2=|\mathbf{v}(\varphi_0,\psi_0)|^{-2}=\left|\frac{dz}{dW}\right|^2 \qquad (1.4)$$

Здесь $z=x+iy$, $W=\psi_0+i\varphi_0=kw+\chi$ — комплексный потенциал наложенного течения, w — комплексный потенциал электрического поля, χ — комплексный потенциал потока среды-носителя.

Система уравнений (1.2) в новых координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_0}(qU')+\frac{\partial}{\partial\psi_0}(qV')-\frac{D}{k}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial\varphi_0{}^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial\psi_0{}^2}\right)=0 \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{H^2}\left(\frac{\partial U'}{\partial\varphi_0}+\frac{\partial V'}{\partial\psi_0}\right)=\frac{k}{\varepsilon}q, \qquad \frac{\partial U'}{\partial\psi_0}-\frac{\partial V'}{\partial\varphi_0}=0 \tag{1.6}$$

$$(U'=UH, \quad V'=VH)$$

Здесь U', V' — безразмерные составляющие вектора скорости $\mathbf{v}$ вдоль координатных линий φ_0 и ψ_0 соответственно. При этом проекции вектора наложенной скорости $\mathbf{v}_0$ равны

$$U_0=H^{-1}, \qquad V_0=0 \tag{1.7}$$

Введем потенциал вектора $\mathbf{v}$ и перейдем от системы (1.5), (1.6) к одному уравнению

$$U=\frac{1}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_0}, \qquad V=\frac{1}{H}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_0} \tag{1.8}$$

$$\left[\frac{\partial(\ln|\mathbf{v}_0|^2)}{\partial\varphi_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_0}+\frac{\partial(\ln|\mathbf{v}_0|^2)}{\partial\psi_0}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_0}\right]\Delta'\varphi+(\Delta'\varphi)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_0}\frac{\partial(\Delta'\varphi)}{\partial\varphi_0}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_0}\frac{\partial(\Delta'\varphi)}{\partial\psi_0}-\frac{D}{k}\left(\frac{\Delta'|\mathbf{v}_0|^2}{|\mathbf{v}_0|^2}\Delta'\varphi+2\frac{\partial\ln|\mathbf{v}_0|^2}{\partial\varphi_0}\frac{\partial\Delta'\varphi}{\partial\varphi_0}+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial\ln|\mathbf{v}_0|^2}{\partial\psi_0}\frac{\partial\Delta'\varphi}{\partial\psi_0}+\Delta'\Delta'\varphi\right)=0 \tag{1.9}$$

$$\left(\Delta'=\frac{\partial}{\partial\varphi_0{}^2}+\frac{\partial}{\partial\psi_0{}^2}\right)$$

Учитывая, что функция $\ln|dW/dz|$ аналитическая, можно записать

$$-2\frac{d}{dW}\left(\ln\frac{dW}{dz}\right)=a+ib, \qquad \frac{\Delta'|\mathbf{v}_0|^2}{|\mathbf{v}_0|^2}=a^2+b^2 \tag{1.10}$$

$$a(\varphi_0,\psi_0)=-\frac{\partial\ln|\mathbf{v}_0|^2}{\partial\psi_0}, \qquad b(\varphi_0,\psi_0)=\frac{\partial\ln|\mathbf{v}_0|^2}{\partial\varphi_0} \tag{1.11}$$

Используя (1.10), (1.11), преобразуем уравнение (1.9) к виду

$$\left(b\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_0}-a\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_0}\right)\Delta'\varphi+(\Delta'\varphi)^2+\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_0}\frac{\partial(\Delta'\varphi)}{\partial\varphi_0}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_0}\frac{\partial(\Delta'\varphi)}{\partial\psi_0}-\frac{D}{k}\left[(a^2+b^2)\Delta'\varphi+2b\frac{\partial\Delta'\varphi}{\partial\varphi_0}-2a\frac{\partial\Delta'\varphi}{\partial\psi_0}+\Delta'\Delta'\varphi\right]=0 \tag{1.12}$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1.12) при заданных сопряженных функциях $a(\varphi_0,\psi_0)$, $b(\varphi_0,\psi_0)$.

Ниже рассматриваются некоторые частные случаи ЭГД течений, для которых уравнение (1.12) может быть решено точно или сведено к более простому уравнению, допускающему аналитическое решение.

2. Аналог решения Гамеля в ЭГД. Найдем частное решение уравнения (1.12), когда $a=\text{const}$, $b=\text{const}$. Интегрируя первое уравнение (1.10), получим для потенциала наложенного течения

$$W=\frac{2(a-ib)}{a^2+b^2}\ln(z-z_0) \tag{2.1}$$

выражение, соответствующее вихреисточнику. Течение такого типа возникает в электрическом поле равномерно заряженной линии при совмещении ее с гидродинамическим вихреисточником.

Будем искать частное решение уравнения (1.12) в виде

$$\varphi = F(\varphi_0).$$

Полагая, что в случае сильного электрического поля можно пренебречь диффузией, получим после интегрирования

$$f = \sqrt{b^{-1}[C_1 \exp(-b\varphi_0) + C]} \tag{2.2}$$

где $f = dF / d\varphi_0$, C, C_1 — постоянные интегрирования. Переход к полярным координатам r, θ осуществляется на основании связи $\mathbf{v} = -\nabla\varphi$. В отличие от выражений (1.8) здесь выбран отрицательный знак, так как в координатах φ_0, ψ_0 ток направлен в сторону уменьшения φ_0, а в координатах r, θ — в сторону увеличения r

$$V_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2b}{a^2 + b^2}\frac{f}{r}, \qquad V_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{2a}{a^2 + b^2}\frac{f}{r} \tag{2.3}$$

Полученное решение для заряженных частиц можно рассматривать как ЭГД аналог обобщенного решения Гамеля в динамике вязкой жидкости [2].

Выражения (2.3) могут быть использованы при определении параметров коронного разряда между коаксиальными цилиндрами при наличии циркуляционного течения и вдува среды-носителя через пористую поверхность коронирующего цилиндра.

При $a = 0$ имеем чисто радиальное течение, которое характерно для коронного разряда между неподвижными коаксиальными цилиндрами или источника заряженных частиц, совмещенного с гидродинамическим источником. Подставляя в (2.3) значение $\varphi_0 = -2b^{-1}\ln r$, которое следует из (2.1), получим при отсутствии гидродинамического переноса известное решение Н. Н. Тиходеева для коронного разряда [3]

$$V_r = 2r^{-1}b^{-3/2}(C_1 r^2 + C)^{1/2}$$

При $b = 0$ решение (2.2) имеет вид $f = (C\varphi_0 + C_1)^{1/2}$ и выражения (2.3) описывают движение заряженных частиц по концентрическим окружностям при циркуляционном течении среды-носителя между коаксиальными диэлектрическими цилиндрами. При $a = 0$, $b = 0$ приходим к известной одномерной задаче об ЭГД течении в промежутке между плоским эмиттером и коллектором. При этом $f = (C\varphi_0 + C_1)^{1/2}$.

3. Приближение типа пограничного слоя. Уравнения, описывающие распространение ионной струи, образованной линейным источником в сильном однородном электрическом поле, были получены в [4]. Соответствующие уравнения и некоторые решения для слабоискривленных свободных ионных струй при малых электрических числах Рейнольдса $\mathrm{Re}^* = u^\circ / kE^\circ \ll 1$ приведены в [5]. Ниже будут получены уравнения типа ЭГД пограничного слоя в координатах φ_0, ψ_0, что позволит рассмотреть более общий класс течений, когда Re^* изменяется от 0 до $\mathrm{Re}^* \gg 1$. В последнем случае конвективные точки будут преобладать над токами проводимости.

Под ЭГД течениями типа пограничного слоя будем понимать такие течения, для которых область, занятая заряженной компонентой, имеет характерный поперечный размер намного меньше характерного продольного размера. Течения такого рода образуются при помещении источника заряженных частиц в воздушный поток и сильное наложенное электрическое поле (в частном случае один из воздействующих факторов может отсутствовать).

Результаты зондовых исследований слабо заряженных ЭГД струй [6] свидетельствуют о существовании струйного режима течения при выдуве заряженного газа в затопленное пространство. Можно предположить, что определенные участки указанных струй могут быть рассчитаны в приближении ЭГД пограничного слоя. Уравнения ЭГД пограничного слоя могут быть использованы и для приближенного расчета начальных участков узких каналов ЭГД генераторов [7]. В [8] дан пример такого расчета для плоского диэлектрического канала при $\mathrm{Re}^* \ll 1$.

При выводе уравнений ЭГД пограничного слоя используем запись основных уравнений в виде (1.5), (1.6), выделяя скорость переноса в поле объемного заряда $\mathbf{V}_*(\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{V}_*)$. Потенциал течения φ представим в виде суммы $\varphi = \varphi_0 + \varphi_*$, где φ_* — потенциал течения со скоростью V_*.

С учетом соотношений (1.7) можно записать

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_0}[(1+U_*')q]+\frac{\partial}{\partial\psi_0}(V_*'q)-\frac{D}{k}\left(\frac{\partial^2 q}{\partial\varphi_0^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial\psi_0^2}\right)=0 \qquad (3.1)$$

$$\frac{\partial U_*'}{\partial\varphi_0}+\frac{\partial V_*'}{\partial\psi_0}=-\frac{k}{\varepsilon}H^2 q, \qquad \frac{\partial U_*'}{\partial\psi_0}-\frac{\partial V_*'}{\partial\varphi_0}=0 \qquad (3.2)$$

Здесь $U_*' = HU_*$, $V_*' = HV_*$ — соответствующие безразмерные проекции скорости $\mathbf{V}_*$.

Произведем оценку членов в уравнениях (3.1)—(3.3). Пусть δ — толщина струи заряженных частиц, отсчитываемая вдоль $\varphi_0 = \mathrm{const}$, а L — характерный линейный размер, отсчитываемый вдоль $\psi_0 = \mathrm{const}$. Для ЭГД струи (или пограничного слоя) справедлива оценка $\delta / L \ll 1$. Легко показать, учитывая потенциальность течения, что

$$\delta \sim H\psi_0, \quad L \sim H\varphi_0; \quad U_*' \sim V_*'\delta / L \qquad (3.3)$$

Оценивая члены уравнений (3.1), (3.2) на основании (3.3) и оставляя члены одного порядка, получаем уравнения ЭГД пограничного слоя

$$\frac{\partial q}{\partial\varphi_0}+\frac{\partial}{\partial\psi_0}(V_*'q)-\frac{D}{k}\frac{\partial^2 q}{\partial\psi_0^2}=0, \qquad q=\frac{\varepsilon}{kH^2}\frac{\partial V_*'}{\partial\psi_0} \qquad (3.4)$$

Второе уравнение (3.2) сохраняет прежний вид и служит для определения U_*'.

Из (3.4) следует, что для течений типа ЭГД струй в рассматриваемом приближении характерно пренебрежение продольной составляющей скорости, вызванной влиянием электрического поля объемного заряда. Отсутствие необходимых экспериментальных данных не дает возможности в настоящее время достаточно строго оценить границы применимости данного приближения. Предварительные эксперименты свидетельствуют о слабом влиянии продольной составляющей собственного поля объемного заряда на характер ЭГД течения при достаточно больших расстояниях от источника заряженных частиц.

Если исключить q в (3.4) и перейти к потенциалу φ_*, используя (1.8), то после несложных преобразований получим

$$\left(b-a\frac{\partial\varphi_*}{\partial\varphi_0}\right)\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial\psi_0^2}\mp\frac{\partial^3\varphi_*}{\partial\varphi_0\,\partial\psi_0^2}+\frac{\partial}{\partial\psi_0}\left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial\psi_0}\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial\psi_0^2}\right)-$$

$$-\frac{D}{k}\left[\left(a^2-\frac{\partial a}{\partial\psi_0}\right)\frac{\partial^2\varphi_*}{\partial\psi_0^2}-2a\frac{\partial^3\varphi_*}{\partial\psi_0^3}+\frac{\partial^4\varphi_*}{\partial\psi_0^4}\right]=0 \qquad (3.5)$$

Здесь a, b определяются соотношениями (1.11).

Рассмотрим наиболее частный случай, когда $a = 0$, $b = 0$, что соответствует однородному полю наложенных скоростей v_0. При этом задача симметрична относительно координатной линии $\psi_0 = 0$, на которой

$$\partial\varphi_* / \partial\psi_0 = \partial^2\varphi_* / \partial\psi_0^2 = 0$$

Интегрируя уравнение (3.5) по ψ_0, получим для рассматриваемого случая

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_0}+F\frac{\partial F}{\partial\psi_0}-\frac{D}{k}\frac{\partial^2 F}{\partial\psi_0^2}=0 \qquad \left(\frac{\partial\varphi_*}{\partial\psi_0}=F\right) \qquad (3.6)$$

Уравнение (3.6) можно преобразовать в уравнение Хопфа

$$\frac{\partial F'}{\partial \varphi_0'} + F' \frac{\partial F'}{\partial \psi_0'} - \frac{\partial^2 F}{\partial \psi_0'^2} = 0$$

$$\varphi_0' = \varphi_0 / \Phi, \quad \psi_0' = \psi_0 \sqrt{\mathrm{Pe}^*}, \quad F' = F\sqrt{\mathrm{Pe}^*}, \quad \mathrm{Pe}^* = k\Phi / D \tag{3.7}$$

Здесь Φ — характерная разность потенциалов для наложенного течения, Pe^* — электрическое число Пекле.

В случае плоского ионного источника решение (3.7) согласно [8] имеет вид

$$F' = \frac{\psi_0'}{\varphi_0'} - \int_{-\infty}^{\infty} \xi \exp[-z(\xi)]\, d\xi \left[\varphi_0' \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-z(\xi)]\, d\xi \right]^{-1}$$

$$z = \frac{1}{2} \int_0^{\xi} F'(0, \psi_0')\, d\psi_0' - \frac{(\psi_0' - \xi)^2}{4\varphi_0'} \tag{3.8}$$

Отметим, что в отличие от решения в [8] для ионной струи, распространяющейся в однородном внешнем электрическом поле при пренебрежимо малых Re^*, решение (3.8) описывает более широкий круг задач (например, распространение струи, образованной линейным ионным источником с плотностью линейного заряда τ, совмещенным с гидродинамическим стоком интенсивностью $\dot{m} = -k\tau / 2\pi\varepsilon$ (см. п. 4), которые помещены в однородный поток и однородное наложенное поле; обтекание однородным потоком металлического цилиндра с линейным ионным источником вдоль образующей во внешнем электрическом поле при $k\mathbf{E}_0 = \mathbf{u}$, а также некоторые другие задачи, для которых $\mathbf{v}_0 = \mathrm{const}$).

Рассмотрим еще одну модификацию уравнений (3.4). Для этого приведем их к виду

$$\frac{\partial^2 V_*'}{\partial \varphi_0 \partial \psi_0} + b \frac{\partial V_*'}{\partial \psi_0} + \frac{\partial}{\partial \psi_0}\left(V_*' \frac{\partial V_*'}{\partial \psi_0} \right) - a V_*' \frac{\partial V_*'}{\partial \psi_0} = \tag{3.9}$$
$$= \frac{D}{k} \left[\frac{\partial^3 V_*'}{\partial \psi_0^3} - 2 \frac{\partial^2 V_*'}{\partial \psi_0^2} + \left(a^2 - \frac{\partial a}{\partial \psi_0} \right) \frac{\partial V_*'}{\partial \psi_0} \right]$$

Если рассматривать достаточно тонкие ионные струи, для которых изменение $|\mathbf{v}_0|$ поперек струи (вдоль координаты ψ_0) мало, то можно приближенно считать, что $|\mathbf{v}_0| = f(\varphi_0)$, $a = 0$, $b = b(\varphi_0)$. Аналогичное приближение имеет место в теории гидродинамического пограничного слоя, где пренебрегают изменением давления поперек слоя. В этом случае уравнение (3.9) упрощается и при симметричном распределении наложенных скоростей после интегрирования по ψ_0 принимает вид

$$\frac{\partial V_*'}{\partial \varphi_0} + b(\varphi_0) V_*' + V_*' \frac{\partial V_*'}{\partial \psi_0} - \frac{D}{k} \frac{\partial^2 V_*'}{\partial \psi_0^2} = 0 \tag{3.10}$$

В случае распространения струи, образованной источником заряженного аэрозоля, частицы которого совершают безынерционное движение при малых числах Рейнольдса и подчиняются закону сопротивления Стокса, в (3.10) можно опустить диффузионный член и решение будет иметь вид

$$\Omega\left(\frac{\Phi}{V_*'}, \int \Phi\, d\varphi_0 - \frac{\psi_0 \Phi}{V_*'} \right) = 0$$

$$\Phi = \exp\left(-\int b(\varphi_0)\, d\varphi_0 \right)$$

При $\Phi = 1$ получаем решение для аэрозольной струи, распространяющейся в однородном наложенном потоке ($a = 0$, $b = 0$)

$$\Omega(V_*', \varphi_0 V_*' - \psi_0) = 0$$

4. Квазигидравлическое приближение. Уравнения (1.5), (1.6) существенно упрощаются для ЭГД течений, в которых изменение плотности объемного заряда и обусловленного им электрического поля вдоль линий тока $\psi_c = \mathrm{const}$ много больше соответствующего изменения вдоль эквипотенциалей. К течениям такого типа можно отнести, например, движение заряженных частиц в ЭГД преобразователях с широкими каналами или коронный разряд с разрядным промежутком без ограничивающих диэлектрических стенок при относительно небольших скоростях газового потока. Диффузией заряда пренебрегаем.

Подобное приближение было введено в работе [7] для широких ЭГД каналов в случае однородного наложенного поля. В [9] произведен расчет ЭГД течения в трубе для некоторого осредненного по сечению трубы одномерного течения. Аналогичные задачи рассматриваются магнитной гидродинамикой при изучении квазиодномерных течений в трубках тока [10]. Близкий подход был развит в работах [11, 12] для расчета коронного разряда в неподвижном воздухе в случае разрядных промежутков произвольной конфигурации.

Предполагая, что в уравнениях (1.5), (1.6) можно пренебречь членами, которые содержат производные по ψ_0 и обусловлены влиянием собственного поля объемного заряда, получаем с учетом (1.7)

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_0}(qU') = 0, \qquad \frac{\partial U'}{\partial\varphi_0} = |\mathbf{v}_0|^{-2}\frac{k}{\varepsilon}q \tag{4.1}$$

К аналогичным уравнениям можно прийти, производя оценку членов в (1.5), (1.6) при условии $|\psi_0| / |\varphi_0| \gg 1$.

Из (4.1) следует, что в квазигидравлическом приближении картина линий тока определяется характером поля наложенной скорости и наличие объемного заряда приводит только к деформации эквипотенциалей. Переход к переменным φ_0, ψ_0 позволяет в этом случае получить уравнения, которые содержат лишь частные производные по одной переменной φ_0.

Интегрируя систему (4.1), находим

$$U'^2 = 2f_1(\psi_0)\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} |\mathbf{v}_0|^{-2} d\varphi_0 + f_2(\psi_0) \tag{4.2}$$

где f_1, f_2 — функции, определяемые из граничных условий; φ_1 — потенциал скорости на электроде-эмиттере.

Учитывая (1.8), перейдем от скорости к потенциалу

$$\varphi = \int_{\varphi_2}^{\varphi_0}\left(2f_1\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}|\mathbf{v}_0|^{-2}d\varphi_0 + f_2\right)^{1/2} d\varphi_0 + f_3(\psi_0) \tag{4.3}$$

Здесь φ_2 — потенциал скорости на электроде-коллекторе, $f_3 = \varphi_2$ определяется из граничных условий (φ_1, φ_2 в общем случае зависят от ψ_0).

Выражения для плотности объемного заряда и вольт-амперной характеристики на основании (4.1), (4.2) можно представить в виде

$$q = \frac{\varepsilon f_1(\psi_0)}{kU'}, \qquad I = -\int_{\psi_0^0}^{\psi_0^1} Hj_{\varphi_0}\, d\psi_0 = -\frac{\varepsilon}{k}\int_{\psi_0^0}^{\psi_0^1} f_1(\psi_0)\, d\psi_0 \tag{4.4}$$

Здесь ψ_0^0, ψ_0^1 — силовые линии, определяющие границы факела заряженных частиц в межэлектродном промежутке; $j_{\varphi_0} = Uq$ — составляющая плотности электрического тока; I — полный ток, протекающий в системе. Выбор отрицательного знака обоснован в п. 2.

Для определения неизвестных функций f_1, f_2, f_3 кроме φ_1 и φ_2 необходимо задать значение скорости U' или плотности объемного заряда на электроде-эмиттере.

В частном случае ЭГД течения, ограниченного объемным зарядом, скорость U' на электроде-эмиттере равна нулю. При этом

$$f_2 = 0, \qquad \varphi = \sqrt{2f_1} \int\limits_{\varphi_2} \left(\int\limits_{\varphi_0} |\mathbf{v}_0|^{-2} d\varphi_0 \right)^{1/2} d\varphi_0 + \varphi_2 \tag{4.5}$$

Из граничного условия для потенциала на электроде-эмиттере следует

$$f_1(\psi_0) = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \left[\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_\text{т}} \left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_\text{т}} |\mathbf{v}_0|^{-2} d\varphi_0 \right)^{1/2} d\varphi_0 \right]^{-2} \tag{4.6}$$

Подставляя (4.6) в (4.4), легко получить вольт-амперную характеристику и распределение плотности объемного заряда.

В качестве примера рассмотрим ЭГД течение, образованное ЭГД источником, расположенным между двумя бесконечными заземленными пластинами на расстоянии h от каждой из них. Предполагается, что ЭГД источник представляет собой бесконечно тонкую электрически заряженную нить с плотностью линейного заряда τ, из которой вытекают газ и заряженные частицы. В этом случае заряженные частицы будут перемещаться от источника к заземленным пластинам не только под воздействием электрического поля, но и вследствие конвективного переноса.

Используя конформное преобразование $\zeta = \exp(\pi z / 2h)$, можно показать, что комплексный потенциал рассматриваемого течения с фиктивной скоростью $\mathbf{v}_0$ имеет вид

$$W = -2mi \ln \frac{\exp(\pi z/h) - i}{1 - i} \tag{4.7}$$

где m — интенсивность гидродинамического источника, которая для упрощения предполагается равной $k\tau / 2\pi\varepsilon$.

Выражение для коэффициентов Лямэ следует из (1.4) и (4.7)

$$H^2 = 2h^2\pi^{-2}m^{-2}e^{2\eta}(2e^{2\eta} + 2e^{\eta}(\sin\xi - \cos\xi) + 1]^{-1} \tag{4.8}$$

$$\left(\eta = -\frac{\varphi_0}{2m}, \quad \xi = \frac{\psi_0}{2m}\right)$$

Полагая, что в малой окрестности ЭГД источника параметры течения не зависят от координаты ψ_0, можно определить на основании (4.4) значение постоянной f_1

$$I = -2\pi\varepsilon k^{-1} f_1 \tag{4.9}$$

где I — интенсивность ЭГД источника, равная количеству заряда, который протекает в единицу времени через цилиндрическую поверхность, охватывающую источник единичной длины.

Для определения f_2 найдем величину заряда, заключенного внутри указанной цилиндрической поверхности

$$Q = 2\pi \int qr\,dr = \frac{4\pi m\varepsilon}{k} \sqrt{f_2 + \frac{f_1}{2m} e^{2\eta}} \tag{4.10}$$

Переходя к пределу в выражении (4.10) при $\varphi_0 \to \infty$ $(r \to 0)$ и учитывая, что $\lim\limits_{r\to 0} Q = \tau$, получим $f_2 = 1/4$.

Подставляя (4.8) и найденные значения f_1 и f_2 в (4.2), находим окончательное решение

$$U'^2 = \frac{4h^2kI}{\pi^2 m\varepsilon}\left\{\frac{1}{4}\ln|2e^{2\eta}+2e^{\eta}(\sin\xi-\cos\xi)+1| - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\xi-\cos\xi}{2\sqrt{1+\cos 2\xi}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2e^{\eta}+\sin\xi-\cos\xi}{\sqrt{1+\cos 2\xi}}\right\} \qquad (4.11)$$

Используем полученное решение для оценки работы электрогидродинамического ионизатора. Пусть ЭГД источник помещен между пластинами конечной ширины L, причем $h/L \ll 1$. Краевой эффект не рассматриваем. В этом случае объемный заряд, который заключен между линиями тока, проходящими через источник и края пластины, будет покидать ионизатор, определяя его полезный ток I_1. Записывая уравнение указанных силовых линий на основании (4.7) с учетом геометрических характеристик канала, получим после подстановки в (4.4) выражение для полезного тока ионизатора

$$I_1 = \frac{kI}{\varepsilon}\left[1 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\exp(\pi L/4h)-1}{\exp(\pi L/4h)+1}\right] \qquad (4.12)$$

Автор признателен А. М. Мхитаряну за ценные советы и внимание к работе.

Поступило 10 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенов И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
3. Тиходеев Н. Н. Дифференциальное уравнение униполярной короны и его интегрирование в простейших случаях. Ж. техн. физ., 1955, т. 25, вып. 8.
4. Касьянов В. О. Основні рівняння электрогідродинаміки для ламінарного пограничного шару та ламінарної струмини. Доповіді АН УРСР, 1964, № 8.
5. Ушаков В. В. Распространение плоской свободной ионной струи в криволинейном электрическом поле. Сб. «Некоторые вопросы аэродинамики и электрогидродинамики», вып. 6, Киев, 1970.
6. Ватажин А. Б., Лихтер В. А., Шульгин В. И. Исследование электрогазодинамической струи за источником заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
7. Гурдин М., Баррето Э., Хан М. Характеристики электрогазодинамических генераторов. Прикладная магнитная гидродинамика. М., «Мир», 1965.
8. Мхитарян А. М., Ушаков В. В. Распространение плоской ионной струи в однородном электрическом поле. Сб. «Некоторые вопросы аэродинамики и электрогидродинамики», вып. 3, Киев, 1968.
9. Бортников Ю. С., Рубашов И. Б. Некоторые вопросы исследования системы уравнений электрогазодинамики. Магнитная гидродинамика, 1968, № 2.
10. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
11. Цырлин Л. Э. К теории униполярной короны. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, вып. 1.
12. Слышалов В. К. К приближенному решению о плотности тока в коронном разряде и ионизированном газе. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1968, № 3.