УДК 536.25

СТАЦИОНАРНАЯ КОНВЕКЦИЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ

И. Г. СЕМАКИН

(*Пермь*)

Рассмотрена стационарная тепловая конвекция неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом в плоском вертикальном канале, ограниченном параллельными плоскостями $x = \pm h$, поддерживаемыми при разных температурах.

Если вертикальный размер канала достаточно велик по сравнению с его шириной, то вдали от концов канала возникает плоскопараллельное конвективное течение следующей структуры:

$$v_x = v_y = 0, \quad v_z = v(x), \quad T = T(x), \quad p = p(z) \tag{1}$$

Здесь v_x, v_y, v_z — компоненты скорости, T — температура, p — конвективное давление; ось z направлена параллельно границам канала вертикально вверх, ось x перпендикулярна границам.

Распределения скорости, температуры и давления в стационарном движении находятся из уравнений конвекции в приближениях Буссинеска. С учетом (1) эти уравнения можно записать в виде

$$\frac{dp}{dz} = k\frac{d}{dz}\left(\left|\frac{dv}{dx}\right|^{n-1}\frac{dv}{dx}\right) + \rho g\beta T = A, \qquad \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \tag{2}$$

Здесь A — постоянная разделения переменных, ρ — средняя плотность, β — коэффициент теплового расширения, g — ускорение силы тяжести, k — коэффициент консистенции, n — показатель степени в реологическом уравнении. Все параметры среды считаются постоянными.

Границы канала предполагаются изотермическими

$$T = \pm\theta \qquad (x = \mp h) \tag{3}$$

(2θ — разность температур между плоскостями). Скорость на границах обращается в нуль; суммарный расход по сечению равен нулю (замкнутость конвективного потока). Отсюда имеем условия для скорости

$$v = 0, \qquad \int_{-h}^{h} v\,dx = 0 \qquad (x = \pm h) \tag{4}$$

Уравнения (2) с граничными условиями (3), (4) определяют стационарные профили скорости и температуры.

Перейдем к безразмерным переменным. С этой целью определим масштабы расстояния, скорости, давления и температуры соответственно в виде h, $(\rho g\beta\theta h^{n+1}/k)^{1/n}$, $\rho g\beta\theta h$, θ. Обозначая безразмерные скорость, температуру и давление соответственно через u, τ и q и сохраняя для безразмерных координат прежние обозначения, получим уравнения

$$\frac{dq}{dz} = \frac{d}{dx}\left(\left|\frac{du}{dx}\right|^{n-1}\frac{du}{dx}\right) + \tau = A', \qquad \frac{d^2\tau}{dx^2} = 0 \tag{5}$$

и граничные условия

$$u=0, \quad \tau=\pm 1, \quad \int_{-1}^{1} u(x)\,dx=0 \quad (x=\mp 1) \tag{6}$$

В рассматриваемом режиме течения температура распределена по сечению канала линейно

$$\tau=-x \tag{7}$$

Тогда для скорости получаем уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(\left|\frac{du}{dx}\right|^{n-1}\frac{du}{dx}\right)=x \tag{8}$$

(постоянная разделения переменных A' равна нулю в силу условия замкнутости потока). Интегрируя, получим

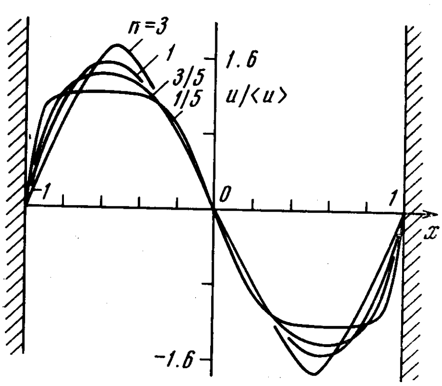
$$u(x)=\int_{0}^{x}\left|\frac{x^2}{2}+c\right|^{1/h}\operatorname{sign}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)dx \tag{9}$$

Постоянная c определяется из граничного условия для скорости (6). Для обычной ньютоновской жидкости ($n=1$) имеем [1]

$$u={}^1/_6(x^3-x) \tag{10}$$

В замкнутой форме профиль скорости может быть представлен лишь для дискретных значений $n=2,\ 1,\ {}^2/_3,\ {}^1/_2,\ {}^2/_5,\ {}^1/_3,\ldots$. Для других n требуется численное интегрирование.

На фиг. 1 приведены профили скорости конвективного течения для некоторых значений n, нормализованные относительно средней скорости. По оси ординат отложена величина $u/\langle u\rangle$. Здесь $\langle u\rangle$ — среднее по полуширине канала значение скорости. Профили на фиг. 1 можно рассматривать как распределения безразмерной скорости, для которых в качестве масштабных единиц выбраны значения $\langle v\rangle$. Очевидно, что для разных жидкостей этот масштаб будет разным. В случае $n<1$ (псевдопластик) профиль имеет хорошо выраженное плато и пограничный слой подобен получающемуся для среды Бингама [2]. С ростом n для дилатантной жидкости ($n>1$) распределения скорости приобретают все более острые экстремумы.



Фиг. 1

Интенсивность конвективного движения можно характеризовать средним по полуширине канала значением скорости, которое может быть представлено в виде

$$\langle v\rangle=\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} v\,dx=\left(\frac{\rho g\beta\theta}{k}h^{n+1}\right)^{1/n}\langle u\rangle \tag{11}$$

где средняя безразмерная скорость $\langle u\rangle$ зависит только от показателя n. Из (11) видно, что с увеличением разности температур скорость растет по закону $\theta^{1/n}$. Зависимость $\langle u\rangle$ от n представлена на фиг. 2.

Вычислим продольный поток тепла, переносимого плоскопараллельным конвективным движением. Этот поток равен (на единицу длины в направлении оси y)

$$Q=\rho c_p\int_{-h}^{h} vT\,dx \tag{12}$$

Здесь v, T — размерные скорость и температура, c_p — удельная теплоемкость. Вводя безразмерные величины, можно получить из (12)

$$Q = 2c_p \left(\frac{g\beta\rho^{n+1}\theta^{n+1}}{k} h^{2n+1} \right)^{1/n} f(n) \tag{13}$$

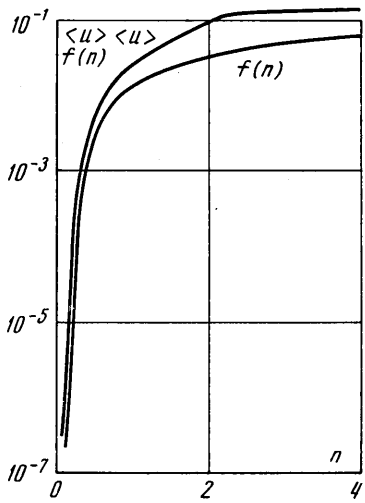
где функция

$$f(n) = \int_{-1}^{0} u\tau \, dx \tag{14}$$

зависит только от показателя n. По смыслу $f(n)$ есть средний по полуширине канала безразмерный тепловой поток. График функции $f(n)$ приведен на фиг. 2.

Введем понятие эффективной вязкости. Определим ее как вязкость такого ньютоновского течения (с безразмерным профилем (10)), у которого расход жидкости по половине канала равен расходу данного неньютоновского течения. Легко найти связь эффективной вязкости ν_* со средним значением v по половине канала

$$\nu_* = g\beta\theta h^2 / 24\langle v\rangle \tag{15}$$



Фиг. 2

В случае ньютоновского течения, очевидно, ν_* совпадает с кинематической вязкостью ν.

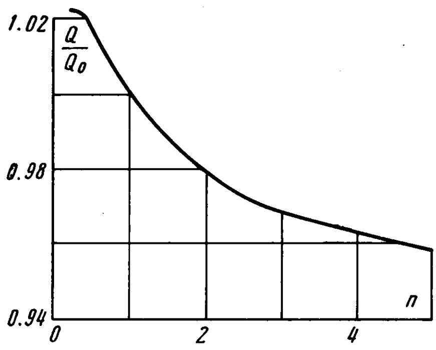
Можно сказать, что на фиг. 1 приведены профили скоростей конвективного течения различных неньютоновских жидкостей с одинаковыми значениями эффективной вязкости. Масштабы безразмерной скорости для таких течений одинаковы и равны $g\beta\theta h^2 / 24\nu_*$. Приведение конвективного течения неньютоновских жидкостей к такому виду позволяет при их сравнении избавиться от влияния всех прочих параметров, кроме n.

Интересно сравнить продольные теплопотоки различных неньютоновских жидкостей с одинаковыми значениями эффективной вязкости. Для этого составим отношение Q / Q_0, где Q_0 — тепловой поток ньютоновского течения с вязкостью, равной ν_*

$$Q_0 = \frac{2}{45} \frac{\rho c_p g\beta\theta^2 h^3}{\nu_*} \tag{16}$$

Используя формулы (11) — (16), получим

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{45}{24} \frac{f(n)}{\langle u\rangle} \tag{17}$$



Фиг. 3

Отношение Q / Q_0 в зависимости от n представлено на фиг. 3. Как виднó, в широком интервале изменения показателя n, отношение Q / Q_0 близко к единице. Таким образом, различные неньютоновские течения с одинаковой эффективной вязкостью приводят к весьма близким значениям продольного конвективного теплопотока.

Поступило 22 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного движения жидкости. Ж. техн. физ., 1953, т. 23, № 10.
2. Янг Вен-ей, Е Су-чень. Свободная конвекция пластика Bingham между двумя вертикальными пластинами. Trans. ASME, Сер. Теплопередача, Тр. Америк. о-ва инж. механ., 1965, т. 87, № 2.