

УДК 533.722

ВЛИЯНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ГАЗА НА СОПРОТИВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

А. А. КИРШ, И. Б. СТЕЧКИНА, Н. А. ФУКС

(Москва)

Приведены результаты экспериментального и теоретического исследования сопротивления в зависимости от числа Кнудсена для простейшей модели волокнистого фильтра — системы параллельных цилиндров, расположенных перпендикулярно потоку.

1. Комплексная скорость потока через решетку параллельных цилиндров, обтекаемых вязким потоком, перпендикулярным их осям, при малых числах Рейнольдса записывается в виде ряда [1]

$$\frac{w}{u_0} = a_0 [\ln(2\operatorname{sh} \zeta) + \ln(2\operatorname{sh} \zeta^*) - (\zeta + \zeta^*) \operatorname{cth} \zeta] + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \left[\frac{d^{2n-1} \operatorname{cth} \zeta}{d\zeta^{2n-1}} - (\zeta + \zeta^*) \frac{d^{2n} \operatorname{cth} \zeta}{d\zeta^{2n}} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \frac{d^{2n-1} \operatorname{cth} \zeta}{d\zeta^{2n-1}} \quad (1.1)$$

где $w = u_x - iu_y$ — комплексная скорость потока, u_0 — скорость потока на бесконечности, $\zeta = (\pi/2h)(x + iy)$ — комплексная переменная, $2h$ — расстояние между осями цилиндров. Коэффициенты a_{2n} , b_{2n} определяются из граничных условий на поверхности цилиндра и на бесконечности и выражаются в виде рядов по безразмерному параметру $t = \pi a / 2h$, a — радиус цилиндра.

С учетом скольжения на поверхности цилиндров при малых числах Кнудсена граничные условия для скорости потока имеют вид

$$\frac{u_\rho}{u_0} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{u_\theta}{u_0} \Big|_{\rho=1} = \tau K \frac{1}{u_0} \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = \\ = -4\tau a_0 K \sin \theta, \quad \left| \frac{u}{u_0} \right| \rightarrow 1 \quad (\rho \rightarrow \infty) \quad (1.2)$$

Здесь u_ρ , u_θ — радиальная и тангенциальная составляющие скорости потока, ρ , θ — безразмерные полярные координаты, $K = \lambda/a$ — число Кнудсена, λ — длина свободного пробега газовых молекул, τ — коэффициент порядка единицы. Для комплексной скорости граничные условия (1.2) в системе координат, в которой жидкость на бесконечности покоится, запишутся в виде

$$\frac{w}{u_0} \Big|_{|t|=t} = -2\tau a_0 K \left(\frac{t^2}{\zeta^2} - 1 \right) - 1, \quad |w| \rightarrow 0 \quad (|\zeta| \rightarrow \infty) \quad (1.3)$$

Из этих граничных условий найдем первые коэффициенты ряда (1.1). Для этого подставим в (1.1) $\zeta^* = t^2/\zeta$ (так как на поверхности цилиндра $\zeta\zeta^* = t^2$), разложим w в ряд Лорана по ζ и приравняем скорости на поверхности цилиндра (1.3). Из полученной системы алгебраических уравне-

ний для a_{2n} , b_{2n} найдем первые коэффициенты с точностью до членов порядка t^2

$$a_0^{-1} = -[2 \ln 2t - 1 - \frac{2}{3}t^2 - 2\tau K(1 - \frac{1}{3}t^2)]$$

$$b_2/a_0 = -t^2(1 - 2\tau K), \quad a_{2n}/a_0 = O(t^{4n}), \quad b_{2n}/a_0 = O(t^{2(2n-1)}) \quad (1.4)$$

Сила, действующая на единицу длины цилиндра, определяется из соотношения [1]

$$F = 8\mu_0 \mu u_0 \quad (1.5)$$

где μ — коэффициент динамической вязкости среды.

Обозначим безразмерную силу, действующую на единицу длины цилиндра, $F^* = F(\mu_0)^{-1}$ и, воспользовавшись (1.5) и (1.4), получим

$$4\pi / F^* = -\ln 2t + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}t^2 + \tau(1 - \frac{1}{3}t^2)K \quad (1.6)$$

или

$$1 / F^* = 1 / F_c^* + \tau / 4\pi(1 - \frac{1}{3}t^2)K \quad (1.7)$$

где F_c^* — безразмерная сила, действующая на единицу длины цилиндра в гидродинамическом режиме течения ($K = 0$).

Перепад давления на решетках связан с F^* очевидной формулой

$$\Delta p = F^* \mu_0 N_1 N_2 \quad (1.8)$$

где N_1 — число цилиндров, приходящихся на единицу ширины решетки, N_2 — число решеток.

2. Эксперименты проводились с модельным фильтром, который состоял из 24 решеток, изготовленных из золотой проволоки с гладкой поверхностью с диаметром $2a = 8.90 \pm 0.10$ мк. Параметры решеток следующие: число проволочек в решетке $n = 80$, шаг решетки $2h = 62.7$ мк, отклонение h от среднего менее 10%, длина каждой проволочки $l = 0.53$ см, площадь решетки $S = 0.265$ см². Расстояние между соседними решетками $2h_1 = 1.1$ мм. Как было показано экспериментально, при $h_1/h \geq 1$ ряды не оказывают взаимного гидродинамического влияния [2].

До $R \sim 0.4$ при $K = 0$ течение было строго автомодельным: $\Delta p / u_0 = \text{const}$, а при $R = 0.6$ величина $\Delta p / u_0$ возрастала на 4.7% (здесь R — число Рейнольдса).

В некоторых опытах поверхность проволочек покрывалась равномерным тонким слоем дибутилфталата (ДБФ), для этого туман ДБФ с радиусом частиц ~ 0.3 мк пропусклся через модельный фильтр с двух сторон. ДБФ хорошо смачивает золото.

Перепад давления в модельном фильтре измерялся при $\Delta p > 0.2$ торр с помощью U-образного дифманометра, заполненного ДБФ ($\gamma = 1.045$ г/см³) и катетометра, а при $\Delta p < 0.2$ торр — с помощью мембранного микроанометра «Atlas МММ». Опыты проводились в атмосфере углекислого газа и воздуха с осушкой и без осушки при фиксированных значениях массового расхода газа и R .

Профиль скорости в сечении, перпендикулярном осям проволочек, практически постоянен: оценка показывает, что, за исключением двух крайних, все проволочки испытывают одинаковое сопротивление [3]. Кроме того, сила сопротивления действует неравномерно по длине каждой проволочки, поэтому расчет F^* по формуле (1.8) дает среднее значение силы $\langle F^* \rangle$. Скорость потока при данном p рассчитывалась следующим образом: $u_0 = 760 Q / Sp$, где Q см³/сек — расход газа при нормальных условиях ($t = 23^\circ \text{C}$ и $p = 760$ торр), $p = p' + \frac{1}{2}\Delta p$ (торр) — абсолютное давление в середине модельного фильтра, p' — давление за фильтром.

В расчетах принималось, что при нормальных условиях $\mu = 1.84 \cdot 10^{-4}$ пз и $\lambda = 6.53 \cdot 10^{-6}$ см для воздуха, $\mu = 1.44 \cdot 10^{-4}$ пз и $\lambda = 5.11 \cdot 10^{-6}$ см для CO_2 .

Результаты измерений сопротивления фильтра в автомобильном режиме течения при различном давлении представлены на фиг. 1 в виде зависимости $\langle F^* \rangle^{-1}$ от p^{-1} (или от K). Точки 1—7 на фиг. 1 относятся к опытам с воздухом, точки 8—12 — к опытам с CO_2 , при числах Рейнольдса соответственно $(1.07 \cdot 10^{-3}), 4.98 \cdot 10^{-3}, 1.44 \cdot 10^{-2}, 2.69 \cdot 10^{-2}, 3.08 \cdot 10^{-2}, (4.74 \cdot 10^{-2}), 5.80 \cdot 10^{-2}, 4.15 \cdot 10^{-2}, (4.26 \cdot 10^{-2}), 4.62 \cdot 10^{-2}, (4.62 \cdot 10^{-2}), 4.92 \cdot 10^{-2}$.

Здесь в круглые скобки взяты данные опытов, в которых поверхность проволочек была покрыта ДБФ.

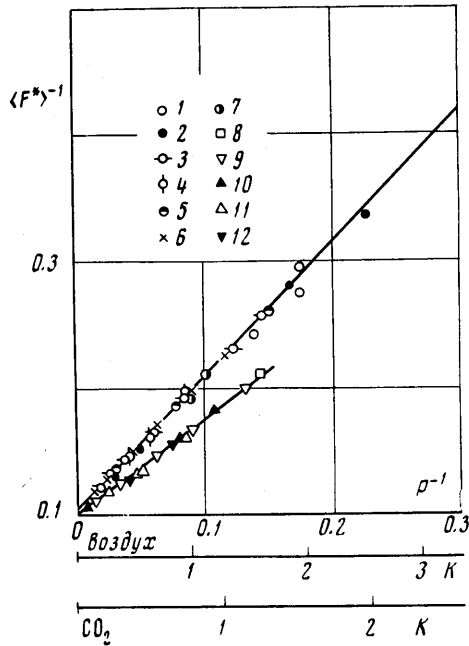
Прежде всего следует отметить, что при $p^{-1} = 0$ экспериментальное значение $\langle F^* \rangle$ для воздуха и CO_2 точно согласуется с F_0^* , вычисленным по формуле (1.6) при $K = 0$.

Далее из фиг. 1 видно, что полученные данные лежат на прямых линиях вплоть до больших значений K . Это обстоятельство дает возможность более точно определить поправку на скольжение. Из наклона этих прямых (1.7) было получено, что $\tau = 1.18$ для воздуха и $\tau = 1.12$ для CO_2 . Покрытие проволочек слоем ДБФ не повлияло на величину τ . В наших опытах, как и в опытах Милликена, с падающими каплями масла и с вращающимися коаксиальными цилиндрами поправка на скольжение для CO_2 оказалась чуть ниже, чем для воздуха [4]. Найденные значения τ весьма близки к теоретической величине $\tau = 1.15$, полученной рядом авторов для случая плоской поверхности и в предположении, что молекулы отражаются от нее диффузно [5].

Следует обратить внимание на то, что, хотя теория дает поправку на скольжение лишь при малых числах Кнудсена, тем не менее прямолинейный характер зависимости $\langle F^* \rangle^{-1}$ от p^{-1} сохраняется до весьма больших K , как в опытах с падающими каплями [4] или в опытах с системой капилляров микронного диаметра [6]. Во всех этих случаях течение характеризуется малыми числами Рейнольдса.

С увеличением R наблюдалось нарушение линейной зависимости $\langle F^* \rangle^{-1}$ от K , причем тем раньше, чем больше R . Был получен парадоксальный результат: при увеличении R от 0.2 до 1.4 влияние скольжения возрастает, т. е. при $K = \text{const}$ величина $\Delta p / u_0$ уменьшается.

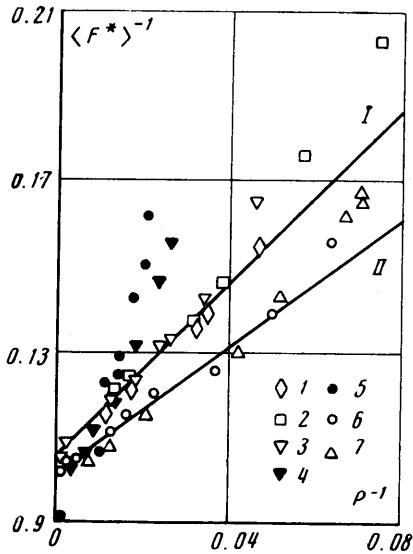
На фиг. 2 приведены данные опытов 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 при следующих значениях R : 0.148, (0.150), 0.333, 0.88, 1.39, (0.177), 0.190. Прямые I и II соответствуют данным, показанным на фиг. 1. Точки 1—5 соответствуют опытам с воздухом, 6 и 7 — с CO_2 . Отклонение точек от прямой происходит при таких значениях p , когда линейная скорость достигает 10 м/сек. Однако этот эффект не связан с характером взаимодействия молекул газа с поверхностью проволоки. Дополнительные опыты, которые были проведены с фильтром ФПП-15, состоящим из одинаковых ультратонких волокон с диаметром менее 1 мк, при больших скоростях потока (но малых числах R) показали, что линейная зависимость $\langle F^* \rangle^{-1}$ от K сохраняется вплоть до $u_0 = 80$ м/сек и $K \sim 10$; при этом число Рейнольдса оставалось малым



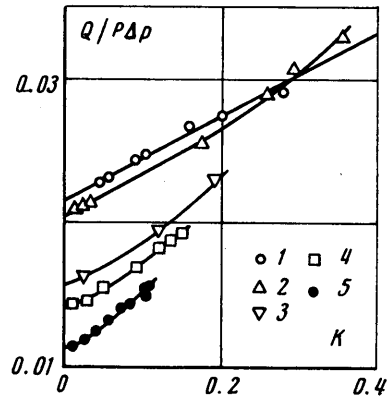
Фиг. 1

($R < 5 \cdot 10^{-2}$). Кроме того, были проведены опыты при таких же высоких скоростях потока и больших числах R с фильтром, изготовленным из медных проволок с $2a = 28 \text{ мк}$. Полученные данные приведены на фиг. 3. Точки 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют следующим значениям R : 0.105, 0.50, 1.68, 2.61 и 4.45. Из фиг. 3 видно, что с ростом R при $K = 0$ обратная величина сопротивления падает. Кроме того, увеличивается влияние скольжения на сопротивление фильтра, как и в случае данных, приведенных на фиг. 2 и относящихся к повышенным числам Рейнольдса.

В заключение укажем работу Коудевилля и др. [7] — единственную экспериментальную работу,



Фиг. 2



Фиг. 3

известную авторам, где опыты по сопротивлению решеток в зависимости от K проводились при малых числах M и K . К сожалению, результаты этой работы нельзя использовать для сравнения, поскольку измерения сопротивления проводились балансным методом: решетка была полупроницаема для потока, т. е. с увеличением скорости течения она все в большей степени обтекалась как единое препятствие. По этой же причине, результаты, полученные в [7] и при $K = 0$, противоречат теории.

Авторы благодарят Б. И. Огородникова за помощь, оказанную на отдельных этапах работы.

Поступило 4 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Mijagi T. Viscous flow at low Reynolds numbers past an infinite row of equal circular cylinders. J. Phys. Soc. Japan, 1958, vol. 13, № 5, 493—496.
2. Kirsch A. A., Fuchs N. A. Studies on fibrous aerosol filters-II, Pressure drop in systems of parallel cylinders. Ann. Occupat. Hyg., 1967, vol. 10, № 1, 23—30.
3. Kirsch A. A., Fuchs N. A. The fluid flow in a system of parallel cylinders perpendicular to the flow direction at small Reynolds numbers. J. Phys. Soc. Japan, 1967, vol. 22, № 5, 1251—1255.
4. Millikan R. A. Coefficients of slip in gages and the law of reflection of molecules from the surface of solids and liquids. Phys. Rev., 1923, vol. 21, № 3, pp. 217—238.
5. Albertoni S., Cercignani C., Gotusso L. Numerical evaluation of the slip coefficient. Phys. Fluids, 1963, 6, № 7, 993—996.
6. Кирш А. А., Спурны К. Р. Течение газа через нуклепорные фильтры. ПМТФ, 1969, № 3, 109—112.
7. Coudeville H., Trepaud P., Brun E. A. Drag measurements in slip and transition flow. Rarefied Gas Dynamics. 4th symposium, 1965, vol. 1, p. 444.