№ 4 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1972

УДК 533.7

УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА В α, u-ПРЕДСТАВЛЕНИИ

А. Я. ЭНДЕР, И. А. ЭНДЕР

(*Ленинград*)

Предлагается, как в [1, 2] рассматривать функцию распределения в виде набора всевозможных максвелловских распределений с произвольными температурами и средними скоростями, причем каждое максвелловское распределение берется со своим весом $\varphi(\alpha,\mathbf{u})$. Для этой весовой функции строится уравнение, эквивалентное уравнению Больцмана.

Рассматриваются случаи одномерных, двумерных и произвольных течений. Показано, что в α, $\mathbf{u}$ — представлении для построения ядра столкновительного оператора в произвольном случае достаточно знать соответствующее ядро для одномерной задачи.

1. В [1, 2] предлагалось для упрощения интеграла столкновений в уравнении Больцмана представлять функцию распределения в виде набора всевозможных максвелловских распределений.

В [2] подробно изучен случай, когда функция распределения однородна в пространстве и зависит от модуля скорости (сферически симметрична). При этом проводилось разложение по максвелловским распределениям со всевозможными температурами и с нулевыми средними скоростями.

Для произвольной функции распределения нельзя ограничиться разложением только по разнотемпературным максвелловским распределениям, а нужно использовать более общее разложение

$$f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty} M(\alpha,\mathbf{u},\mathbf{v})\varphi(\alpha,\mathbf{u},\mathbf{r},t)\,d\alpha\,d\mathbf{u} \tag{1.1}$$

$$M(\alpha,\ \mathbf{u},\ \mathbf{v}) = (\alpha/\pi)^{3/2}\exp\left[-\alpha(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2\right],\qquad \alpha = m/2kT$$

Здесь $\mathbf{u}$ — средняя скорость максвелловского распределения, $\varphi(\alpha,\ \mathbf{u},\ \mathbf{r},\ t)$ — вес соответствующего максвелловского распределения. Такое разложение впервые встречается в [3].

Заметим, что представление (1.1) неоднозначно. Одной и той же функции f в $\mathbf{v}$ — представлении может соответствовать несколько функций φ в α, $\mathbf{u}$ — представлении. Действительно, функции, по которым производится разложение, сами могут быть переразложены по другим максвелловским распределениям. Так, функцию $M(\alpha_0,\ \mathbf{u}_0,\ \mathbf{v})$ можно разложить по максвелловским распределениям с более низкой температурой ($\alpha_1 \geqslant \alpha_0$). В этом случае

$$\varphi(\alpha,\ \mathbf{u}) = (\alpha'/\pi)^{3/2}\exp\left(-\alpha'(\mathbf{u}_0-\mathbf{u})^2\right)\delta(\alpha-\alpha_1)$$

$$\alpha' = \alpha\alpha_0(\alpha-\alpha_0)^{-1}$$

Если $\alpha_1\to\alpha_0$, то $\varphi(\alpha,\ \mathbf{u})\to\delta(\alpha-\alpha_0)\delta(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)$. Если $\alpha_1\to\infty$, то $\alpha'\to\alpha_0$, а базисная функция $M(\alpha,\ \mathbf{v},\ \mathbf{u})\to\delta(\mathbf{v}-\mathbf{u})$. При этом функция в α, $\mathbf{u}$-представлении эквивалентна своему $\mathbf{v}$-представлению.

Ниже будет показано, как, пользуясь свойством симметрии функции распределения, можно выбрать вполне определенное ее представление в α, $\mathbf{u}$ — пространстве.

Пусть в какой-то момент времени функция распределения представлена в виде (1.1). Подставляя ее в правую часть уравнения Больцмана

$$\frac{df}{dt}=J(f,f') \tag{1.2}$$

и меняя порядок интегрирования, можно перейти к промежуточному представлению

$$\frac{df(\mathbf{v},\mathbf{r},t)}{dt}=\int\int\varphi(W_1,\mathbf{r},t)\varphi(W_2,\mathbf{r},t)J^M(\mathbf{v},W_1,W_2)\,dW_1\,dW_2 \tag{1.3}$$

Здесь использовано обозначение W для набора чисел α, u_x, u_y, u_z; $J^M(\mathbf{v}, W_1, W_2)$ — интеграл столкновений, определяющий изменение числа частиц с функцией распределения $M(W_1, \mathbf{v})$ за счет их столкновений с частицами с функцией распределения $M(W_2, \mathbf{v})$. Интегрирование в (1.3) распространяется по α от 0 до ∞ и по каждой компоненте вектора $\mathbf{u}$ от $-\infty$ до $+\infty$.

Отметим, что для газа одного сорта уравнение (1.3) можно записать в более симметричном виде

$$\frac{df(\mathbf{v},\mathbf{r},t)}{dt}=\frac{1}{2}\int\int\varphi(W_1,\mathbf{r},t)\varphi(W_2,\mathbf{r},t)J_s^M(\mathbf{v},W_1,W_2)\,dW_1\,dW_2 \tag{1.4}$$

$$J_s^M(\mathbf{v}, W_1, W_2) = J^M(\mathbf{v}, W_1, W_2) + J^M(\mathbf{v}, W_2, W_1)$$

Пользуясь симметрией подынтегрального выражения в (1.4) относительно перестановки $W_1 \rightleftarrows W_3$, можно получить

$$\frac{df(\mathbf{v})}{dt}=\int\int_{W_2\geqslant W_1}\varphi(W_1)\varphi(W_2)J_s^M(\mathbf{v},W_1,W_2)\,dW_1\,dW_2 \tag{1.5}$$

Здесь и далее для краткости аргументы $\mathbf{r}$ и t в функциях распределения будем опускать. В (1.5) неравенство $W_2 \geqslant W_1$ означает

$$\alpha_2\geqslant\alpha_1,\qquad u_{2x}\geqslant u_{1x},\qquad u_{2y}\geqslant u_{1y},\qquad u_{2z}\geqslant u_{1z}$$

Допустим теперь существование такого дифференциального оператора $D\varphi/Dt$ и такой функции $A(W, W_1, W_2)$, что справедливы следующие равенства:

$$\frac{df}{dt}=\int M(W,\mathbf{v})\frac{D\varphi(W)}{Dt}\,dW \tag{1.6}$$

$$J^M(\mathbf{v},W_1,W_2)=\int A(W,W_1,W_2)M(W,\mathbf{v})\,dW \tag{1.7}$$

Тогда уравнение Больцмана (1.3) принимает вид

$$\int M(W,\mathbf{v})\left(\frac{D\varphi(W)}{Dt}-\int\int A(W,W_1,W_2)\varphi(W_1)\varphi(W_2)\,dW_1\,dW_2\right)dW=0 \tag{1.8}$$

Уравнением Больцмана в α, $\mathbf{u}$ — представлении будем называть уравнение

$$\frac{D\varphi(W)}{Dt}-\int\int A(W,W_1,W_2)\varphi(W_1)\varphi(W_2)\,dW_1\,dW_2=0 \tag{1.9}$$

Если функция $\varphi(W)$ удовлетворяет уравнению (1.9), то построенная по ней с использованием (1.1) функция $f(\mathbf{v})$ есть решение уравнения Больцмана (1.2).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $D\varphi / Dt$ имеет вид

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}} - \frac{1}{2\alpha}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{u}\, \partial \mathbf{r}} \tag{1.10}$$

Здесь $\mathbf{F}$ — внешняя сила, а

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{u}\, \partial \mathbf{r}} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_x\, \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_y\, \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_z\, \partial z} \tag{1.11}$$

При этом функция $\varphi(W)$ должна удовлетворять следующим условиям при $u \to \pm\infty$:

$$M(W, \mathbf{v})\varphi(W) \to 0 \qquad (u \to \pm\infty)$$

Основная задача при написании уравнения Больцмана в α, $\mathbf{u}$-пространстве сводится к построению ядра столкновительного оператора $A(W, W_1, W_2)$.

2. При построении ядра существенными оказываются некоторые общие свойства столкновительного интеграла от двух максвелловских распределений $J^M(\mathbf{v}, W_1, W_2)$, не зависящие от природы сталкивающихся частиц. Во-первых, функция $J^M(\mathbf{v}, W_1, W_2)$ для произвольных $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ является осесимметричной в пространстве скоростей относительно прямой, проходящей через точки $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. В произвольной системе отсчета это свойство может быть записано в виде

$$J^M(\mathbf{v}, W_1, W_2) = J_0^M[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)\mathbf{e}_0,\ |(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*) \times \mathbf{e}_0|,\ W_1, W_2] \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{u}_*$ — некоторая точка на прямой $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2$

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{u}_0 |\mathbf{u}_0|^{-1}, \qquad \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \tag{2.2}$$

В дальнейшем удобно в качестве $\mathbf{u}_*$ выбирать

$$\mathbf{u}_* = (\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2)(\alpha_1 + \alpha_2)^{-1} \tag{2.3}$$

Существование такой симметрии позволяет построить ядро, стандартное для целого класса задач.

Во-вторых, функция J_0^M не зависит отдельно от $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, а зависит только от разности $\mathbf{u}_0$, т. е.

$$J^M(\mathbf{v}, W_1, W_2) = J_0^M[(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)\mathbf{e}_0,\ |(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*) \times \mathbf{e}_0|,\ \alpha_1, \alpha_2, \mathbf{u}_0] \tag{2.4}$$

Остановимся более подробно на случае одномерного течения газа (например, плоская ударная волна). В этой задаче в пространстве скоростей функция распределения обладает такой же симметрией как и интеграл столкновений от двух «сдвинутых» максвелловских распределений, т. е. $f(\mathbf{v}) = f(v_x, v_\rho)$, где v_x — составляющая скорости вдоль направления течения, а $v_\rho = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$. Уравнение Больцмана в этом случае при отсутствии внешних сил имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} = J(f, f') \tag{2.5}$$

Если в сферически симметричном случае [2] разложение функции распределения проводилось по максвелловским распределениям с нулевыми средними скоростями

$$f(\mathbf{v}) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} \varphi(\alpha)\, d\alpha \tag{2.6}$$

то теперь естественно разложить функцию распределения по максвелловским распределениям со средними скоростями, лежащими только на оси v_x:

$$f(v_x, v_\rho)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}\exp-\alpha[(v_x-u_x)^2+v_\rho^2)]\varphi(\alpha,u_x)\,d\alpha\,du_x \tag{2.7}$$

Покажем, что равенство (2.7) можно свести к дважды повторенному преобразованию Лапласа, т. е. преобразование (2.7) взаимно однозначно. Введем обозначения

$$\psi(s, v_x)=f(v_x, v_\rho)\qquad (s=v_\rho^2) \tag{2.8}$$

$$b(\alpha, v_x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\alpha(v_x-u_x)^2}\varphi(\alpha,u_x)\,du_x \tag{2.9}$$

В этих обозначениях из (2.7) получим

$$\psi(s, v_x)=\int_0^\infty e^{-\alpha s}b(\alpha, v_x)\,d\alpha \tag{2.10}$$

Равенство (2.10) — это преобразование Лапласа (v_x — параметр). Если обозначить

$$c(\alpha,\ p)=e^{\alpha v_x^2}b(\alpha,\ v_x),\qquad p=2\alpha v_x \tag{2.11}$$

$$d(\alpha,\ u_x)=(\alpha/\pi)^{3/2}e^{-\alpha u_x^2}\varphi(\alpha,\ u_x) \tag{2.12}$$

то из (2.9) получим

$$c(\alpha, p)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{pu_x}d(\alpha,u_x)\,du_x \tag{2.13}$$

Последнее равенство представляет собой двустороннее преобразование Лапласа от переменной u_x к p.

По формулам обращения для одностороннего и двустороннего преобразований Лапласа из (2.10) и (2.13) имеем

$$b(\alpha, v_x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{\alpha s}\psi(s, v_x)\,ds \tag{2.14}$$

$$d(\alpha, u_x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}e^{-pu_x}c(\alpha,p)\,dp \tag{2.15}$$

Равенство (2.15) справедливо в некоторой полосе сходимости $\gamma\leqslant\operatorname{Re}p\leqslant\beta$ [4]. В данном случае из (2.12) следует, что если $\varphi(\alpha,\ u_x)$ растет при $u_x\to\pm\infty$ не быстрее чем $\exp(\alpha u_x^2)$, то полоса сходимости распространяется от $-\infty$ до $+\infty$. Используя формулы обращения (2.14) и (2.15) и обозначения (2.11) и (2.12), получим

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}e^{-\alpha u^2}\varphi(\alpha,u_x)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\sigma_2-i\infty}^{\sigma_2+i\infty}\exp(-2\alpha v_x u_x+\alpha v_x^2)\left(\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}e^{\alpha v_\rho^2}\psi(v_\rho, v_x)2v_\rho\,dv_\rho\right)2\alpha\,dv_x$$

Окончательно имеем следующую формулу обращения преобразования (2.7):

$$\varphi(\alpha, u_x) = -(\alpha\pi)^{-1/2} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \exp[\alpha(v_\rho^2 + (v_x - u_x)^2)] f(v_x, v_\rho) v_\rho \, dv_\rho \, dv_x \quad (2.16)$$

Подставляя (2.7) в правую часть уравнения Больцмана (2.5), можно перейти к промежуточному представлению

$$\frac{df(\mathbf{v})}{dt} = \int\int \varphi(w_1)\varphi(w_2) J^M(\mathbf{v}, w_1, w_2)\, dw_1, dw_2 \quad (2.17)$$

В отличие от (1.3) здесь w_i соответствует паре чисел α_i, u_{x_i} $(i = 1{,}2)$.

Чтобы в рассматриваемом случае получить α, $\mathbf{u}$ — представление уравнения Больцмана, нужно обе части уравнения (2.17) разложить по максвелловским распределениям, сдвинутым только вдоль оси v_x. Поскольку в правую часть (2.17) зависимость от $\mathbf{v}$ входит через функцию $J^M(\mathbf{v}, w_1, w_2)$, то и ее необходимо разложить таким же образом, т. е.

$$J^M(\mathbf{v}, w_1, w_2) = \int\int (\alpha/\pi)^{3/2} \exp[-\alpha(v_\rho^2 + (v_x - u_x)^2)] A(w, w_1, w_2)\, dw \quad (2.18)$$

Такое разложение возможно, так как функция $J^M(\mathbf{v}, w_1, w_2)$, как это отмечалось выше (2.1), является осесимметричной относительно оси v_x

$$J^M(\mathbf{v}, w_1, w_2) = J_0^M(v_x', v_\rho, \alpha_1, \alpha_2, u_0), \qquad v_x' = v_x - u^* \quad (2.19)$$

Поэтому (2.18) совпадает с (2.7), если в последнем положить

$$f(v_x, v_\rho) = J_0^M(v_x', v_\rho, \alpha_1, \alpha_2, u_0), \quad \varphi(w) = A_0(\alpha, u_x - u_*, \alpha_1, \alpha_2, u_0)$$

Применяя к (2.18) формулу обращения (2.16), имеем

$$A_0(\alpha, u_x - u_*, \alpha_1, \alpha_2, u_0) = - \quad (2.20)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \int\limits_{\sigma_2 - i\infty}^{\sigma_2 + i\infty} \exp[\alpha(v_\rho^2 + (v_x - u_x)^2)] J_0^M(v'_x, v_\rho, \alpha_1, \alpha_2, u_0) v_\rho \, dv_\rho \, dv_x$$

Подставляя (2.18) в (2.17) и пользуясь однозначностью преобразования Лапласа, получим α, $\mathbf{u}$ — представление уравнения Больцмана для одномерных задач

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_x \partial x} = \int\int A_0(\alpha, u - u_*, \alpha_1, \alpha_2, u_0)\varphi(w_1)\varphi(w_2)\, dw_1\, dw_2 \quad (2.21)$$

Напомним, что для сферически симметричного случая требование, чтобы функция распределения в начальный момент была разложима по максвелловским распределениям с нулевыми средними скоростями, позволяло в силу сферической симметрии интеграла столкновений сохранить это свойство разложимости для произвольного момента времени.

Для рассматриваемого здесь случая из-за осевой симметрии интеграла столкновений разложимость функции распределения в начальный момент времени по максвелловским распределениям, сдвинутым только по оси симметрии, приводит к сохранению этого свойства для любого момента времени.

3. Для ряда двумерных течений (например, течение Пуазейля, обтекание тела вращения под нулевым углом атаки и т. д.) уравнение Больцмана в $\mathbf{v}$-пространстве можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = J(f, f') \quad (3.1)$$

Здесь (x, y) — плоскость симметрии течения. В данном случае функция распределения зависит от трех составляющих вектора скорости, но она обладает следующим свойством четности:

$$f(v_x, v_y, v_z) = f(v_x, v_y, -v_z) \tag{3.2}$$

Поэтому разложим функцию распределения по максвелловским распределениям, сдвинутым в плоскости симметрии, т. е.

$$f(v_x, v_y, v_z) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\alpha, u_x, u_y, \mathbf{v}) \varphi(\alpha, u_x, u_y) du_x du_y d\alpha \tag{3.3}$$

$$M(\alpha, u_x, u_y, v) = (\alpha / \pi)^{3/2} \exp[-\alpha((v_x - u_x)^2 + (v_y - u_y)^2 + v_z^2)]$$

Равенство (3.3) аналогично тому, как это делается в п. 2, можно свести к трем преобразованиям Лапласа. Поэтому можно построить обратное преобразование, с помощью которого по функции $f(\mathbf{v})$ однозначно находится $\varphi(\alpha, u_x, u_y)$.

При подстановке (3.3) в (3.1) снова легко перейти к промежуточному представлению, которое отличается от (2.17) только тем, что $J^M(\mathbf{v}, W)$ представляет собой интеграл столкновений от двух максвелловских распределений со средними скоростями, лежащими в плоскости $u_x u_y$. (Здесь W — набор чисел α, u_x, u_y). Каждый такой интеграл является осесимметричной функцией в пространстве скоростей относительно прямой $u_1 u_2$ и поэтому в исходной системе координат обладает следующим свойством:

$$J^M(v_x, v_y, v_z, W_1, W_2) = J^M(v_x, v_y, -v_z, W_1, W_2) \tag{3.4}$$

Для перехода к α, $\mathbf{u}$ — представлению необходимо построить следующее разложение:

$$J^M(v_x, v_y, v_z, W_1, W_2) =$$
$$= \int\int \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \exp(-\alpha[(v_x - u_x)^2 + (v_y - u_z)^2 + v_z^2]) A(W, W_1, W_2) dW \tag{3.5}$$

Это представление по виду совпадает с (3.3), и поэтому ядро A строится однозначно. Легко показать, что равенство (3.5) удовлетворяется, если

$$A(W, W_1, W_2) = \delta[(\mathbf{u} - \mathbf{u}_*) \times e_0] A(\alpha, (\mathbf{u} - \mathbf{u}_*) e_0, \alpha_1, \alpha_2, \mathbf{u}_0 \cdot e_0) \tag{3.6}$$

Здесь $A_0(\alpha, u_x - u_*, \alpha_1, \alpha_2, u_0)$ — ядро осесимметричной задачи, определяющееся по формуле (2.20). В формуле (3.6) δ-функция указывает на то, что вектор $\mathbf{u} - \mathbf{u}_*$ выбирается параллельным вектору $\mathbf{u}_0$.

Таким образом, построенное для одномерных задач осесимметричное ядро можно использовать и в случае двумерных течений. Окончательно, получаем α, $\mathbf{u}$ — представление уравнения Больцмана для двумерных задач в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial u_x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial u_y} \right) =$$
$$= \int\int A(W, W_1, W_2) \varphi(W_1) \varphi(W_2) dW_1 dW_2 \tag{3.7}$$

Здесь $A(W, W_1, W_2)$ имеет вид (3.6). Во всех рассматриваемых выше задачах со сферической, осевой или плоской симметрией, используя обращение преобразования Лапласа, можно в начальный момент по заданной функции f построить φ. Если функция распределения не обладает никаким типом симметрии, то разложение по максвелловским распределениям необходимо проводить в четырехмерном α, $\mathbf{u}$-пространстве. Как уже отмечалось, такое разложение неоднозначно. Поэтому в общем случае в выборе функции φ в начальный момент остается некоторый произвол.

Если вид φ в начальный момент выбран, то дальнейшая эволюция функции φ подчиняется уравнению (1.9). Описанные выше общие свойства интеграла столкновений $J^M(\mathbf{v}, W_1, W_2)$ (2.1), (2.3) позволяют выбрать ядро $A(W, W_1, W_2)$ в той же форме (3.6), в какой оно было получено для двумерной задачи с той разницей, что векторы $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ в (3.6) и (2.4) являются трехмерными. Это связано с тем, что в данном случае ядро характеризует взаимодействие двух максвелловских распределений с совершенно произвольными средними скоростями $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$.

Если в α, $\mathbf{u}$ — представление уравнения Больцмана (1.9) подставить ядро в форме (3.6) и перейти к переменным интегрирования $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_*$, то получим

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \int_0^\infty \int_0^\infty \iint_{-\infty}^{+\infty} \delta[(\mathbf{u}-\mathbf{u}_*)\times \mathbf{l}_0] A_0(\alpha, (\mathbf{u}-\mathbf{u}_*)\mathbf{l}_0, \alpha_1, \alpha_2, \mathbf{u}_0\mathbf{l}_0) \times$$
$$\times \varphi\left(\alpha_1, \mathbf{u}_* + \frac{\alpha_2 \mathbf{u}_0}{\alpha_1+\alpha_2}\right) \varphi\left(\alpha_2, \mathbf{u}_* - \frac{\alpha_1 \mathbf{u}_0}{\alpha_1+\alpha_2}\right) d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\mathbf{u}_*\, d\mathbf{u}_0 \tag{3.8}$$

Легко показать, что якобиан перехода к новым переменным равен единице. В (3.8) можно, используя фильтрующее свойство δ-функции, выполнить интегрирование по любым двум составляющим вектора $\mathbf{u}_0$ и тем самым от восьмикратного интеграла перейти к шестикратному.

Следует отметить, что если функция распределения в $\mathbf{v}$-пространстве обладает одним из рассмотренных выше типов симметрии, то соответствующие уравнения (2.21), (3.7) и уравнение для сферически симметричной задачи из [2] автоматически получаются из уравнения (3.8). При этом число переменных интегрирования равно двум, если функция распределения обладает сферической симметрией в пространстве скоростей, четырем для осесимметричной функции распределения и пяти при симметрии относительно плоскости. При переходе к линейным задачам соответственно получаем одну, две и три переменных интегрирования.

Таким образом показано, что ядро столкновительного оператора всегда можно выразить через ядро одномерной задачи A_0. Построение A_0 естественно разбивается на два этапа — на первом вычисляется интеграл столкновений J_0^M в $\mathbf{v}$-пространстве, а на втором с помощью (2.20) строится разложение этой функции по максвелловским распределениям. Иначе говоря, ядро A_0 получается путем некоторого интегрального преобразования из сечения рассеяния.

Одна из особенностей описанного выше представления уравнения Больцмана состоит в том, что оно замыкается на уровне функции φ. Более того, с помощью функции φ без промежуточного перехода в $\mathbf{v}$-пространство могут быть выражены все гидродинамические моменты и путем интегрирования α, $\mathbf{u}$-представления уравнения Больцмана с соответствующими степенями $\mathbf{u}$ и $1/\alpha$ могут быть получены уравнения гидродинамики.

Поступило 12 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Эндер И. А., Эндер А. Я. Об одном представлении уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 1, стр. 61.
2. Эндер И. А., Эндер А. Я. Об одном методе решения уравнения Больцмана при сильных отклонениях от максвелловского распределения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1, стр. 12.
3. Weitzsch F. Ein neuer Ansatz für die Behandlung gasdynamischer Probleme bei starken Adweichungen vom thermodynamischen Gleichungewicht. Ann Physik, 1961, Bd 7, Nr 7/8, S. 403—417.
4. Ван-дер-Поль Б., Бреммер Х. Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. М., Изд-во иностр. лит., 1952.