

УДК 533.6.011.5:518.5

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НЕРАСЧЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

М. Я. ИВАНОВ, А. Н. КРАЙКО, В. П. НАЗАРОВ

(Москва)

Приведены результаты исследования сверхзвуковых струй идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа, истекающих в пространство с пониженным давлением, в случаях, когда поперечное сечение струи на срезе сопла отлично от кругового. В основе исследования лежит численное интегрирование уравнений пространственного сверхзвукового течения при помощи разностной схемы «сквозного» счета, позволяющей проводить расчет течения без выделения ударных волн, образование которых характерно для рассматриваемой задачи. Выявлены закономерности нерасчетного истечения пространственных струй из сопла с эллиптическим и почти прямоугольным выходным сечением.

К настоящему времени развиты весьма эффективные и точные методы, которые позволили рассчитать и провести анализ осесимметричных струй в широком диапазоне определяющих параметров (степени нерасчетности, числа Маха в начальном сечении, угла раскрытия сопла и т. п.). Достаточно полное представление о методах, развитых для расчета осесимметричных струй, и о полученных этими методами результатах дают, например, недавно вышедшие работы [1, 2], которые подытоживают исследования, проводившиеся в указанном направлении. В противоположность двумерному случаю численный анализ пространственных струй еще не получил столь же широкого распространения, что можно объяснить не только увеличением размерности задачи, но и наличием в потоке поверхностей разрыва весьма сложной формы. По-видимому, в силу именно этих причин к настоящему времени опубликованы результаты только двух исследований [3, 4], авторы которых на основе различных подходов (метода характеристик в [3] и разностной схемы типа схемы Лакса-Вендрова в [4]) рассмотрели ряд задач взаимодействия осесимметричных сверхзвуковых струй друг с другом и с плоскостью. Авторам не известны работы, посвященные численному исследованию струй в случаях, когда пространственный характер течения обусловлен формой начального сечения, т. е. отличием последнего от круга.

1. Рассмотрим пространственную струю идеального газа, истекающего в пространство с заданным постоянным давлением p_e в случае, когда проекция u вектора скорости газа на ось x цилиндрической системы координат $x\varphi$ во всей исследуемой области превышает скорость звука a . Пусть p — давление, ρ — плотность, q — модуль, а v и w — радиальная и окружная составляющие вектора скорости. Ограничимся течением совершенного газа с постоянными теплоемкостями и показателем адиабаты κ и пусть полная энтальпия потока на срезе сопла (а следовательно, и во всем потоке) постоянна.

Исходными уравнениями при построении разностной схемы, использованной ниже, служат интегральные законы сохранения, которые формулируются следующим образом. Возьмем на произвольной плоскости $x = \text{const}$ некоторый замкнутый контур Γ , ограничивающий площадку S . Контур Γ и площадку S будем считать известными функциями x . При этом для определения закона, описывающего их деформацию, достаточно задать лежащий в плоскости $x = \text{const}$ вектор $\xi = dn/dx$, где dn — проекция смещения Γ на свою внешнюю нормаль. В каждой точке Γ вектор ξ полностью определяется проекциями ξ^r и ξ^φ на оси r и φ .

С использованием введенных обозначений указанные выше интегральные законы, эквивалентные дифференциальным уравнениям течения и со-

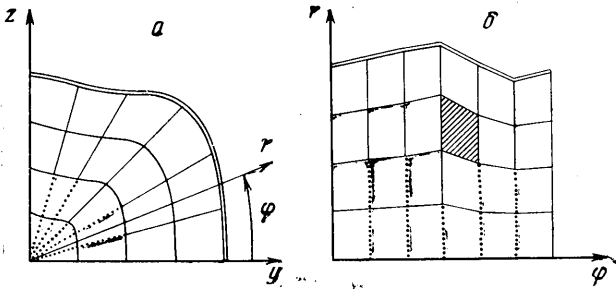
отношениям на сильных разрывах, имеют вид

$$\frac{d}{dx} \iint_s \mathbf{a} \, dr \, d\varphi = \oint_r (\mathbf{c} - \mathbf{a}\xi^r) \, dr - (\mathbf{b} - \mathbf{a}\xi^r) \, d\varphi + \iint_s \mathbf{f} \, dr \, d\varphi \quad (1.1)$$

где в плоскости $r\varphi$ интегрирование вдоль Γ осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки), а \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и \mathbf{f} — вектор-столбцы

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \rho v \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \\ \rho vw \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ p + \rho w^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = -\frac{\rho}{r} \begin{pmatrix} v \\ uv \\ v^2 - w^2 \\ 2vw \end{pmatrix}$$

В (1.1) и далее все переменные удобно считать безразмерными. Переменные приводятся к безразмерному виду отнесением пространственных переменных к ха-



Фиг. 1

рактерной длине l_* , плотности и скорости — к соответствующим критическим значениям ρ_* и q_* , давления — к $\rho_* q_*^2$. В силу этого, а также предположений о свойствах газа и о постоянстве полной энтальпии система (1.1) замыкается уравнением

$$\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} + q^2 = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \quad (q^2 = u^2 + v^2 + w^2)$$

2. Метод, при помощи которого рассчитывались пространственные сверхзвуковые струи, является стационарным аналогом метода, предложенного ранее С. К. Годуновым [5, 6] для расчета одномерных и двумерных нестационарных течений. Так как детальное изложение соответствующей разностной схемы дано в [7, 8], то ограничимся описанием лишь некоторых деталей.

Пусть струя имеет не менее двух плоскостей симметрии ($y = 0$ и $z = 0$ в декартовой системе координат xuz), а пересечение ее границы с произвольной плоскостью $x = \text{const}$ дается кривой $r = r^+(x, \varphi)$, которая находится в процессе расчета и изображена на фиг. 1 двойной линией (фиг. 1, а дает сечение струи в переменных uz , а фиг. 1, б — в переменных $r\varphi$, рассматриваемых также как прямоугольные координаты). В силу предположения о симметрии, на фиг. 1 изображена лишь четверть сечения, соответствующая $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Расчет струи ведется слоями $x = \text{const}$, причем необходимые разностные уравнения получаются, как это описано в [7, 8], из рассмотрения элементарных объемчиков, передние и задние (в направлении оси x) грани которых принадлежат плоскостям $x = x_0 + h_x$ и $x = x_0$, где h_x — шаг интегрирования по x . К моменту, когда рассчитывается слой $x = x_0 + h_x$, параметры потока на слое $x = x_0$ известны. Разбиение поперечного сечения струи на элементарные площадки проводится, как показано на фиг. 1, б. По φ рассматриваемая область разбивается на K вертикальных полос, а каждая граница полосы — луч $\varphi = \text{const}$ — делится на N равных отрезков

длины $r^+(x, \varphi) / N$. Точки соседних лучей соединяются в плоскости $r\varphi$ прямолинейными отрезками. Отметим, что прямолинейным границам элементарных четырехугольников (ячеек) в плоскости $r\varphi$ отвечают криволинейные границы соответствующих ячеек в плоскости yz . Получающиеся ячейки, лежащие на плоскостях $x = x_0$ и $x = x_0 + h_x$, берутся в качестве граней элементарных объемчиков, которые целиком заполняют слой $x_0 \leq x \leq x_0 + h_x$. Элементарные ячейки каждого сечения $x = \text{const}$ имеющие в плоскости $r\varphi$ примерно одинаковые размеры и равные площади, в плоскости yz при $r \rightarrow 0$ уменьшаются. Чтобы избежать нежелательных (прежде всего, с точки зрения уменьшения в силу условия устойчивости шага интегрирования h_x) последствий, получающихся в результате эффекта сгущения ячеек, проводится их объединение (и соответствующее объединение элементарных объемчиков), которое достигается за счет «выбрасывания» границ, показанных на фиг. 1 пунктиром. Выбрасывание проводится так, что все ячейки со сплошными границами имеют в плоскости yz ребра близких размеров (в окружном и в радиальном направлениях).

Взяв в пределах каждого слоя $x_0 \leq x \leq x_0 + h_x$ сечения элементарных объемчиков плоскостями $x = \text{const}$ и их границы в качестве S и Γ , интегрируя каждое из уравнений (1.1) по x от $x = x_0$ и $x = x_0 + h_x$ и применяя к вычислению получающихся в результате интегралов по граням каждого такого объемчика теорему о среднем, придем к разностным формулам, которые выражают средние по каждой ячейке параметры на слое $x = x_0 + h_x$ через аналогичные величины на предыдущем слое и потоки массы, количества движения и энергии, протекающие через боковые стороны соответствующего объемчика. По аналогии с [5, 6] указанные потоки найдутся с использованием решения автомодельной задачи о взаимодействии двух соприкасающихся вдоль прямой линии полубесконечных равномерных сверхзвуковых потоков. Параметры этих потоков берутся равными параметрам в тех ячейках слоя $x = x_0$, которые примыкают к соответствующему ребру рассматриваемого объемчика.

Вектор скорости \mathbf{q} каждого из взаимодействующих потоков можно разложить на три компоненты: q^1 , q^2 и q^3 , первые две из которых лежат в плоскости, перпендикулярной линии взаимодействия, а третья параллельна этой линии. Так как все линии взаимодействия принадлежат плоскости $x = x_0$, то за счет выбора ориентации системы координат, используемой при решении автомодельной задачи о взаимодействии сверхзвуковых потоков, всегда можно положить $q^1 = u$. Способ вычисления компонент q^2 и q^3 поясним на примере ребра, которое разделяет две соседние ячейки, заключенные между двумя лучами $\varphi = \text{const}$. Приписывая в соответствии с [8] конечным точкам указанного ребра номера n , k и n , $k - 1$, введем величины

$$l = \sqrt{l_r^2 + l_\varphi^2}, \quad l_r = r_{n, k-1}$$

$$l_\varphi = 0.5(r_{n, k} + r_{n, k-1})(\varphi_{n, k} - \varphi_{n, k-1})$$

Данные величины определяют длину и ориентацию (в плоскости $r\varphi$) прямолинейного отрезка, соответствующего рассматриваемому ребру в плоскости yz . Согласно определению q^2 и q^3 имеем

$$q^2 = w_{n \pm 1/2, k-1/2}(l_r / l) - v_{n \pm 1/2, k-1/2}(l_\varphi / l)$$

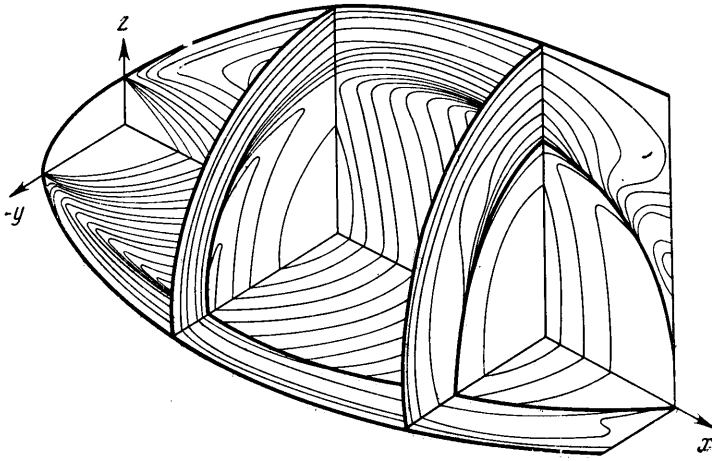
$$q^3 = w_{n \pm 1/2, k-1/2}(l_\varphi / l) + v_{n \pm 1/2, k-1/2}(l_r / l)$$

где полуцелые индексы приписаны параметрам в соответствующих ячейках, а знак плюс (минус) дает значения указанных компонент скорости со стороны ячейки, расположенной дальше (ближе) от оси x . Аналогичные формулы, отличающиеся только индексами, получаются и для других границ. Так, если рассматриваемая граница — отрезок луча $\varphi = \text{const}$, то $q^2 = w$, а $q^3 = v$, что, кстати, следует и из определения q^2 и q^3 .

После того как компоненты q^i с обеих сторон от линии соприкосновения потоков найдены, рассматриваемая задача сводится к задаче о взаимодействии двух плоских потоков, каждый из которых при $u > a$ является сверхзвуковым. При этом компоненты q^3 , касательные к линии соприкосновения, на взаимодействие не влияют и для каждого потока остаются неизменными вплоть до поверхности тангенциального разрыва, начинающейся на линии соприкосновения. Потоки массы, количества движения и энергии через боковые грани элементарных объемчиков, входящие, как уже отмечалось, в разностные уравнения, полагаются равными соответствующим величинам в той подобласти области взаимодействия, в которую попадает рассматриваемая боковая грань. Аналогичным образом строятся те грани элементарных объемчиков, которые совпадают с границей струи. При этом вместо задачи о взаимодействии двух сверхзвуковых потоков решается плоская задача об истечении равномерного потока в область с заданным давлением $p = p_e$.

3. Изложенный метод был применен для расчета недорасширенных сверхзвуковых струй, истекающих из сопел с эллиптическим и почти прямоугольным сечением в плоскости среза ($x = 0$). Предполагалось, что газ совершенный с $\kappa = 1.4$, а поток при $x = 0$ равномерный, параллельный оси x , и сверхзвуковой с $M_0 = 3.0$. Здесь и далее нижний индекс ноль приписывается параметрам потока в плоскости среза сопла. Некоторые из полученных результатов приведены на фиг. 2—8, причем, если это не оговорено особо, соответствующие расчеты проводились при $N \times K = 40 \times 32 = 1280$. Во всех случаях за характерный линейный размер брались расстояние от оси x до стенки сопла в сечении среза при $\varphi = \pi/2$. В случае сопел с эллиптическим поперечным сечением («эллиптических сопел») луч $\varphi = \pi/2$ располагался по малой оси эллипса.

Первые три фигуры относятся к струям, вытекающим из пространственных сопел при перепаде $p_0/p_c = 10$. На фиг. 2 для эллиптического соп-

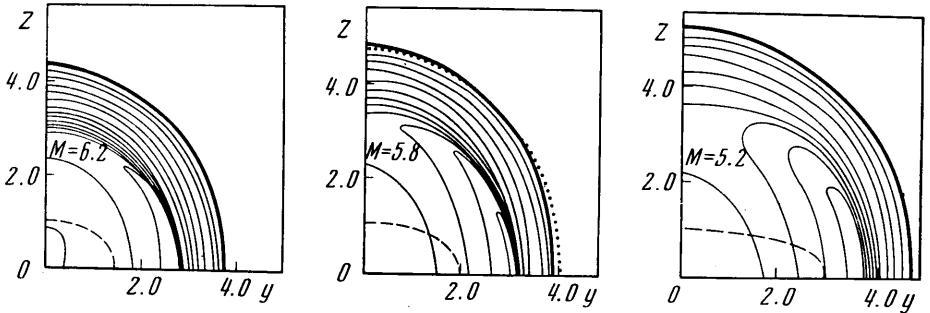


Фиг. 2

ла с отношением полуосей $a/b = 2.0$ изображены сечение среза сопла, а также линии пересечения границы струи и поверхностей постоянства числа Маха с плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $x = 10$ и $x = 20$. При этом показана область $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$, т. е. второй квадрант в переменных y и z , кроме того, масштаб по оси x взят вдвое меньшим, чем масштабы по осям y и z . Линии $M = \text{const}$ нанесены через $\Delta M = 0.2$, причем крайне левые из них в соответствии со сказанным ранее отвечают $M = M_0 = 3.0$. Отметим, что граница струи также является линией постоянства числа Маха. Здесь $M = 4.67$. Сгущение и пересечение поверхностей $M = \text{const}$ дает висячий скачок, линии пересечения которого с соответствующими плоскостями показаны на фиг. 2 жирными линиями, как и линии пересечения тех же плоскостей с границей струи. Для оценки погрешностей счета тот же случай был рассчитан при удвоенном числе ячеек в каждой плоскости $x = \text{const}$. Результаты, полученные при этом, оказались весьма близкими к изображенному. Так, например, границы струи в масштабе фигуры практически не различаются.

Как следует из фиг. 2, рассчитанное течение имеет достаточно сложную пространственную структуру. В частности, образование висячего скачка в плоскости, проходящей через малую полуось эллипса, происходит при

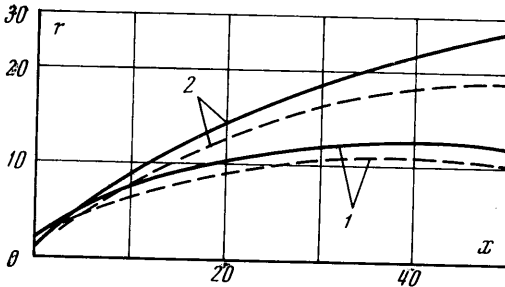
больших x , чем в плоскости его большой полуоси. Другая весьма интересная особенность состоит в том, что более интенсивно газ расширяется в окрестности плоскости $\varphi = \pi/2$. В результате струя, вытекающая из сопла, сечение среза которого вытянуто в направлении оси y , начиная с некоторых x , оказывается вытянутой в направлении оси z , т. е. во взаимно перпендикулярном направлении. Причину этого можно понять, анализируя взаимодействие волн разрежения, возникающих при обтекании кромки сопла. Особенно прост такой анализ для вытянутого в направлении оси y выходного сечения, если оно имеет форму прямоугольника. В таком случае волны разрежения, образующиеся при обтекании участков кромки, параллельных оси y , вызывают понижение давления в окрестности пере-



Фиг. 3

сечения границы струи с плоскостью $z = 0$ гораздо раньше, чем происходит аналогичное понижение в окрестности пересечения границы с плоскостью $y = 0$. Кроме того, понижение давления в первом случае оказывается более интенсивным. В силу этих причин струя в направлении оси y расширяется медленнее, чем в направлении оси z . Естественно, что такой же механизм действует и в случае вытянутого эллиптического сопла.

Усиление отмеченных эффектов с ростом эллиптичности выходного сечения сопла, т. е. отношения a/b , хорошо видно из фиг. 3, на которой

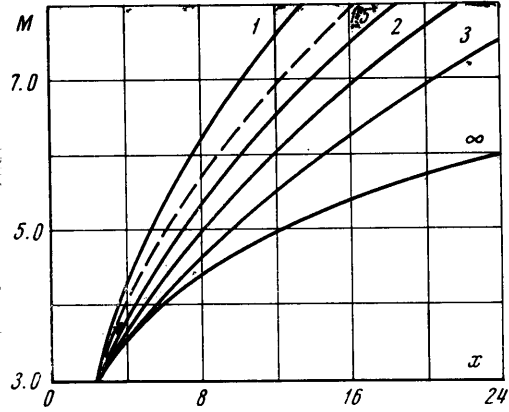


Фиг. 4

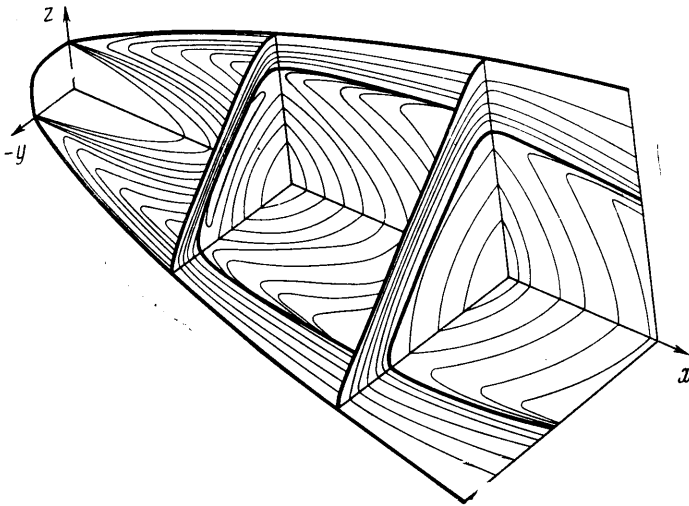
в сечении $x = 10$ показаны линии постоянства числа Маха, граница струи и висячий скачок, а также (штрихами) проекция кромки сопла для трех значений $a/b = 1.5, 2.0$ и 3.0 . На фиг. 3 в каждом случае для одной из линий $M = \text{const}$ указано соответствующее значение числа Маха. Остальные кривые проведены через $\Delta M = 0.2$. Результаты, представленные на фиг. 3, получены для $a/b = 1.5$ и 3.0 при $N \times K = 20 \times 16 = 320$ и для $a/b = 2.0$ при $N \times K = 40 \times 32 = 1280$. Граница струи, полученная для $a/b = 2.0$ при $N \times K = 20 \times 16$, дана на фиг. 3 пунктиром. С ростом перепада p_0/p_e описанный выше эффект изменения ориентации большой оси поперечного сечения струи усиливается, как это следует из рассмотрения фиг. 4, отвечающей $p_0/p_e = 100$ и $a/b = 2.0$. На указанной фигуре сплошные линии дают пересечение границы струи, а штриховые — висячего скачка с плоскостями симметрии струи. Кривые, отмеченные цифрой 1, соответствуют плоскости большой полуоси эллипса ($\varphi = 0$), а цифрой 2 — его малой полуоси ($\varphi = \pi/2$).

Влияние формы выходного сечения сопла на распределение числа Маха вдоль оси x хорошо видно из фиг. 5, соответствующей перепаду $p_0/p_e = 10$. Сплошные кривые на этой фигуре относятся к эллиптическим соплам (цифры над кривыми — значения a/b), причем $a/b = 1$ отвечает осесимметричной струе, а $a/b = \infty$ — плоской. Штрихами на фиг. 5 дано

аналогичное распределение, имеющее место в случае сопла с почти квадратным выходным сечением, когда $y^5 + z^5 = 1$ — уравнение кромки. Представление о форме струи и всякого скачка для струи, истекающей из такого сопла при $p_0/p_e = 10$, дает фиг. 6, построенная по тому же принципу, что и фиг. 2. Масштабы по осям x , y и z на фиг. 6 одинаковые, линии $M = \text{const}$ построены через интервал $\Delta M = 0.2$, значения M_0 и M_e — те же, что и в случае фиг. 2. Согласно сказанному ранее струя, вытекающая из почти квадратного сопла, более интенсивно расширяется в направлении осей y и z . В результате, как это и видно из фиг. 6, поперечное сечение струи приобретает форму, близкую к квадрату, повернутому относительно выходного сечения сопла на 45° .

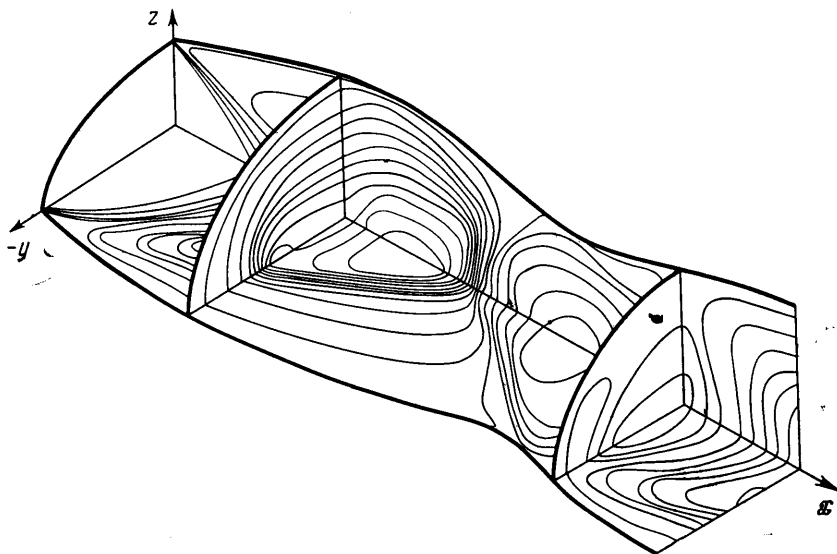


Фиг. 5

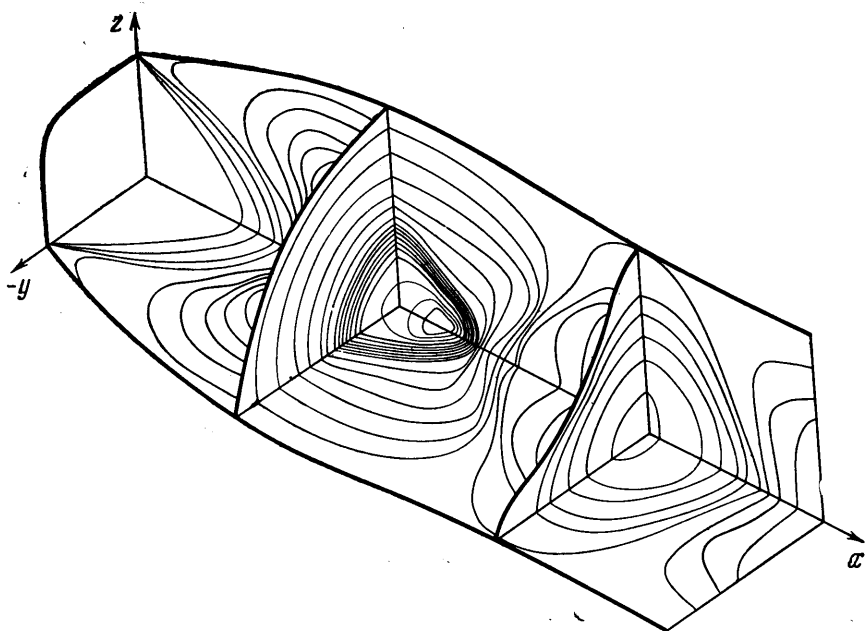


Фиг. 6

На последних двух фигурах тем же способом, что и в случаях, изображенных выше, представлены результаты расчетов струй, вытекающих из эллиптического (фиг. 7) и почти квадратного (фиг. 8) сопла при $p_0/p_e = 2.0$. Линии $M = \text{const}$ на этих фигурах проведены через $\Delta M = 0.1$, $M_e = 3.47$, масштаб по оси x в 2.5 раза меньше, чем по осям y и z .



Фиг. 7



Фиг. 8

Расчеты выполнялись на ЭВМ «БЭСМ-6». Программа была составлена на языке «АЛГОЛ-60», причем время счета типичного варианта при $N \times K = 40 \times 32 = 1280$ равнялось 2—4 час.

Поступило 1 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Дьяконов Ю. Н., Егорова Н. И., Мельников Д. А., Росляков Г. С., Усков В. И. Сверхзвуковые струи идеального газа, ч. 1. Истечение струй в вакуум. Истечение струй в спутный сверхзвуковой поток. М., Изд-во МГУ, 1970.
2. Аверенкова Г. И., Ашратов Э. А., Волконская Т. Г., Дьяконов Ю. Н., Егорова Н. И., Мельников Д. А., Росляков Г. С., Усков В. И. Сверхзвуковые струи идеального газа, ч. 2. Истечение струй в затопленное пространство. М., Изд-во МГУ, 1971.
3. Chu C. W., Nieman A. F., Powers S. A. Calculation of multiple rocket engine exhaust plumes by the method of characteristics. AIAA paper, 1966, No. 66—651, pt 1, pp. 1—25.
4. D'Atto L., Nowak G., Thommen H. U. An inviscid analysis of the plume created by multiple rocket engines and a comparison with available schlieren data Part II: A finite difference method. AIAA paper, 1966, No. 66—651, pp. 26—44.
5. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47 (89), вып. 3, стр. 271—306.
6. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1964, т. 1, № 6, стр. 1020—1050.
7. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В. Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. I. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 2, стр. 441—463.
8. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. II. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 3, стр. 805—813.