

УДК 532.516.5:518.5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПОТОКОМ ГАЗА

В. И. МЫШЕНКОВ

(Москва)

Методом установления с помощью разностной схемы типа Лакса — Вендроффа решаются уравнения Навье — Стокса для задачи обтекания совершенным газом прямоугольника (цилиндра прямоугольного сечения) с передней пластинкой и без нее при дозвуковых, трансзвуковых и малых сверхзвуковых скоростях потока (числах Маха $0.3 \leq M \leq 2$) и числах Рейнольдса $1 \leq R \leq 250$.

Исследуется возникновение и развитие переднего, бокового и донного отрывов потока и определяются аэродинамические характеристики рассматриваемых тел.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу обтекания плоского прямоугольного тела — прямоугольника с передней разделяющей пластинкой и без нее потоком совершенного вязкого газа. Течение будет описываться уравнениями Навье — Стокса и обычными граничными условиями.

Решение задачи будем искать в верхней полуплоскости ξ, η , которую для удобства интегрирования отобразим с помощью преобразования

$$x = \xi / \sqrt{\xi^2 + 1}, \quad y = \eta / \sqrt{\eta^2 + 1}$$

в прямоугольную область с координатами $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ (фиг. 1).

Нестационарные уравнения движения и энергии совместно с уравнением состояния

и зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры, используем в виде, идентичном формулам (1.2) работы [1]. В качестве характерных величин принимаем параметры набегающего потока и длину L , пропорциональную полутолщине прямоугольника l ($L = 1.733 l$).

Задачу будем решать методом установления, предполагая существование и единственность решения при достаточно гладких краевых условиях. Поток считаем текущим слева направо.

Граничные условия

- 1) $\rho = u = 1, v = 0, e = e_\infty$ при $x = \pm 1, 0 \leq y \leq 1; y = 1, -1 \leq x \leq 1$
- 2) $u = v = 0, e = e_w$ при $x = x_1, x_2, 0 \leq y \leq y_1; y = y_1, x_1 \leq x \leq x_2$
- 3) $\partial \rho / \partial y = \partial u / \partial y = \partial e / \partial y = v = 0$ при $y = 0, -1 \leq x \leq x_1, x_2 \leq x \leq 1$.

При постановке бесконечно тонкой «разделяющей» пластинки перед прямоугольником имеем

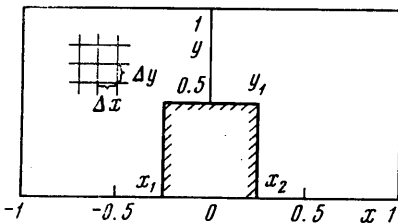
За) $u = v = 0, e = e_w$ при $-0.95 \leq x \leq x_1, y = 0$.

Здесь x_1, x_2, y_1 — координаты поверхностей прямоугольника: передней (лобовой), задней (донной) и верхней ($|x_1| = x_2 = \frac{1}{2} y_1 = 0.25$); ρ, u, v, e — плотность, со-

ставляющие скорости по x, y и внутренняя энергия соответственно. Индексы ∞, w обозначают параметры на бесконечности и на поверхности стенки. В случаях 2) и 3а) ρ определяется из уравнения неразрывности.

Условие симметричности течения в донной области 3) как отмечалось в [1, 2], стабилизирует течение и оказывается несправедливым при больших числах R , когда течение становится нестационарным (образование дорожки Кармана).

Начальные условия. Начальные значения ρ, u, v, e для ускорения счета целесообразно задавать как можно ближе к решению задачи. Практически это осуществляется использованием ранее полученного для некоторых чисел R, P, M решения в качестве начальных данных при расчете для других значений характерных параметров (P — число Прандтля).



Фиг. 1

Решение будем считать установившимся, если норма разности векторов продольной составляющей скорости u , взятых в различные моменты времени в области счета, удовлетворяет условию

$$\|u_{k+50} - u_k\| = \max_{m,n} |u_{m,n}^{k+50} - u_{m,n}^k| \leq 1.5 \cdot 10^{-4}$$

Здесь $u_{m,n}^k$ — значение u в m, n точке сетки для k -шага по времени.

Задачу решаем с помощью двухшаговой разностной схемы типа Лакса — Вендроффа [3], аппроксимирующей исходную систему дифференциальных уравнений Навье — Стокса с погрешностью $O(h^2)$. Структура схемы приведена в работе [4].

Точки отрыва и прилипания на твердых поверхностях находим по изменению знака u напряжения трения, которое аппроксимируем также со вторым порядком точности. Величину коэффициента давления определяем по формуле

$$C_p = 2(p - p_\infty) / \rho u_\infty^2 = 2(p / p_\infty - 1) / \gamma M^2$$

Здесь p — давление, γ — показатель адиабаты.

Расчеты были проведены при значениях характерных параметров $P = 0.71$; $M = 0.3$, $1 \leq R \leq 250$; $0.3 \leq M \leq 2$, $R = 100$; $M = 2$, $20 \leq R \leq 250$ (последний вариант только для прямоугольника без передней пластинки). Шаг сетки по x и y выбирался согласно [4] равным 0.05.

При расчетах течения для чисел $M \geq 0.8$ аналогично [4] применялся оператор сглаживания переменных ρ, u, v, e .

2. Обтекание прямоугольника. Расчеты показывают, что течение около прямоугольника при малых числах $R \leq 1$ и $M = 0.3$ является безотрывным (фиг. 2) благодаря тому, что вязкие силы оказываются достаточными, чтобы удержать поток у поверхности тела, несмотря на большие положительные градиенты давления, имеющие место на верхней и особенно задней поверхностях прямоугольника (см. фиг. 6).

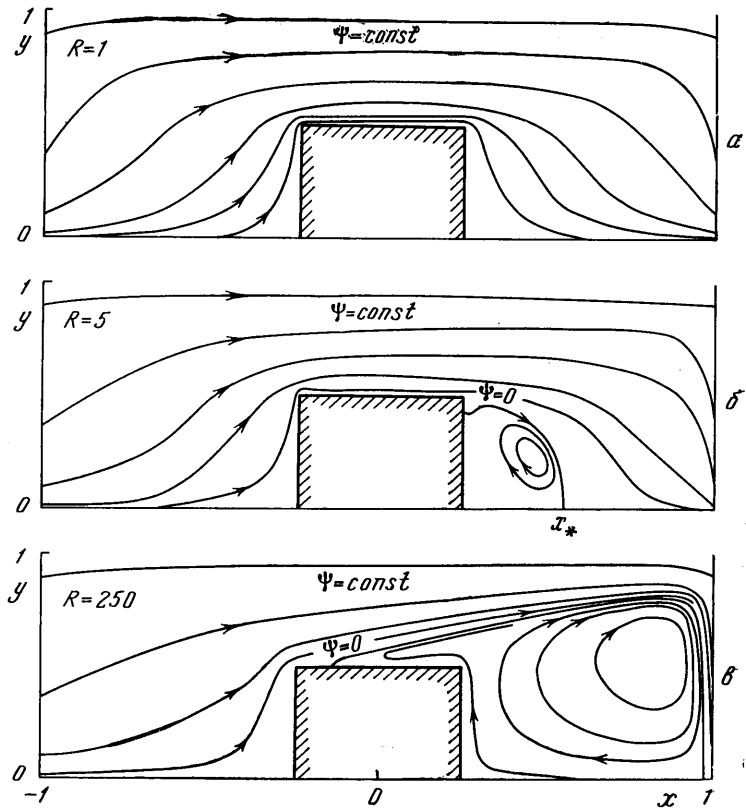
Существует критическое число $R_k > 1$, когда у задней стенки прямоугольника возникает отрывная область. Следует отметить, что R_k оказывается практически одинаковым для прямоугольника, для прямоугольника с передней пластинкой (см. п. 3) и для пластины конечной толщины [4]. Следовательно, толщина вязкого слоя перед задней угловой кромкой и его предыстория не оказывают какого-либо заметного влияния на момент возникновения отрыва потока, который, по-видимому, определяется лишь формой задней части тела.

С увеличением числа R размеры отрывной области возрастают. При этом отрывная область не локализуется у задней стенки прямоугольника, как это было при течении за пластиной [4], а распространяется и на боковую поверхность тела, соединяясь с образовавшейся там боковой отрывной зоной, что приводит при $R = 100$, $M = 0.3$ к существенному возрастанию ее поперечного размера h ($h/l \geq 1.5$).

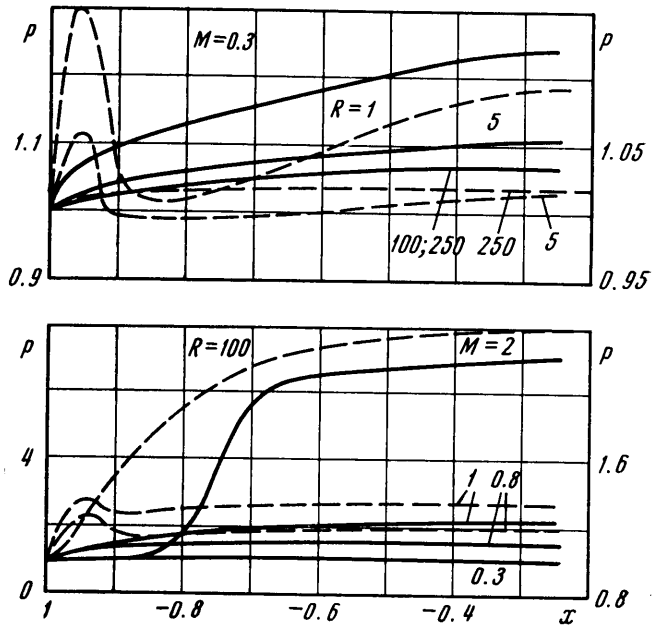
Поскольку образование бокового отрыва с увеличением числа R обусловлено воздействием положительного градиента давления у передней угловой кромки (см. фиг. 6), то увеличением длины прямоугольника можно добиться отделения донной отрывной зоны от боковой и локализации ее у задней стенки аналогично течению за пластиной [4].

Распределение давления перед прямоугольником и размеры области влияния тела вверх по потоку при $M = 0.3$ и $R > 25$ остаются неизменными (фиг. 3, сплошные линии, левая шкала). При этом расчетное значение давления в передней критической точке прямоугольника p_0 (линия 1) лишь на 0.5% превышает величину давления изэнтропического торможения p_{0i} (линия 3 на фиг. 4). С уменьшением числа R при $R \leq 20$ p_0 и область влияния тела вверх по потоку увеличиваются (фиг. 3). Однако точную границу распространения этого влияния установить не удается из-за близости ее к особой точке $x = -1$ и недостаточной там густоты сетки.

Повышение p_0 с уменьшением числа R , обусловленное воздействием сил вязкости среды, позволяет практически определять нижнюю границу



Фиг. 2

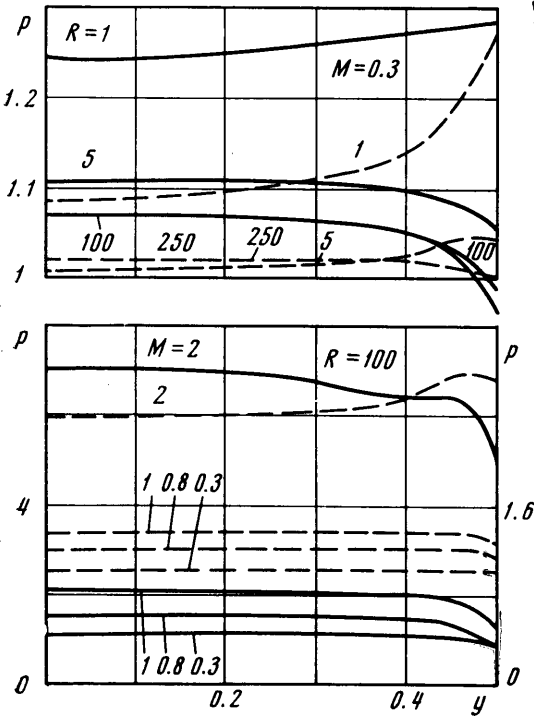


Фиг. 3

применимости уравнений Эйлера по числу R . Например, для течения с $M = 0.3$ такой границей следует считать число $R \approx 25$.

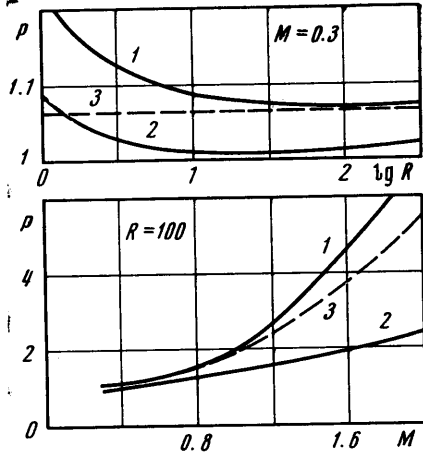
Функция распределения продольной составляющей скорости u перед прямоугольником (в плоскости симметрии течения) при больших числах R имеет автомодельный, почти линейный характер. При $R \leq 20$ автомодельность пропадает, а функция $u(x)$ становится вогнутой.

Давление на большей части передней стенки прямоугольника (фиг. 5, левая шкала, сплошные линии) при $R \geq 5$ меняется довольно слабо. Лишь при $y > 0.4$ в силу расширения потока у угловой кромки имеет место значительное изменение давления, возрастающее с увеличением числа R . Градиент давления на стенке, отрицательный при больших числах R , с уменьшением R уменьшается и при $R = 1$ становится положительным, а максимум давления смещается к угловой кромке. Однако возвратного течения на передней стенке при этом не возникает.



Фиг. 5

вихрь со значительным падением давления и скоростями обратного течения в 2.5 раза превышающими скорость потока на бесконечности. Образование подобных вихрей в дозвуковом потоке ранее рассматривалось в ра-



Фиг. 4

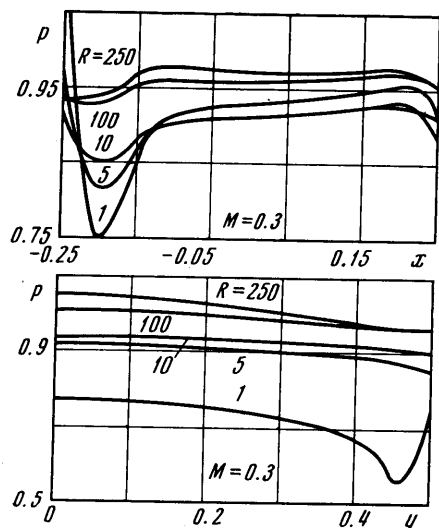
те при этом не возникает.

Распределение давления на верхней и нижней стенках прямоугольника при $M = 0.3$ и $1 \leq R \leq 250$ приведено на фиг. 6. Значения давления на донной стенке прямоугольника оказываются выше, чем для пластины конечной толщины, однако характер изменения донного давления p_2 с числом R и распределения давления на донной стенке почти одинаково (фиг. 6).

Давление и продольная составляющая скорости в следе прямоугольника при числах $R \leq 10$ изменяются аналогично соответствующим параметрам за пластиной [4]. Наблюдается лишь некоторое количественное расхождение данных, обусловленное влиянием отбоя части прямоугольника (фиг. 7, сплошные линии). При $R \geq 100$ за прямоугольником образуется мощный

боте [5] и хорошо известно в несжимаемой жидкости (теория кавитации). Аналогичные результаты для течения в следе за пластиной получаются при увеличении толщины отрывающегося вязкого слоя [4].

Увеличение числа M при $R = 100$, как и уменьшение числа R при $M = 0.3$, вызывает сокращение размеров отрывной зоны. Точка отрыва потока на верхней стенке при этом вначале смещается к задней угловой



Фиг. 6

кромке, а затем переходит на донную стенку прямоугольника.

Давление перед телом (фиг. 3, левая шкала, сплошные линии), изменяется довольно плавно от значения давления на бесконечности p_∞ до давления на теле p_0 при всех числах M , за исключением $M = 2$, когда возникает скачок давления, располагающийся на 5–6 расчетных точках. Аналогично меняется температура газа перед телом с той только разницей, что при достижении максимальной величины (при $x \geq -0.5$) вновь падает до температуры стенки. При этом распределение скорости u перед телом имеет больший (при $M = 0.3, 0.5$) или меньший ($M = 1$) линейный участок, а при $M = 2$ — еще и скачок скорости.

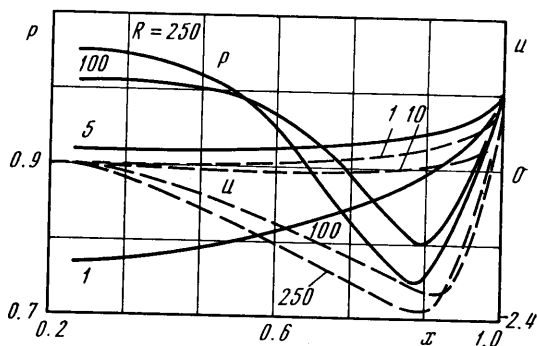
Область распространения возмущений вверх по потоку от тела с увеличением числа M до $M = 0.8$ увеличивается, а при $M = 1$, наоборот, уменьшается. При $M = 2$ она, естественно, ограничивается расстоянием внешней границы ударной волны от тела.

С увеличением числа M граница применимости уравнений Эйлера по числу R смещается в сторону больших R ($\sim M^2$). Например, при $M = 0.8$ такой границей будет уже $R \approx 100$.

Распределение давления на передней поверхности прямоугольника при различных M приведено на фиг. 5 (левая шкала, сплошные линии). Интересно отметить появление в окрестности угловой точки (при $y = 0.45$) с уменьшением числа R (при $M = 2$) области повышенного давления, значения давления в которой при $R \leq 20$ выше давления в передней критической точке.

На большей части верхней поверхности прямоугольника давление имеет положительный градиент, который с увеличением числа Маха до $M = 0.8$ несколько возрастает, а при $M \geq 1$ становится отрицательным.

Распределение давления на задней стенке прямоугольника с увеличением числа M до $M = 0.8$ вначале сглаживается (давление становится почти постоянным), затем при $M \geq 1$ вновь начинает деформироваться.



Фиг. 7

и при $M = 2$ приобретает немонотонный характер с локальным минимумом в окрестности угловой кромки. Такое поведение давления обуславливается уменьшением скорости возвратного течения с увеличением числа M до $M = 0.8$ при почти полном заполнении задней стенки областью возвратного течения. Дальнейшее изменение распределения давления с увеличением числа M вызвано уменьшением области возвратного течения и перемещением точки отрыва потока по задней стенке прямоугольника от угловой кромки к центру.

Распределение давления и продольной составляющей скорости в следе с увеличением числа M сглаживается. Интенсивность вихрей и пиков понижения давления существенно уменьшается. Область отрывного течения сокращается и при некотором числе M для $R = 100$, очевидно, станет равной нулю.

3. Обтекание прямоугольника с передней разделяющей пластинкой. Как показали расчеты, постановка бесконечно тонкой разделяющей пластинки перед прямоугольником существенно изменяет картину и параметры течения перед телом. У передней стенки прямоугольника появляется отрывная зона с вихревым возвратным течением, имеющая минимальные размеры для $M = 0.3$ при $R = 20$.

Казалось бы, что с уменьшением числа R в силу увеличения сил вязкости передняя отрывная зона аналогично задней должна монотонно уменьшаться и при некотором числе R стать равной нулю. Однако благодаря значительному возрастанию градиента давления на передней пластинке под действием сил вязкости (которые здесь играют двойную роль) отрывная область, начиная с $R = 20$, увеличивается. Возрастание передней отрывной зоны с увеличением числа R обуславливается уменьшением сил вязкости при почти неизменном градиенте давления.

На параметрах течения в следе введения пластинки перед прямоугольником сказывается незначительно: возникновение ($R_k = \text{const}$) и развитие отрыва качественно происходит без изменения. Имеются лишь небольшие количественные различия, вызванные некоторым изменением течения на верхней стенке прямоугольника.

Распределение давления перед телом в плоскости симметрии течения с введением пластинки значительно изменяется — появляется участок постоянного давления в области отрывного течения, а сами величины давления существенно уменьшаются (фиг. 3, правая шкала, пунктирные линии). Функция $p(x)$ на пластинке при $R = 100, 250$ ($M = 0.3$) имеет монотонный характер. При $R \leq 10$, у передней кромки ее появляется всплеск давления, возрастающий при уменьшении числа R .

Распределение давления на передней стенке прямоугольника с пластинкой при $M = 0.3$ и числах $R > 10$ почти не меняется (фиг. 5, правая шкала, пунктирные линии), а значения давления оказываются существенно меньшими, чем у прямоугольника без пластинки. Благодаря этому переднюю пластинку можно использовать как средство уменьшения лобового сопротивления тела. Так, коэффициенты лобового сопротивления C_{x1} прямоугольника с передней пластинкой и без нее различаются при $R = 1$ в 2 раза, при $R \geq 100$ в 4 раза, а при $R = 10$ максимально в 8 раз.

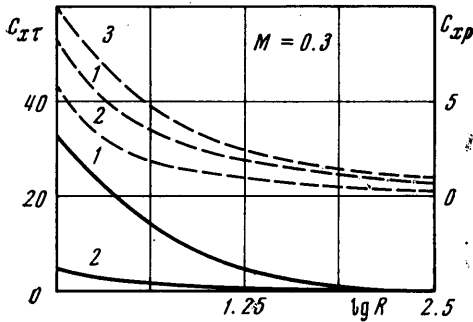
Распределение давления на верхней поверхности прямоугольника с пластинкой при $M = 0.3$ и различных R идентично распределению давления на прямоугольнике без пластинки.

Так же незначительно изменяются распределения давления на задней стенке и давления и скорости u в следе прямоугольника с введением передней пластинки.

Донное давление с увеличением числа R при $M = 0.3$ в обоих случаях (с пластинкой и без) увеличивается. При малых числах R донное давле-

ние больше у прямоугольника с передней пластинкой, а при больших — наоборот. Равенство донных давлений имеет место при $R = 31.5$. Аналогично меняется с числом R коэффициент донного давления C_p (или $-C_{x2}$) прямоугольника.

Коэффициенты сопротивления давления $C_{xp} = C_{x1} + C_{x2}$ и трения C_{xt} прямоугольника с уменьшением числа R монотонно увеличиваются, причем C_{xt} возрастает почти обратно пропорционально числу R . На фиг. 8 (штриховые и сплошные кривые соответствуют C_{xp} и C_{xt} ; 1 — для прямоугольника, 2 — для прямоугольника с передней пластинкой).

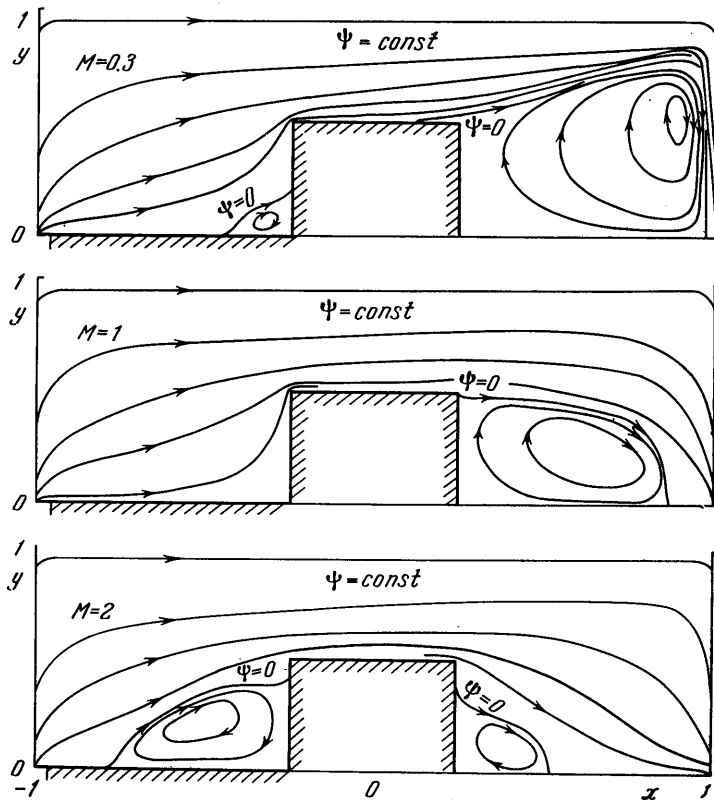


Фиг. 8

Для сравнения приведены экспериментальные данные работы [6] для C_{xp} кругового цилиндра в случае обтекания несжимаемой жидкостью (кривая 3).

Увеличение числа M при $R = 100$, как отмечалось, оказывает стабилизирующее воздействие на течение. Передняя отрывная зона при этом сокращается и при $M = 1$ становится равной нулю. Однако после перехода через скорость звука (например, при $M = 2$) на передней пластинке благодаря появлению больших градиентов давления (фиг. 3, пунктирные линии, правая шкала) вновь

появляется отрывная зона (фиг. 3, пунктирные линии, правая шкала) вновь



Фиг. 9

образуется отрывная область, но значительно больших размеров и интенсивности, чем при $M = 0.3$ (фиг. 9). Изменение же параметров и характера течения на боковой поверхности и в следе с увеличением числа M происходит так же, как в случае обтекания прямоугольника, а поэтому здесь не обсуждается.

Распределение давления на передней пластинке и лобовой стенке при $R = 100$ и $0.3 \leq M \leq 2$ приведено на фиг. 3 и 5 пунктирными линиями (отсчитывать по правой шкале). Интересно отметить, что с увеличением M , как и с уменьшением R , у передней кромки пластинки и у угла лобовой стенки возникают зоны повышенного давления.

Давление в передней критической точке прямоугольника с пластинкой, как и его коэффициент лобового сопротивления, с увеличением числа M возрастает, но значительно медленнее, чем без пластинки (фиг. 4, кривая 2). Например, коэффициент лобового сопротивления прямоугольника с введением передней пластинки уменьшается при $M = 0.3$ в 3.7 и при $M = 2$ в 4 раза.

Распределения давления на верхней и донной стенках и давления и скорости в следе прямоугольника с увеличением числа M ведут себя идентично соответствующим характеристикам для прямоугольника без пластинки. Обнаруживаются лишь некоторые количественные расхождения значений переменных.

Введение передней пластинки уменьшает коэффициент донного давления прямоугольника при $M < 0.5$, а при $M \geq 0.5$ увеличивает. Минимальный коэффициент донного давления в обоих случаях имеет место при $M = 0.8$.

На фиг. 10 приведены зависимости от числа M C_{xp} и C_{xt} (соответственно штриховые и сплошные линии) для прямоугольника с передней пластинкой (кривые 2) и без нее (кривые 1). Введение передней пластинки, как видно из графиков, в 2—3 раза уменьшает C_{xp} и значительно увеличивает C_{xt} .

Автор благодарит Б. С. Кирнасова и В. Я. Нейланда за обсуждение работы.

Поступило 18 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышенков В. И. Дозвуковое и трансзвуковое течение вязкого газа в следе плоского тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
2. Acrivos A., Leal L. G., Snowden D. D., Pan F. Further experiment on steady separated flows past bluff objects. J. Fluid Mech., 1968, vol. 34, p. 1.
3. Thommen H. U. Numerical integration of the Navier — Stokes equations. Z. angew. Math. and Phys., 1966, vol. 17, No. 5.
4. Мышенков В. И. Численное исследование течений вязкого газа в следе плоского тела. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, № 3.
5. Абрамович Г. П. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
6. Hoerner S. F. Aerodynamic drag. Midland Park, New Jersey, 1951.