УДК 532.542

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРИМЕСИ В ЛАМИНАРНОМ ПОТОКЕ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

В. И. МАРОН

(*Москва*)

Рассмотрена задача о распределении концентрации примеси в ламинарном потоке в трубе. Решение этой задачи может быть использовано при изучении движения крови в артериальной системе, в хроматографии, при исследовании фильтрации взаиморастворимых жидкостей в идеальной пористой среде и т. д.

Тейлор в работе [1] предложил одномерную модель дисперсии, описывающую распределение средней по сечению трубы концентрации в ламинарном потоке в трубе. В этой статье и в последующих работах [2–6] найдены пределы применимости модели и сделано обобщение ее для более широкой области безразмерных параметров, характеризующих перемешивание. В результате для описания распределения средней по сечению трубы концентрации было получено уравнение диффузии с постоянным коэффициентом дисперсии.

Сравнение решения этого уравнения с результатами опытов [4] и численным решением задачи в точной постановке [4, 6] позволяет сделать вывод о том, что для моментов времени, меньших диффузионной постоянной, коэффициент дисперсии не может быть постоянным, так что модели Тейлора и Тейлора — Ариса не описывают распределение средней концентрации.

В работах [7–10] сделаны попытки более строго определить профиль концентрации примеси, чтобы использовать его для уточнения модели Тейлора. Однако при этом авторы указанных работ заранее полагали величину коэффициента дисперсии постоянной, когда средняя скорость потока постоянна, и зависящей от времени, когда скорость переменная. В первом случае величина коэффициента дисперсии получилась такой же, как в работе Тейлора. Второй случай выходит за рамки постановки Тейлора.

В этой работе методом последовательных приближений найдено решение задачи в точной постановке и построена модель одномерной дисперсии, отличная от модели Тейлора — Ариса. Показано, что из этой модели асимптотически для больших моментов времени получается модель Тейлора — Ариса, а для малых времен — чисто диффузионная модель.

1. Осесимметричное распределение концентрации примеси в ламинарном потоке в круглой трубе описывается уравнением диффузии вида

$$\frac{\partial c}{\partial t}+U\Phi(r)\frac{\partial c}{\partial x}=D\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right] \tag{1.1}$$

$$c=c(t,x,r),\quad t>0,\ 0<r<a,\ -\infty<b<x<d<+\infty$$

Здесь c — концентрация, U — средняя скорость потока, $U\Phi(r)$ — профиль скорости, D — коэффициент молекулярной диффузии, a — радиус трубы, t — время, x и r — пространственные переменные. Ось x цилиндрической системы координат совпадает с осью трубы и направлена в сторону движения потока.

Предельные условия задачи, когда поток вещества на внутренней поверхности трубы равен нулю, имеют следующий вид:

$$c(0,x,r)=c_0(x),\qquad \left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=0}=\left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \tag{1.2}$$

К этим условиям следует добавить соответствующие предельные условия при $x = d$ и $x = b$. Например, для задачи вытеснения из полубесконечной трубы одной жидкости с помощью другой эти условия имеют вид

$$c(t, 0, r) = 1, \qquad c(t, \infty, r) = 0 \tag{1.3}$$

Введем безразмерные переменные вида

$$\tau = Dt / a^2, \qquad \xi = x / a, \qquad \eta = r / a$$

и запишем уравнение диффузии и предельные условия задачи в виде

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + Y\frac{\partial c}{\partial \xi} + Y[\Phi(\eta) - 1]\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial c}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2}$$

$$Y = aU / D, c = c(\tau, \xi, \eta), \tau > 0, 0 < \eta < 1 \tag{1.4}$$

$$-\infty < \xi < +\infty$$

$$c(0, \xi, \eta) = c_0(\xi), \qquad \left.\frac{\partial c}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = \left.\frac{\partial c}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} = 0$$

Слагаемые в левой и правой частях этого уравнения умножим на 2η и проинтегрируем по η в пределах от 0 до 1. Имеем

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + Y\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + 2Y\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^1 [\Phi(\eta) - 1](c - \theta)\eta\, d\eta - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = 0$$

$$\theta = 2\int_0^1 c\eta\, d\eta, \qquad \theta = \theta(\tau, \xi), \qquad \tau > 0 \tag{1.5}$$

Здесь θ — средняя по сечению трубы концентрация примеси, зависящая только от переменных τ и ξ.

Комбинируя слагаемые уравнений (1.4) и (1.5), получаем следующее уравнение для функции $\Psi = c - \theta$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right) = 2Y\frac{\partial}{\partial \xi}\int_0^1 [\Phi(\eta) - 1]\Psi\eta\, d\eta -$$

$$- Y[\Phi(\eta) - 1]\frac{\partial c}{\partial \xi} - Y\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) рассматриваем как неоднородное уравнение со свободным членом в правой части и будем решать его методом последовательных приближений.

2. Тейлор в качестве первого приближения при определении профиля концентрации принял концентрацию c равной средней концентрации θ. Основанием для такого приближения служит то, что для моментов времени, много больших диффузионной постоянной a^2 / D, когда длина области смеси станет много больше диаметра трубы, из-за радиальной диффузии неоднородности концентрации в поперечном сечении трубы почти выровняются, и в потоке будут существовать лишь незначительные отклонения величины концентрации от среднего в сечении трубы значения. Эти отклонения обусловлены неоднородным из-за профиля скорости конвективным переносом примеси.

Здесь также примем это приближение, которое подставляем в правую часть уравнения (1.6) с целью нахождения последующего приближения.

В результате подстановки получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}-\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right)=-Y[\Phi(\eta)-1]\frac{\partial\theta}{\partial\xi} \tag{2.1}$$

Ищем решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим предельным условиям:

$$\Psi(0,\xi,\eta)=0, \qquad \left.\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right|_{\eta=0}=\left.\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right|_{\eta=1}=0 \tag{2.2}$$

При решении задачи (2.1) и (2.2) в отличие от Тейлора сохраним в левой части уравнения (2.1) локальную производную функции по времени, Искомое решение имеет вид

$$\Psi(\tau,\xi,\eta)=-4Y\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_nJ_0(2\lambda_n\sqrt{\zeta})}{J_0^2(\lambda_n)}\times \tag{2.3}$$

$$\times\left[\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{\tau}\exp[-\lambda_n^2(\tau-s)]\frac{\partial\theta(s,\xi)}{\partial\xi}ds\right],\qquad \zeta=\frac{1}{4}\eta^2$$

$$a_n=\int_0^{1/4}J_0(2\lambda_n\sqrt{\zeta})[\Phi(\zeta)-1]d\zeta$$

Здесь $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода, λ_n — положительный корень уравнения $J_1(\lambda)=0$.

В ламинарном потоке профиль скорости параболический, поэтому $\Phi(\eta)=2(1-\eta^2)$. В этом случае

$$a_n=-\frac{2}{\lambda_n^2}J_0(\lambda_n)$$

Приближение (2.3) подставляем в подынтегральное выражение третьего слагаемого уравнения (1.5). В результате получаем уравнение для определения средней концентрации θ. Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+Y\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=\left(1+64Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^6}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}-$$

$$-64Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^6}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{\tau}\exp[-\lambda_n^2(\tau-s)]\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}ds\right) \tag{2.4}$$

Величина первого положительного корня λ_n равна 3.83, величина последующих корней — 7.02, 10.17 и т. д. [11]. Эти значения подставляем в выражение для коэффициента при первом слагаемом в правой части уравнения (2.4). Имеем

$$1+64Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^6}\approx 1+\frac{1}{48}Y^2$$

Этой величине равен эффективный коэффициент диффузии в модели Ариса [3], обобщающей модель Тейлора на область малых значений числа Пекле [6]. В модели Тейлора коэффициент дисперсии равен $^1/_{48}Y^2$. Уравнение (2.4) отличается от уравнения диффузии в модели Тейлора — Ариса дополнительным слагаемым в правой части. Нетрудно показать, что в двух предельных случаях при $\tau\to\infty$ и $\tau\to 0$ решения уравнения (2.4) асимптотически близки: в первом случае ($\tau\to\infty$) — решению уравнения модели Тейлора — Ариса и во втором случае ($\tau\to 0$) — решению уравнения молекулярной диффузии.

В работе [6] путем сравнения с численным решением уравнения (1.1) показано, что модель молекулярной диффузии хорошо описывает распределение примеси для малых времен при значениях числа Пекле порядка единицы. Таким образом, из предложенной модели в двух предельных случаях для больших и малых времен получаются модель Тейлора — Ариса и чисто диффузионная модель.

3. Уравнение (2.4) преобразуем к виду

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+Y\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+64Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}\left(\int_0^{\tau}\exp[-\lambda_n^2(\tau-s)]\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}ds\right) \tag{3.1}$$

При больших числах Пекле можно не учитывать молекулярную диффузию вдоль оси трубы и поэтому отбросить первый член в правой части уравнения (3.1). Имеем

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+Y\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=64Y^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}\int_0^{\tau}\exp[-\lambda_n^2(\tau-s)]\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}ds \tag{3.2}$$

В модели Тейлора, не учитывающей продольную молекулярную диффузию, распределение средней концентрации описывается следующим уравнением конвективной диффузии:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+Y\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=\frac{1}{48}Y^2\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} \tag{3.3}$$

На примере задачи о распространении порции примеси в потоке в трубе исследуем, в какой мере согласованы между собой решения уравнений (3.2) и (3.3). Под концентрацией θ будем понимать количество вещества примеси в единице объема.

Пусть в начальный момент времени $\tau=0$ в сечении трубы $\xi=0$ в поток введена порция примеси. В этом случае предельные условия задачи имеют вид

$$\theta(0,\xi)=\theta_0\delta(\xi),\qquad \theta|_{\xi\to\pm\infty}\to 0 \tag{3.4}$$

Здесь θ_0 — количество примеси, δ — дельта-функция.

Решение уравнения Тейлора (3.3), удовлетворяющее этому условию, имеет вид

$$\theta=\frac{1}{2}\theta_0(\pi K\tau)^{-1/2}\exp\left[-\frac{(\xi-K\tau)^2}{4K\tau}\right],\qquad K=Y^2/48 \tag{3.5}$$

Дисперсия этого распределения равна

$$\sigma^2=2K\tau \tag{3.6}$$

Это — очень важная для практики характеристика, так как знание ее позволяет находить размеры области смеси и величину эффективного коэффициента диффузии [12]. Так, например, нетрудно показать, что на участке области смеси длиной $2\sigma^{1/2}$ содержится 95,5% всей примеси. В модели Тейлора дисперсия растет пропорционально времени и величина эффективного коэффициента диффузии постоянна.

Перейдем к решению задачи (3.2), (3.4). При вычислении суммы в правой части уравнения (3.2) из-за быстрого роста величины собственных значений λ_n с увеличением их номера можно отбросить все слагаемые, кроме первого. Имеем

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+Y\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=\frac{64}{\lambda_1^4}Y^2\int\limits_0^\tau \exp[-\lambda_1^2(\tau-s)]\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}ds \quad \tau>0,\ -\infty<\xi<+\infty \tag{3.7}$$

В системе координат, движущейся со средней скоростью потока, уравнение (3.7) имеет вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{64}{\lambda_1^4}Y^2\int\limits_0^\tau \exp[-\lambda_1^2(\tau-s)]\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}ds \tag{3.8}$$

$$z=\xi-Y\tau, \qquad \tau>0, \qquad -\infty<z<+\infty$$

Здесь z — расстояние вдоль оси трубы в подвижной системе координат.

Слагаемые в левой и правой частях уравнения (3.8) продифференцируем по τ. После несложных преобразований получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}+\lambda_1^2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{64}{\lambda_1^4}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \tag{3.9}$$

Это так называемое телеграфное уравнение.

В отличие от уравнения диффузии Тейлора (3.3) уравнение (3.9) — гиперболического типа. Из решения этого уравнения получается конечная скорость распространения примеси в обе стороны от нулевого сечения $z=0$, равная $8\lambda_1^{-2}Y$. Отсюда следует, что передний фронт примеси в неподвижной системе координат движется со скоростью, приблизительно равной 0.775 U_0 (U_0 — скорость на оси трубы). Эта величина несколько меньше той, с которой в действительности распространяется фронт примеси. Задняя граница примеси движется со скоростью, приблизительно равной 0.225 U_0. Искомое решение задачи (3.9), (3.4) имеет вид

$$\theta=\theta_0\exp(-{}^1/_2\lambda_1^2\tau)\Biggl\{{}^1/_2[\delta(z-W\tau)+\delta(z+W\tau)]+$$
$$+\frac{\lambda_1^2}{4W}\left[I_0\left(\frac{1}{2}\lambda_1^2\tau\sqrt{1-\frac{z^2}{W^2\tau^2}}\right)+\left(1-\frac{z^2}{W^2\tau^2}\right)^{-1/2}\times\right.$$
$$\left.\times I_1\left(\frac{1}{2}\lambda_1^2\tau\sqrt{1-\frac{z^2}{W^2\tau^2}}\right)\right]\Biggr\} \tag{3.10}$$

$$|z|<W\tau, \quad \theta=0, \quad |z|>W\tau, \quad W=8\lambda_1^{-2}Y$$

Здесь I_0 и I_1 — модифицированные функции Бесселя.

Из этого решения следует, что распределение примеси имеет два четких фронта, на которых концентрация изменяется скачком. При этом величина скачка убывает по экспоненциальному закону. Используя асимптотические разложения функций $I_\nu(x)$ для больших величин аргументов, нетрудно показать, что решения (3.5) и (3.10) почти не отличаются друг от друга во внутренних точках области смеси $|z|\ll W\tau$ для моментов τ, удовлетворяющих условию ${}^1/_2\lambda_1^2\tau\gg 1$. Сравнение двух решений, аналогичных (3.5) и (3.10), которое сделано в книге [13], позволяет утверждать, что уже при условии $^1/_2\lambda_1^2\tau > 5$ решения (3.5) и (3.10) совпадают всюду, исключая окрестности фронтов распределения (3.10). Отсюда следует, что для описания распределения примеси при $\tau \gtrsim 0.6$ вместо решения (3.10) можно использовать решение Тейлора (3.5).

Дисперсия распределения (3.10) равна

$$\sigma^2 = 2K\tau\left(1 - \frac{1-\exp(-\lambda_1^2\tau)}{\lambda_1^2\tau}\right) \tag{3.11}$$

При $\lambda_1^2\tau \gg 1$ дисперсии обоих распределений (3.5) и (3.10) почти совпадают. Условие $\lambda_1^2\tau \gg 1$, при котором равны дисперсии кривых (3.5) и (3.10), приводит к известному условию Тейлора, определяющему моменты времени, для которых конвективная и радиальная диффузии почти сбалансированы между собой. Имеем

$$\lambda_1^2\tau \gg 1 \Rightarrow t \gg a^2 / 3.8^2 D \tag{3.12}$$

Предположение о балансе этих переносов существенно при построении модели Тейлора. Как это следует из вышеизложенного, условие Тейлора (3.12) обеспечивает линейный рост дисперсии распределения в зависимости от τ и постоянство величины эффективного коэффициента диффузии. При малых значениях $\lambda_1^2\tau$ дисперсия (3.11) увеличивается не по линейному закону. Это обстоятельство на основании опытных данных отметил автор работы [4].

Решение (3.10) получено в предположении, что числа Пекле таковы, что в уравнении (3.1) можно не учитывать продольную молекулярную диффузию. Чтобы пренебречь молекулярной диффузией, необходимо потребовать выполнения неравенства

$$64Y^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^4} \int_0^\tau \exp[-\lambda_n^2(\tau - s)]\,ds \gg 1 \tag{3.13}$$

или

$$^1/_{48}Y^2[1 - \exp(-\lambda_1^2\tau)] \gg 1 \tag{3.14}$$

Отсюда получаем величины чисел Пекле Pe в зависимости от τ, при которых можно пренебречь продольной молекулярной диффузией. Имеем

$$\mathrm{Pe} \gg 13.8[1 - \exp(-\lambda_1^2\tau)]^{-1/2}, \qquad \mathrm{Pe} = 2Y \tag{3.15}$$

Это условие правильно отражает зависимость предельных чисел Pe от τ, которую обнаружили авторы работы [6]. Именно с уменьшением величины τ числа Пекле Pe, ограничивающие область (Pe, τ), в которой приемлема модель Тейлора, увеличиваются. При $\lambda_1^2\tau \gg 1$ из условия (3.15) получается известное условие Тейлора $\mathrm{Pe} \gg 13.8$.

4. Выше было показано, что решение Тейлора (3.5) может быть получено на основе предлагаемой модели, как асимптотическое при $\tau \to \infty$. Покажем, что решение Тейлора (3.5) есть первое приближение в разложении решения уравнения (3.2) по малому параметру, каковым служит обратная величина квадрата наименьшего значения корня уравнения $J_1(\lambda) = 0$. С этой целью к уравнению (3.9) применим комплексное преобразование Фурье по переменной z. После этого запишем его в виде

$$\lambda_1^{-2}\frac{d^2\omega}{d\tau^2} + \frac{d\omega}{d\tau} = -\mu^2 K\omega, \qquad \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i\mu z\theta\, dz \tag{4.1}$$

Введем новую неизвестную функцию $v = d\omega / d\tau$ и запишем уравнение (4.1) в виде следующей системы:

$$\beta \frac{dv}{d\tau} = -v - \mu^2 K\omega, \qquad \frac{d\omega}{d\tau} = v, \qquad \beta = \lambda_1^{-2} \tag{4.2}$$

В первом уравнении этой системы при старшей производной имеется малый множитель β. Решение системы ищем в виде следующих рядов:

$$v = v_0 + \beta v_1 + \ldots + \beta^{q-1} v_{q-1}, \qquad \omega = \omega_0 + \beta\omega_1 + \ldots + \beta^{q-1}\omega_{q-1} \tag{4.3}$$

Функции v_i, ω_i удовлетворяют следующим системам:

$$\begin{gathered} 0 = -v_0 - \mu^2 K\omega_0, \qquad \frac{d\omega_0}{d\tau} = v_0, \qquad \omega_0(0) = \theta_0 \\ \frac{dv_{q-2}}{d\tau} = -v_{q-1} - \mu^2 K\omega_{q-1}, \qquad \frac{d\omega_{q-1}}{d\tau} = v_{q-1}, \qquad \omega_{q-1}(0) = 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

Коэффициенты при неизвестных функциях в системе (4.2) таковы, что ряды (4.3) дают приближенные формулы для ее решения. При этом погрешности приближенного решения для v и ω — величины порядков β^{q-1} и β^q соответственно [14]. Нетрудно видеть, что обращение функции ω_0 дает решение уравнения Тейлора.

Поступило 28 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube. Proc. Roy. Soc. A, 1953, vol. 219, No. 1137.
2. Taylor G. Conditions under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion. Proc. Roy. Soc. A, 1954, vol. 225, No. 1163.
3. Aris R. On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube. Proc. Roy. Soc. A, 1954, vol. 235, No. 1200.
4. Bailey H. R., Gogarty W. B. Numerical and experimental results on the dispersion of a solute in a fluid in laminar flow through a tube. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 269, No. 1338.
5. Philip J. R. The theory of dispersal during laminar flow in tubes. Aust. J. Phys., 1963, vol. 16, No. 3.
6. Ananthakrishnan V. et al. Laminar dispersion in capillaries. A. I. Ch. E. Journal, 1965, vol. 11, No. 6.
7. Gill W. N. A note on the solution of transient dispersion problems. Proc. Roy. Soc. A, 1967, vol. 298, pp. 335—339.
8. Gill W. N., Ananthakrishnan V. Laminar dispersion in capillaries. A.I.Ch.E. Journal, 1967, vol. 13, No. 4.
9. Gill W. N. et al. Dispersion in developing velocity fields. A.I.Ch.E. Journal, 1968, vol. 14, No. 6.
10. Gill W. N. Axial dispersion with time variable flow in multiphase systems. A.I.Ch.E. Journal, 1969, vol. 15, No. 5.
11. Янке Е и др. Специальные функции. М., «Наука», 1964.
12. Levenspiel O. Longitudinal mixing of fluid flowing in circular pipe. Ind and En-g Chem., 1958, vol. 50, No. 3.
13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
14. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., Изд-во иностр. лит., 1954.