

УДК 532.529.5

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ И ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ С УЧЕТОМ ИХ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

В. В. ПРОКОФЬЕВ

(Москва)

Рассматривается движение смеси жидкости и газовых пузырьков в случае, когда нельзя пренебречь перемещением пузырьков относительно жидкости.

Получена замкнутая система уравнений движения такой смеси. Исследована задача о движении несжимаемой идеальной жидкости, ограниченном твердой стенкой, на некотором участке которой производится вдув пузырьков газа в жидкость.

Способы описания движения смеси жидкости и газовых пузырей существенно зависят от размеров пузырьков и концентрации газа в смеси. Когда линейный размер пузырька R много меньше расстояния между соседними пузырьками l , а последнее гораздо меньше характерного линейного размера течения L , движение среды удобно рассматривать методами механики сплошной среды, вводя наряду с несущей средой (жидкостью) также непрерывную «среду» пузырьков.

В соответствии с этим подходом получены уравнения движения смеси в предположении, что пузырьки не движутся относительно жидкости [1, 2].

При изучении движения с учетом относительного движения жидкости и пузырьков может быть использован способ, применяющийся в работе [3] для описания движения газа с твердыми частичками или каплями. В отличие от [3] в исследуемом случае необходимо учитывать сжимаемость частичек (пузырьков), в то же время сжимаемостью несущей среды (жидкости) можно пренебречь по сравнению со сжимаемостью газа пузырьков.

1. Уравнения плоского стационарного движения смеси. Предположим, что все пузырьки сферические и одного сорта, т. е. если смесь привести в состояние покоя с постоянным давлением, то все пузырьки окажутся одинаковыми. Кроме того, будем считать, что столкновениями (а также слипанием и разрушением) пузырьков можно пренебречь. Вязкость учитывается только в процессах взаимодействия жидкости и пузырьков.

Обозначим плотности газа пузырьков и жидкости через ρ_1° , ρ_0° , средние плотности газа жидкости (т. е. массу газа или жидкости в единице объема смеси) — через ρ_1 , ρ_0 . Введем объемную концентрацию газа α . Имея в виду принятые выше предположения, можно ввести скорости жидкости u_0 , v_0 и пузырьков u_1 , v_1 , а также давление в жидкости p .

Обозначим через R радиус пузырька, через p_1 давление внутри пузырька.

Уравнения неразрывности и количества движения для стационарного плоского движения смеси будут такими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 u_0}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0 v_0}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y} &= 0 \\ u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0^\circ} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\rho_1}{\rho_0} f_x + F_{0x} \\ u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0^\circ} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\rho_1}{\rho_0} f_y + F_{0y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho_1^\circ} \frac{\partial p}{\partial x} &= f_x + F_{1x} \\
 u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho_1^\circ} \frac{\partial p}{\partial y} &= f_y + F_{1y} \\
 \alpha = \rho_1 / \rho_1^\circ &= 1 - \rho_0 / \rho_0^\circ
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

где \mathbf{f} — сила, действующая со стороны жидкости на пузырек, отнесенная к единице его массы. (Сюда следует включить силу вязкого трения и силу за счет эффекта «присоединенных масс».); F_0 и F_1 — внешние массовые силы. Сжимаемость смеси в основном определяется сжимаемостью газообразной фазы, поэтому жидкость будем считать несжимаемой.

Из сказанного выше следует также, что при сжатии (расширении) смеси тепло в основном выделяется в газообразной фазе, но так как масса газа в фиксированном объеме гораздо меньше массы жидкости, кроме того, жидкость обладает большой теплоемкостью и хорошей теплопроводностью, то для не очень быстрых процессов можно считать, что выделившееся тепло мгновенно поглощается жидкостью, не повышая при этом ее температуры, т. е. температура смеси остается неизменной. Вследствие этого для совершенного газа

$$\rho_0^\circ / \rho_1 = \text{const} \tag{1.2}$$

Для очень быстрых процессов (например, при прохождении ударной волны) процесс сжатия (расширения) пузырька можно считать адиабатическим

$$\rho_1^\circ / p_1^{1/\nu} = \text{const} \tag{1.3}$$

где ν — показатель адиабаты Пуассона для газа.

При движении смеси размеры пузырей будут меняться. Уравнение, описывающее расширение сферического пузырька, движущегося в безграничном ускоренном потоке жидкости, имеет вид [4]

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0|^2}{4} + \frac{p_1 - p_0}{\rho_0^\circ} \tag{1.4}$$

При выводе этого уравнения граничные условия на сфере удовлетворялись в среднем по поверхности сферы, пренебрегалось эффектом поверхностного натяжения. Известно, что период собственных колебаний маленького пузырька весьма мал. Поэтому во многих случаях характерное время задачи гораздо больше периода собственных колебаний пузырька, следовательно вместо уравнения (1.4) можно просто положить $p_1 = p_0$. Масса пузырей остается постоянной (пренебрегается процессами фазового перехода), поэтому

$$\rho_1^\circ R^3 = \text{const} \tag{1.5}$$

Уравнения (1.1) — (1.5) образуют замкнутую систему. Выпишем еще выражение для силы \mathbf{f} , считая, что, сила вязкого трения определяется законом Стокса

$$\mathbf{f} = k(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1) - \frac{1}{2} \frac{\rho_0^\circ}{\rho_1^\circ} \left[u_1 \frac{\partial(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)}{\partial x} + u_1 \frac{\partial(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)}{\partial y} + \frac{\dot{R}}{R}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) \right] \tag{1.6}$$

Величина k в стоксовском приближении имеет вид

$$k = 18\rho_0^\circ \nu_0 / \rho_1^\circ D^2$$

где $D = 2R$, ν_0 — кинематический коэффициент вязкости жидкости.

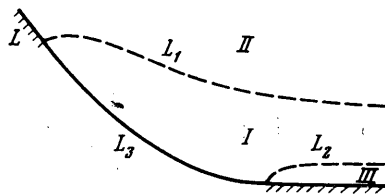
Многоскоростные эффекты при движении смеси жидкости с газовыми пузырьками должны проявляться при наличии значительных градиентов давления. Такие области, например, возникают при обтекании вогнутой стенки с закрутлением малого радиуса кривизны.

2. Постановка задачи. Пусть идеальная несжимаемая жидкость движется вдоль твердой стенки L . На участке, содержащем вогнутую часть стенки L_3 , в жидкость вдуваются пузырьки газа (фиг. 1). Крайние линии тока «среды» пузырьков L_1 и L_2 выделяют область 1, занятую смесью газа и жидкости. В областях 2 и 3 находится чистая жидкость, где применимы обычные уравнения Эйлера.

Граничными условиями для жидкой фазы являются обычные условия непротекания на всей стенке L . Для газа в качестве граничных условий следует задать все параметры на линии вдува L_3 — скорость входа пузырьков v_{10} , начальную скорость расширения пузырька R° и его начальный радиус R° , начальную объемную концентрацию газа α_0 и, наконец, плотность газа пузырьков при входе их в жидкость ρ_{10} . Все эти параметры являются в общем случае функциями точки на линии L_3 .

Объемная концентрация газа α может терпеть разрыв на линиях L_1 , L_2 . На этих разрывах из условий сохранения потоков массы и импульса получаются соотношения

$$v_{0n-} = (1 - \alpha)v_{0n+}, v_{0\tau-} = v_{0\tau+}, p_- - p_+ = \rho_0^\circ v_{0n-}(v_{0n+} - v_{0n-}) \quad (2.1)$$



Фиг. 1

Индексами n и τ отмечены нормальные и касательные составляющие скорости. Знак плюс относится к значениям параметров при подходе к L_1 , L_2 из области, занятой смесью, знак минус — из областей, занятых чистой жидкостью.

Таким образом, задача сводится к интегрированию системы (1.1) — (1.5) (в случае $\alpha = 0$ это — система уравнений для идеальной несжимаемой жидкости) с указанными выше граничными условиями и условиями на разрывах (2.1).

3. Случай малого влияния пузырьков на движение жидкости. Рассмотрим случай малого влияния газообразной фазы на течение жидкости (например, случай малой объемной концентрации газа). Разложим все величины по малому параметру ε — характерному значению объемной концентрации газа

$$\alpha = \varepsilon\alpha' + \dots, v_0 = V_0 + \varepsilon v' + \dots, v_1 = V_1 + \varepsilon v_1' + \dots$$

$$p = p_0 + \varepsilon p' + \dots, p_1 = p_{10} + \varepsilon p_1' + \dots \text{ и т. д.} \quad (3.1)$$

Подставим разложения (3.1) в уравнения (1.1) — (1.5), в соотношения на разрывах (2.1) и в граничные условия. В полученных уравнениях соберем члены, не содержащие ε . Тогда для жидкой фазы получим обычные уравнения идеальной несжимаемой жидкости для функций U_0 , V_0 , p_0 . Для среды пузырьков в этом случае имеем

$$U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{10}^\circ} \frac{\partial p_0}{\partial x} = f_{0x} + F_{1x}$$

$$U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{1}{\rho_{10}^{\circ}} \frac{\partial p_0}{\partial y} = f_{0y} + F_{1y} \quad (3.2)$$

$$R_0 \ddot{R}_0 + \frac{3}{2} \dot{R}_0^2 = \frac{(U_1 - U_0)^2 + (V_1 - V_0)^2}{4} + \frac{p_{10} - p_0}{\rho_0^{\circ}}$$

Собирая члены порядка ε , получим уравнения первого приближения

$$\frac{\partial \rho_{10}^{\circ} \alpha' U_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{10}^{\circ} \alpha' V_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_0'}{\partial x} + \frac{\partial v_0'}{\partial y} = \frac{\partial \alpha' U_0}{\partial x} + \frac{\partial \alpha' V_0}{\partial y} \quad (3.3)$$

$$u_0' \frac{\partial U_0}{\partial x} + v_0' \frac{\partial U_0}{\partial y} + U_0 \frac{\partial u_0'}{\partial x} + V_0 \frac{\partial u_0'}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0^{\circ}} \frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{\rho_{10}^{\circ}}{\rho_0^{\circ}} \alpha' f_{0x} \quad (3.4)$$

$$u_0' \frac{\partial V_0}{\partial x} + v_0' \frac{\partial V_0}{\partial y} + U_0 \frac{\partial v_0'}{\partial x} + V_0 \frac{\partial v_0'}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0^{\circ}} \frac{\partial p'}{\partial y} = -\frac{\rho_{10}^{\circ}}{\rho_0^{\circ}} \alpha' f_{0y}$$

$$f_0 = k_0 (V_0 - V_1) -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{\rho_0^{\circ}}{\rho_{10}^{\circ}} \left[U_1 \frac{\partial (V_1 - V_0)}{\partial x} + V_1 \frac{\partial (V_1 - V_0)}{\partial y} + \frac{\dot{R}_0}{R_0} (V_1 - V_0) \right]$$

$$\dot{R}_0 = U_1 \frac{\partial R_0}{\partial x} + V_1 \frac{\partial R_0}{\partial y}$$

$$\ddot{R}_0 = U_1^2 \frac{\partial^2 R_0}{\partial x^2} + V_1^2 \frac{\partial^2 R_0}{\partial y^2} + 2U_1 V_1 \frac{\partial^2 R_0}{\partial x \partial y} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \frac{\partial R_0}{\partial x} +$$

$$+ V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} \frac{\partial R_0}{\partial x} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial R_0}{\partial y} + U_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial R_0}{\partial y}$$

Сюда же добавятся уравнения, аналогичные (3.2), для функций u_1' , v_1' , R' .

Предположим, что известно решение задачи о течении идеальной несжимаемой жидкости, ограниченном твердой стенкой L . Уравнения (3.2) можно трактовать теперь как уравнения движения пузырьков в заданном поле течения жидкости. Но так как пузырьки непосредственно друг с другом не взаимодействуют, то можно изучать движение каждого из них изолированно. В этом случае $U_1 = \dot{x}$, $V_1 = \dot{y}$ и система (3.2) примет вид

$$\mu \ddot{x} = -\frac{1}{\rho_{10}^{\circ}} \frac{\partial p_0}{\partial x} + k_0 (U_0 - \dot{x}) + \frac{1}{2} \frac{\rho_0^{\circ}}{\rho_{10}^{\circ}} \left[\dot{x} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\dot{R}_0}{R_0} (U_0 - \dot{x}) \right]$$

$$\mu \ddot{y} = -\frac{1}{\rho_{10}^{\circ}} \frac{\partial p_0}{\partial y} + k_0 (V_0 - \dot{y}) + \frac{1}{2} \frac{\rho_0^{\circ}}{\rho_{10}^{\circ}} \left[\dot{x} \frac{\partial V_0}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\dot{R}_0}{R_0} (V_0 - \dot{y}) \right]$$

$$R_0 \ddot{R}_0 + \frac{3}{2} \dot{R}_0^2 = \frac{(U_1 - U_0)^2 + (V_1 - V_0)^2}{4} + \frac{p_{10} - p_0}{\rho_0^{\circ}} \quad (3.5)$$

Здесь $\mu = 1 + 0.5\rho_0^{\circ}/\rho_{10}^{\circ}$. Так как U_0 , V_0 и p_0 — известные функции координат, ρ_{10}° и p_{10} — функции R_0 , то система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.5) является замкнутой. Начальными условиями для нее будут граничные условия на линии L_3 , а именно при $t = 0$ $x = x_0$, $y = y_0$ ($x_0, y_0 \in L_3$), $\dot{x} = U_{10}$, $\dot{y} = V_{10}$, $R_0 = R^{\circ}$, $\dot{R}_0 = \dot{R}^{\circ}$. Интегрируя систему (3.5) с этими начальными условиями, получим поле движения пузырьковой среды.

В уравнение (3.3) удобно перейти от переменных x, y к переменным x_0, t . В этих переменных уравнение примет вид:

$$\frac{1}{\rho_{10}^{\circ} \alpha'} \frac{\partial \rho_{10}^{\circ} \alpha'}{\partial t} = - \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial t}$$

$$M = U_1 \partial y / \partial x_0 - v_1 \partial x / \partial x_0$$

Интегрируя это уравнение по t , получим

$$\alpha' \rho_{10}^{\circ} M = \alpha_0' \rho_{10}^{\circ} M_0 \quad (3.6)$$

где $M_0 = U_{10} dy_0 / dx_0 - V_{10}$ и α_0' — заданные на L_3 функции.

Система уравнений (3.4) описывает возмущение жидкости пузырьками в первом приближении. Запишем два последних уравнения системы (3.4) в форме Громека — Ламба

$$\begin{aligned} \partial P / \partial x - V_0 \Omega &= -F_x, & \partial P / \partial y + U_0 \Omega &= -F_y \\ \Omega &= \partial v_0' / \partial x - \partial u_0' / \partial y, & P &= u_0' U_0 + v_0' V_0 + p' / \rho_0^{\circ} \\ F_x &= \alpha' f_{0x} \rho_{10}^{\circ} / \rho_0^{\circ}, & F_y &= \alpha' f_{0y} \rho_{10}^{\circ} / \rho_0^{\circ} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь F_x и F_y после интегрирования системы (3.2) являются известными функциями координат. Кроме того, предполагаем, что невозмущенное течение жидкости безвихревое, в противном случае уравнение (3.7) нужно дополнить членом, связанным с вихрем невозмущенного течения.

Из уравнений (3.7) легко получаем одно уравнение для функции P

$$U_0 \partial P / \partial x + V_0 \partial P / \partial y = -(U_0 F_x + V_0 F_y)$$

В линейном приближении соотношения на разрывах (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned} v_{0n-}' &= v_{0n+}' - \alpha' W_{0n}, & v_{0\tau-}' &= v_{0\tau+}' \\ p_{-}' - p_{+}' &= \rho_0^{\circ} \alpha' W_{0n}^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь W_{0n} — нормальная составляющая скорости невозмущенного течения жидкости на L_1 или L_2 .

Из определения величины P и соотношений (3.8) следует, что функция P непрерывна при переходе через линии разрывов.

Характеристиками уравнения (3.7) являются линии тока невозмущенного течения. Пусть $\Psi(x, y)$ — функция тока этого течения. В уравнении (3.7) перейдем от переменных x, y к новым — x, Ψ . В новых переменных имеем

$$\partial P / \partial x = -F_x - F_y V_0 / U_0 \quad (3.9)$$

Предположим, что возмущения затухают на бесконечности вверх по потоку. Тогда во всей области 2 и на линии L_1 величина $P = 0$. Следовательно, функция P в областях 1 и 3 может быть вычислена соответственно по формулам

$$P = - \int_{x_1}^x \Phi(x, \Psi) dx, \quad P = - \int_{x_1}^{x_2} \Phi(x, \Psi) dx \quad (3.10)$$

где $\Phi(x, \Psi) = F_x - F_y V_0 / U_0$, $x = x_1(\Psi)$, $x = x_2(\Psi)$ — уравнения линий L_1 и L_2 в переменных x, Ψ . Разрешая любое из уравнений (3.7) относительно Ω , получим для области 1, имея в виду соотношение (3.10)

$$\Omega = -F_y / U_0 - \partial P / \partial \Psi = -\frac{F_y}{U_0} - \Phi(x_1, \Psi) \frac{dx_1}{d\Psi} + \int_{x_1}^x \frac{\partial \Phi(x, \Psi)}{\partial \Psi} dx \quad (3.11)$$

В области 2, очевидно, $\Omega = 0$, в области 3, используя соотношение (3.10), получим

$$\Omega = -\partial P / \partial \Psi = \Phi(x_2, \Psi) \frac{dx_2}{d\Psi} - \Phi(x_1, \Psi) \frac{dx_1}{d\Psi} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi(x, \Psi)}{\partial \Psi} dx \quad (3.12)$$

4. Поле скоростей возмущенного течения жидкости. Введем функцию тока возмущенного течения ψ в областях 1, 2, 3 соответственно формулами

$$\begin{aligned} u_0' &= \partial \psi / \partial y + \alpha' U_0, & v_0' &= -\partial \psi / \partial x + \alpha' V_0 \\ u_0' &= \partial \psi / \partial y, & v_0' &= -\partial \psi / \partial x \end{aligned} \quad (4.1)$$

Уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно; функция ψ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \psi = -\Omega + V_0 \alpha' / \partial x - U_0 \alpha' / \partial y; \quad 0; \quad -\Omega \quad (4.2)$$

в областях 1, 2 и 3 соответственно с условием $\psi = 0$ на границе L , а на L_1, L_2 должны выполняться соотношения

$$\partial \psi / \partial n_- = \partial \psi / \partial n_+ + \alpha' W_{0\tau}, \quad \partial \psi / \partial \tau_- = \partial \psi / \partial \tau_+ \quad (4.3)$$

Здесь $W_{0\tau}$ — касательная составляющая скорости невозмущенного течения на L_1 или L_2 .

Покажем, что если для всей области течения можно построить функцию Грина, то решение задачи (4.2), (4.3) можно свести к квадратурам.

Предположим, что функция ψ непрерывна всюду в области течения, а каждая из областей S_i ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяет всем условиям, необходимым для написания формулы Грина. Для i -й области имеем

$$2\pi \psi_i(M_0) = \int_{G_i} (G \partial \psi / \partial n - \psi \partial G / \partial n) dl - \iint_{S_i} \Delta \psi G ds$$

где G_i — граница области S_i , включающая соответствующую часть линии L и линий L_1 или L_2 . Функция G гармоническая всюду, кроме точки M_0 , где имеет особенность вида $\ln [1/r(M, M_0)]$ ($r(M, M_0)$ — расстояние между точками M и M_0). Если точка $M_0 \notin S_i$, то $\psi_i(M_0) = 0$. Функция $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ совпадает с одной из функций ψ_i в соответствующей области S_i , где находится точка M_0 . Но так как ψ_i есть решение соответствующего уравнения Пуассона в области S_i , то ψ дает решение во всей области течения. Поскольку ψ, G и $\partial G / \partial n$ непрерывны на L_1 и L_2 , то

$$2\pi \psi = - \int_{L_1} G \alpha' W_{0\tau} dl + \int_{L_2} G \alpha' W_{0\tau} dl + \int_L [G \partial \psi / \partial n - \psi \partial G / \partial n] dl - \iint_S \Delta \psi G ds$$

Подобрав функцию G так, чтобы она обращалась в нуль на границе L (т. е. построив обычную функцию Грина для задачи Дирихле) и учитывая, что функция тока $\psi = 0$ на L , получим

$$2\pi \psi = - \int_{L_1} G \alpha' W_{0\tau} dl + \int_{L_2} G \alpha' W_{0\tau} dl - \iint_{S_1+S_3} \Delta \psi G ds \quad (4.4)$$

Для задачи о течении тяжелой жидкости вдоль плоской стенки, из которой производится вдув пузырьков, функция Грина имеет вид: $G = \ln [r_0 / r_1]$, где r_1 — расстояние между точками M и M_0 , r_0 — расстояние между M и точкой, симметричной M_0 относительно плоской стенки. Тогда решение дается формулой

$$2\pi\psi = - \int_{L_1} \ln [r_0 / r_1] \alpha' W_{0\tau} dl + \int_{L_2} \ln [r_0 / r_1] \alpha' W_{0\tau} dl - \iint_{S_1+S_3} \Delta\psi \ln [r_0 / r_1] ds \quad (4.5)$$

В случае течения вдоль произвольной стенки с вдувом пузырьков можно по формуле (4.5) формально построить функцию ψ_0 , удовлетворяющую уравнениям (4.2) и условиям на разрывах (4.3), но не удовлетворяющую граничному условию. Пусть на границе $\psi_0 = \Gamma$. Построим функцию $\phi = \psi - \psi_0$, где ψ — решение рассматриваемой задачи.

Функция ϕ непрерывна всюду вместе с производными и удовлетворяет уравнению Лапласа во всей области. Кроме того, она непрерывна на границе.

Для решения такой задачи достаточно найти конформное отображение области на полуплоскость или на внутренность единичного круга. Решение дается интегралом Пуассона для полуплоскости или круга соответственно.

5. **Случай плоской твердой стенки.** Рассмотрим задачу о движении тяжелой жидкости вдоль плоскости с щелью шириной $2L$, через которую происходит вдув пузырьков, причем пренебрежем изменением размера пузырьков при движении.

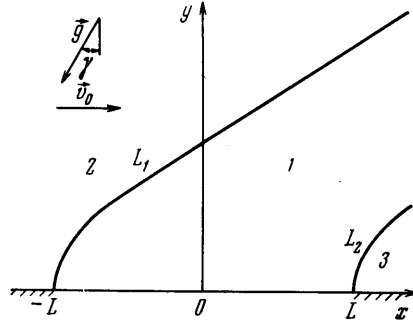
В данном случае невозмущенное течение есть поступательное движение жидкости вдоль плоскости, наклоненной под углом γ к горизонту, со скоростью v_0 (фиг. 2). Пусть пузырьки выходят из щели с одинаковой скоростью w . Предположим, что и начальная объемная концентрация газа постоянна. Введем следующие безразмерные характеристики: число Фруда $Fr = v_0^2 / gL$; число Рейнольдса $Re = v_0 L / \nu_0$, $\rho^0 = \rho_0^0 / \rho_1^0$, $w_0 = w / v_0$, $R = R_0 / L$ и безразмерные скорости, плотность и давление, отнеся их к v_0 , ρ_0^0 , $\rho_0^0 v_0^2$ соответственно.

Уравнения (3.5) примут вид

$$\begin{aligned} \mu \ddot{x} &= k_0(1 - \dot{x}) + \rho^0 \sin \gamma / Fr \\ \mu \ddot{y} &= -k_0 \dot{y} + \rho^0 \cos \gamma / Fr \end{aligned} \quad (5.1)$$

с начальными условиями:

$$x = x_0, y = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} = w_0 \text{ при } t = 0$$



Фиг. 2

Причем $-1 \leq x_0 \leq 1$ и коэффициент Стокса $k_0 = 18\rho^0 / Re D^2$. Проинтегрировав систему (5.1), получим уравнение траекторий пузырьков в следующем виде:

$$x = x_0 + u^*(z - 1 - \ln z)\mu / k_0 \quad y = [(v^* - w_0)(z - 1) - v^* \ln z]\mu / k_0 \quad (5.2)$$

Для скоростей пузырьков получаются выражения

$$\begin{aligned} u_1 = \dot{x} &= u^*(1 - z), & v_1 = \dot{y} &= (w_0 - v^*)z + v^* \\ u^* &= 1 + \rho^0 \sin \gamma / k_0 Fr, & v^* &= \rho^0 \cos \gamma / k_0 Fr, & z &= \exp(-tk_0 / \mu) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь u^* , v^* — значения u_1 , v_1 при $t \rightarrow \infty$, x_0 — координата начального положения пузырька. Для маленьких пузырьков величина k_0 / μ велика, и, следовательно, пузырьки за время порядка μ / k_0 выходят на прямые траектории, параллельные прямой $y = xv^* / u^*$. Для объемной концентрации α' согласно соотношению (3.6) получим

$$\alpha' = \alpha_0' w_0 / v_1 \quad (5.4)$$

Правые части уравнений (3.7) в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} F_x &= k_0 \frac{\alpha_0' w_0}{v_1 \rho^0} \left[\frac{u^* z}{\mu} + 1 - u^* \right] \\ F_y &= k_0 \frac{\alpha_0' w_0}{x_1 \rho^0} \left[\frac{(v^* - w_0) z}{\mu} - v^* \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

В области 1 двухфазного потока $P = -F_x(x_0 + 1)$, F_x зависит только от z . В области 3 $P = -2F_x$.

Таким образом функция P , являющаяся линейной добавкой к полному давлению невозмущенного течения, ведет себя следующим образом вдоль линии тока невозмущенного течения: $P = 0$ в области 2, линейно растет (или убывает) в области 1 и остается постоянной в области 3.

В областях 1 и 3 соответственно

$$\begin{aligned} \Omega &= -(x_0 + 1)L(z) + M(z) + \frac{k_0}{\mu} \frac{w_0(w_0 - v^*)}{v_1^3} z \\ \Omega &= -2L(z) \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{k_0^2}{\mu} \frac{\alpha_0' w_0}{\rho^0 v_1^3} \left[\frac{u^* v^*}{\mu} - (1 - u^*)(w_0 - v^*) \right] z \\ M(z) &= \frac{k_0^2}{\mu} \frac{\alpha_0' w_0}{\rho^0 v_1} \left[\frac{u_1}{v_1} \left(\frac{u^* z}{\mu} + 1 - u^* \right) + \frac{v^* - w_0}{\mu} z - v^* \right] - \frac{k_0}{\mu} \frac{w_0(w_0 - v^*)}{v_1^3} z \end{aligned}$$

Решение уравнения Пуассона приобретает вид

$$\begin{aligned} 2\pi\psi &= - \int_{L_1} \alpha' W_{0\tau} \ln [r_0/r_1] dl + \int_{L_2} \alpha' W_{0\tau} \ln [r_0/r_1] dl - \\ &- \iint_{S_1} [(x_0 + 1)L(z) + M(z)] \ln [r_0/r_1] ds - 2 \iint_{S_3} L(z) \ln [r_0/r_1] ds \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь

$$r_1^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2, \quad r_0^2 = (x - x')^2 + (y + y')^2$$

x', y' ; x, y — координаты точек M_0 и M соответственно. Перейдем от переменных x, y к переменным x_0, z (или l) по формулам (5.2); при этом

$$dl = \sqrt{u_1^2 + v_1^2} dt, \quad ds = v_1 dx_0 dt$$

Справедливо дифференцирование по параметрам x', y' под знаком интегралов (5.7). Компоненты скорости жидкости u_0', v_0' можно получить путем дифференцирования ψ по координатам x', y' , причем в (5.7) достаточно под интегралом вместо $\ln [r_0/r_1]$ написать

$$\begin{aligned} \partial / \partial y' [\ln r_0 / r_1] &= (y + y') / r_0^2 + (y - y') / r_1^2 \\ \partial / \partial x' [\ln r_0 / r_1] &= (x - x') (1 / r_1^2 - 1 / r_0^2) \end{aligned}$$

или

После некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} 2\pi \partial\psi / \partial y' &= \alpha_0' w_0 \int_0^{+\infty} \frac{u_1}{v_1} \left[\left(\frac{y + y'}{r_0^2} + \frac{y - y'}{r_1^2} \right)_{x_0=+1} - \left(\frac{y + y'}{r_0^2} + \frac{y - y'}{r_1^2} \right)_{x_0=-1} \right] dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} v_1 L(z) \left[(y + y') \ln \frac{(a + 1)^2 + (y + y')^2}{(a - 1)^2 + (y + y')^2} + (y - y') \ln \frac{(a + 1)^2 + (y - y')^2}{(a - 1)^2 + (y - y')^2} \right] dt + \\ &+ \int_0^{+\infty} [(a - 1)L(z) - M(z)] v_1 \left[\arctg \frac{a + 1}{y + y'} + \arctg \frac{a + 1}{y - y'} - \arctg \frac{a - 1}{y + y'} - \right. \\ &\left. - \arctg \frac{a - 1}{y - y'} \right] dt - 2 \int_0^{+\infty} v_1 L(z) \left[\frac{\pi}{2} + (-1)^{\delta} \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{a + 1}{y + y'} - \arctg \frac{a + 1}{y - y'} \right] dt \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь $\delta = 0$, если $y > y'$, и $\delta = 1$, если $y < y'$, $a = u^*(z - 1 - \ln z)\mu / k_0 - x'$.
 Перейдем в (5.8) к пределу при $x' \rightarrow +\infty$; после интегрирования и ряда преобразований получим профиль скорости на бесконечности

$$u_0' = \frac{w_0}{v_1} z_0 u_0' \Big|_{y'=0} \tag{5.9}$$

$$y' = \frac{\mu}{k_0} \left[\left(\frac{\rho^0 \cos \gamma}{k_0 Fr} - w_0 \right) (z_0 - 1) - \frac{\rho^0 \cos \gamma}{k_0 Fr} \ln z_0 \right]$$

При $y' \rightarrow \infty$ имеем $u_0' \rightarrow 0$, а модуль скорости достигает максимума при $y' = 0$, т. е. на стенке. Причем не изменяет знака при $0 \leq y' < +\infty$ ($1 \geq z_0 > 0$). При $y' = 0$

$$u_0' |_{y'=0} = 2 \frac{\alpha_0' k_0}{\mu \rho^0} \left(\frac{\rho^{02} \sin \gamma}{2k_0 Fr} - 1 - \mu w_0 \operatorname{tg} \gamma \right) \tag{5.10}$$

Вертикальная же составляющая скорости жидкости $v_0' \rightarrow 0$ при $x' \rightarrow +\infty$.

В поставленной задаче пузырьки оказывают двойное действие на жидкость: с одной стороны, это — тормозящее воздействие в результате ускорения пузырьков вблизи щели потоком, а также подсоса жидкости вдоль стенки к щели, с другой стороны, вдали от щели пузырьки за счет архимедовой силы движутся быстрее жидкости и оказывают ускоряющее действие на поток. Если желателен последний эффект, то согласно (5.10) выгодно иметь небольшие числа k_0 (т. е. большие $\operatorname{Re} D^2$) и небольшие числа Fr . Из (5.9) и (5.10) следует, что при стремлении $w_0 \rightarrow 0$ скорость $u_0' \rightarrow 0$ всюду, кроме точки $y' = 0$ (при уменьшении w_0 скорость все быстрее убывает при удалении от стенки).

При больших скоростях вдува пузырьков скорость $u_0' |_{y'=0}$ становится отрицательной из-за сильного подсоса жидкости к щели. Знак и величина скорости зависят также от угла наклона плоскости к горизонту. Так, если плоскость горизонтальна, то $u_0' |_{y'=0} = -2k_0 / \mu \rho^0$. При $\gamma = \pi / 2$ в линейном приближении возникает особенность, так как сечение области, занятой смесью пузырьков и жидкости, уменьшается до нуля на бесконечности. В этом случае, как следует из соотношения (5.4), $\alpha_0' \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, что противоречит предположению о малости α . Таким образом, нужно значения γ , близкие к $\pi / 2$, исключить из рассмотрения.

Скорость жидкости на бесконечности достигает максимальных значений при углах γ , удовлетворяющих соотношению

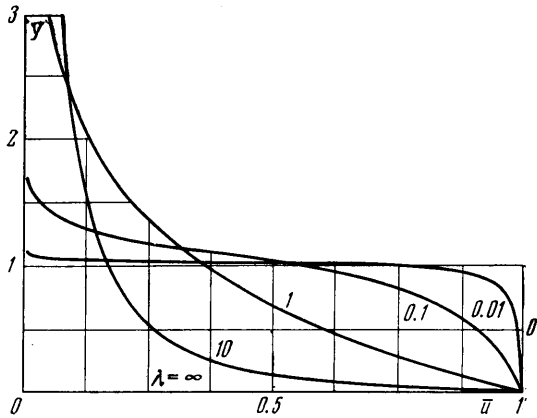
$$\cos \gamma = \sqrt[3]{\kappa}, \quad \kappa = 18Frw_0 / c, \quad c = \operatorname{Re} D^2 \tag{5.11}$$

Это выражение имеет смысл, если $\kappa \leq 1$. При больших ρ^0 (для смеси воздух — вода $\rho^0 \sim 10^3$) и не очень малых w_0 условием ускорения потока пузырьками (т. е. $u_0' |_{y'=0} > 0$) является $\kappa < \cos \gamma$ и отмеченное выше условие заведомо выполняется. Графики скорости жидкости

$$\bar{u} \equiv \frac{u_0'}{u_0' |_{y'=0}} = z_0 / [\lambda(1 - z_0) + z_0]$$

$$Y \equiv yk_0 / (\mu w_0) = (\lambda - 1)(z_0 - 1) - \lambda \ln z_0$$

$$\lambda = \cos \gamma / \kappa \tag{5.12}$$



Фиг. 3

представлены на фиг. 3. В предельных случаях при $\lambda \rightarrow \infty$ получается $\bar{u} = 0$ при $Y > 0$ и $\bar{u} = 1$ при $Y = 0$; при $\lambda \rightarrow 0$ имеем $\bar{u} = 1$ при $Y \geq 0$. При $\lambda = 1$ профиль описывается уравнением $\bar{u} = \exp(-Y)$. При малых w_0 , и $\text{Re } R^2$ в физической плоскости \bar{u} быстро убывает с ростом y' . При $\lambda < 1$ кривые имеют точку перегиба (см. фиг. 3). В качестве малого параметра задачи ε выберем начальную объемную концентрацию пузырей ($\alpha_0' = 1$).

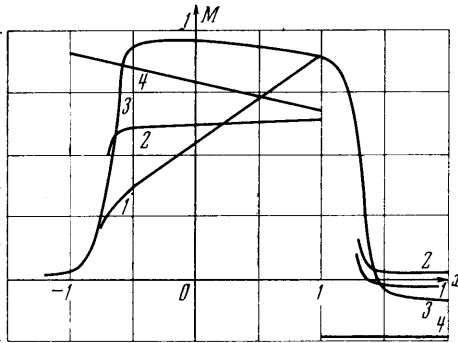
Обозначим через u_m величину скорости $u_0'|_{y'=0}$ в бесконечности вниз по потоку при значениях параметра κ , удовлетворяющих соотношению (5.11). Из соотношений (5.10) и (5.11), предполагая, что $\rho^0 \gg 1$, имеем

$$u_m = \frac{2}{\text{Fr}} \left[(1 - \kappa^2/3)^{3/2} - \frac{36 \text{ Fr}}{c\rho_0} \right] \quad (5.13)$$

причем скорость u_m имеет смысл вводить только при $0 \leq \kappa \leq 1$. При больших числах Fr (малых g) величина u_m становится отрицательной. Уменьшая Fr , можно

получить большие положительные u_m . Кроме того, зависимость u_m от параметра κ , как это видно из (5.13), можно считать универсальной.

На фиг. 4 представлены результаты численных расчетов по формулам (5.8). Даны графики изменения скорости u_0' вдоль стенки для угла наклона $\gamma = 0.9$. Следует отметить, что графики $u_0'(x)$ нанесены в разных масштабах M . Величина этого масштаба, а также параметры, для которых велся расчет, следующие: для кривой 1 $u_0' = 2M$, $\text{Fr} = 1$, $c = 1$, $w_0 = 0.001$, для кривой 2 $u_0' = M$, $\text{Fr} = 10$, $c = 1$, $w_0 = 0.001$, для кривой 3 $u_0' = 500M$, $\text{Fr} = 10$, $c = 1$, $w_0 = 1$ и для кривой 4 $u_0' = 50M$, $\text{Fr} = 10$, $c = 10^{-2}$, $w_0 = 0.001$. Кривые 1, 2, 4 получены при малых скоростях вдува. Как было



Фиг. 4

установлено ранее, функция u_0' терпит разрыв в точках $x = \pm 1$, в интервале $(-1 \leq x \leq 1)$ графики этих функций быстро выходят на прямые, а ниже щели (при $x > 1$) быстро стремятся к постоянной. При этом значения $u_0' = \text{const}$ совпадают с величинами, вычисленными по формуле (5.10).

При $c = 10^{-2}$ (кривая 4) функция $u_0'(x)$ практически всюду (с точностью нанесения точек на график) является прямой.

При больших скоростях вдува ($w_0 = 1$, кривая 3) функция меняется более плавно, а скачок скорости в точках $x = \pm 1$ мал по сравнению с величиной u_0' .

В области выше щели ($x < -1$) величина $P = 0$ и, значит, $p' = -u_0'$. Здесь $u_0' > 0$ и монотонно убывает с уменьшением x (при $x \rightarrow -\infty$; $u_0' \rightarrow 0$) во всех случаях, кроме того, которому на фиг. 4 соответствует кривая 2. В этом случае имеется область отрицательных скоростей u_0' (положительных p'); u_0' сначала растет, а начиная с $x = -1.7$ монотонно убывает. Таким образом, не всегда основное влияние на течение жидкости выше щели оказывает подсасывающий эффект. При некоторых значениях параметров жидкость у стенки наоборот притормаживается перед щелью.

Автор благодарен Г. Г. Черному за предложенную тему и постоянное внимание к работе.

Поступило 29 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6.
2. Бэтчелор Г. К. Волны сжатия в суспензии газовых пузырьков в жидкости. Механика. Сб. перев. иностр. статей, 1968, № 3.
3. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течения двускоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
4. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1960, № 3.