

УДК 532.529.2

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ ВНЕШНИХ СИЛ

Г. С. МАРКМАН, В. И. ЮДОВИЧ

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости, находящемся в периодически модулированном поле силы тяжести (или при периодически изменяющемся градиенте температуры). Изучается влияние частоты модуляции на устойчивость. Модуляция стабилизирует равновесие, если направление силы тяжести одно и то же во все моменты времени. В противном случае стабилизация имеет место лишь при достаточно больших частотах.

В работе [1] численно исследована зависимость критического числа Рэлея от амплитуды модуляции внешней силы при нескольких фиксированных значениях частоты. Во всех рассмотренных в [1] случаях модуляция оказывает стабилизирующее влияние.

1. Основные уравнения. Рассмотрим горизонтальный слой несжимаемой вязкой жидкости со свободными границами. Пусть внешняя сила, действующая на единицу массы жидкости, вертикальна и периодически изменяется со временем по закону

$$f = g(1 + \eta \sin \Omega t) \quad (g, \eta = \text{const}) \quad (1.1)$$

Жидкость подогревается снизу, причем температура на нижней границе равна a , на верхней границе нулю.

Уравнения малых возмущений равновесия в безразмерной форме имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} &= -\nabla P + \Delta \mathbf{v}' + R(1 + \eta \sin \omega t) \theta' \mathbf{j} \\ \sqrt{p} \frac{\partial \theta'}{\partial t} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{j}) &= \Delta \theta', \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0 \\ R &= \frac{g \beta a h^4}{\nu \chi}, \quad p = \frac{\nu}{\chi}, \quad \omega = \frac{h^2}{\sqrt{\nu \chi}} \Omega \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь R и p — числа Рэлея и Прандтля, ω — безразмерная частота модуляции, $2h$ — толщина слоя, \mathbf{j} — единичный вектор оси z , направленный вертикально вниз.

Решение системы (1.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= (v_1(t), v_2(t), w(t)) \exp i(\alpha_1 x + \alpha_2 y - \pi z) \\ \theta' &= \theta(t) \exp i(\alpha_1 x + \alpha_2 y - \pi z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в уравнения (1.2), исключая давление P , v_1 , v_2 , получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $\theta(t)$ и $w(t)$:

$$\frac{1}{\sqrt{p}} w' + k_0^2 w = \frac{\alpha^2}{k_0^2} R(1 + \eta \sin \omega t) \theta \quad (1.4)$$

$$\sqrt{p} \theta' + k_0^2 \theta = w, \quad k_0^2 = \alpha^2 + \pi^2, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \quad (1.5)$$

Систему (1.4), (1.5) можно свести к одному уравнению

$$\theta'' + k_0^2 q \theta' + \left[k_0^4 - R \frac{\alpha^2}{k_0^2} (1 + \eta \sin \omega t) \right] \theta = 0, \quad q = \frac{1+p}{\sqrt{p}} \quad (1.6)$$

Будем предполагать, что критическому значению R_* числа Рэлея соответствует периодическое по времени с периодом $T = 2\pi/\omega$ нейтральное возмущение («принцип изменения устойчивости»). Определение границы устойчивости тогда сводится к вычислению наименьшего значения R_* числа Рэлея, которому соответствует T -периодическое решение уравнения (1.6). Заметим, что в случае $\eta \leq 1$ это предположение доказано в [2]; вопрос о возможности возникновения двоякопериодических режимов в случае $\eta > 1$ остается пока открытым.

Трансцендентное уравнение для определения R_* получим, следуя схеме, предложенной в [3, 4].

Решение уравнения (1.6) ищем в виде ряда Фурье

$$\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (1.7)$$

Коэффициенты c_n в силу (1.6) удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$a_n c_n + c_{n-1} - c_{n+1} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.8)$$

$$\phi \quad a_n = \frac{2k_0^4 q n \omega}{\alpha^2 \eta R} - i \frac{2k_0^4}{\alpha^2 \eta R} \left(k_0^4 - \frac{\alpha^2 R}{k_0^2} - n^2 \omega^2 \right) \quad (1.9)$$

Будем разыскивать решения системы (1.8) такие, что $|c_n| \rightarrow 0$ при $|n| \rightarrow \infty$. (Тогда, как нетрудно вывести из (1.8), коэффициенты c_n при $|n| \rightarrow \infty$ убывают экспоненциально и, значит, представляют собой коэффициенты Фурье функции θ , аналитической по t .)

Система (1.8) приводится к виду

$$a_n \left(1 + \frac{1}{\rho_n} \right) = \rho_{n+1}, \quad \rho_n = \frac{c_n}{c_{n-1}} \quad (1.10)$$

Для доказательства законности перехода от (1.8) к (1.10) покажем, что для решения системы (1.8) ни один из коэффициентов c_n не может обращаться в нуль. Действительно, если, например, $c_k = 0$ при $k \geq 0$ (в случае $k < 0$ доказательство аналогичное), то из (1.8) получаем

$$\rho_{k+2} = a_{k+1} \quad (1.11)$$

Так как $\operatorname{Re} a_n > 0$ при $n > 0$, из (1.11) следует, что $\operatorname{Re} \rho_{k+2} = \operatorname{Re} a_{k+1} > 0$. Теперь можно воспользоваться уравнениями (1.10) при $n = k+2, k+3, \dots$ и получить по индукции неравенства

$$\operatorname{Re} \rho_{n+1} = \operatorname{Re} a_n + \frac{\operatorname{Re} \rho_n}{|\rho_n|^2} \geq \operatorname{Re} a_n > 0 \quad (1.12)$$

Но это невозможно, так как $\operatorname{Re} a_n \rightarrow \infty$, $|c_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из (1.10) при помощи цепных дробей выводим два представления для ρ_n

$$\rho_n = - \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}}, \quad \rho_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-3} + \dots}} \quad (1.13)$$

Требую, чтобы эти два выражения для ρ_n совпадали, получим уравнение для определения R

$$i \frac{a_0}{2} = \text{Im} \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad (1.14)$$

Это уравнение связывает пять параметров: R , p , α , η , ω . Рассмотрим зависимость R_* от каждого из них. При этом остальные три параметра будем фиксировать.

Уравнение (1.14) решалось численно на ЭВМ «Мир» и ODR-1204¹. Заметим, что, как уже отмечалось в [1], к уравнению (1.6) сводится также задача о возникновении конвекции в слое со свободными границами, когда равновесный градиент температуры имеет вид

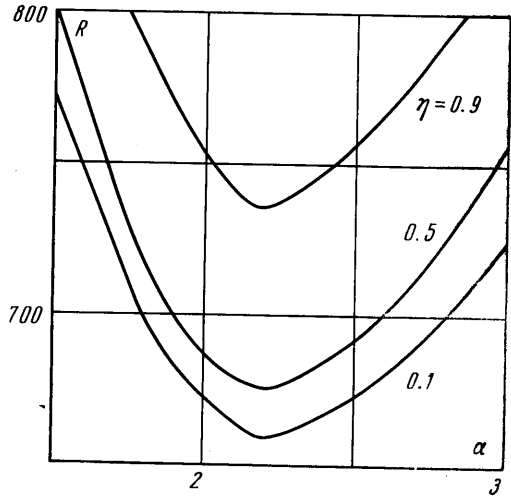
$$\nabla \theta_0 = -a(1 + \eta \sin \Omega t)$$

Поэтому последующие результаты применимы и к этой задаче.

2. Действие знакопостоянной внешней силы. Рассмотрим случай, когда амплитуда $\eta < 1$. Тогда имеет место следующая оценка критического числа Рэлея [2]:

$$\frac{R_0}{1 + \eta} \leq R_* \leq \frac{R_0}{1 - \eta}, \quad R_0 = \frac{k_0^6}{\alpha^2} \quad (2.1)$$

Здесь R_0 — число Рэлея при отсутствии модуляции. На фиг. 1 изображены нейтральные кривые на плоскости R , α при $\omega = 10$, $p = 1$ и нескольких значениях η . (Точки выше нейтральной кривой соответствуют неустойчивости.) Наименьшему R на нейтральной кривой соответствует значение α , которое в рассматриваемых здесь случаях практически не отличается от $\alpha_* = 2.2$, что соответствует стационарной задаче.



Фиг. 1

Как видно из фиг. 1, с увеличением амплитуды η величина R_* растет: модуляция стабилизирует равновесный режим. Это согласуется и с результатами работы [1].

Расчет зависимости R_* от числа Прандтля при фиксированных значениях $\alpha = 2.2$, $\eta = 0.9$, $\omega = 1$ представлен на фиг. 2 (на горизонтальной оси выбран логарифмический масштаб). Заметим, что самое большое критическое значение R_* получается при минимальном $q = 2$, т. е. при $p = 1$.

Рассмотрим влияние частоты модуляции на возникновение конвекции. В случае высоких частот нетрудно получить асимптотическую формулу для границы устойчивости. Для этого, полагая в (1.6) $\tau = \omega t$, получим

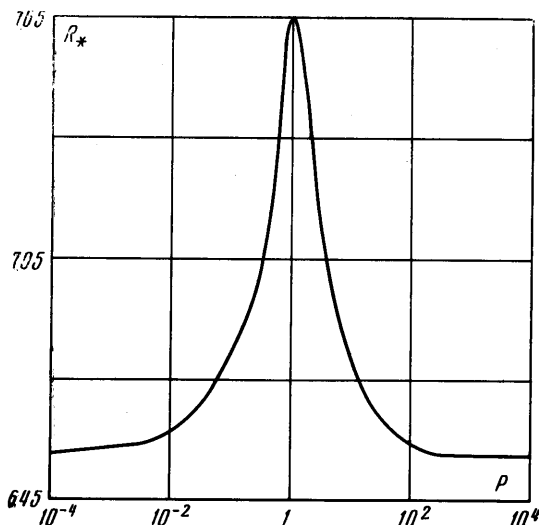
$$\ddot{\theta} + \varepsilon q k_0^2 \dot{\theta} + \varepsilon^2 [k_0^4 - \alpha^2 k_0^{-2} R (1 + \eta \sin \tau)] \theta = 0, \quad \varepsilon = 1/\omega \quad (2.2)$$

¹ Результаты расчетов были проверены частично с помощью прямого численного интегрирования уравнения (1.6) методом Рунге — Кутты в сочетании с методом секущих. Пользуясь случаем, авторы благодарят И. П. Андрейчикова, который составил соответствующую программу.

Будем разыскивать θ и R в виде рядов по малому параметру ε

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \theta_k, \quad \int_0^{2\pi} \theta d\tau = 1, \quad R = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k R_k \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и приравнявая члены, содержащие ε в одинаковой степени, получим систему уравнений, из которых последовательно определим коэффициенты θ_k и R_k . Ограничиваясь тремя первыми членами в разложении (2.3), имеем



Фиг. 2

$$R = R_0 \left[1 + \varepsilon^2 \frac{k_0^4 \eta^2}{2} + \varepsilon^4 (\eta^2 + \eta - 2q^2) \frac{\alpha^2 k_0^2 \eta}{4} + O(\varepsilon^6) \right], \quad R_0 = \frac{k_0^6}{\alpha^2} \quad (2.4)$$

Вычисления показывают, что формула (2.4) дает хорошую точность (погрешность менее 3%) уже при значениях $\omega \sim 30$.

Предельное значение R_{0*} числа R_* при $\omega \rightarrow 0$ можно получить с помощью метода *WBKJ* (см., например, [5]). Действительно, при больших

ε фундаментальная система решений уравнения (2.2) допускает асимптотическое представление

$$\theta_{1,2}(t) = \theta_{1,2}(\varepsilon t) \sim \frac{1}{\sqrt{F(t)}} \exp \left\{ -\frac{qk_0^2 t}{2} \pm \frac{\alpha \sqrt{R}}{k_0} \int_0^t F(t) dt \right\} \varepsilon \quad (2.5)$$

$$F(t) = \sqrt{1 + \eta \sin \tau} \quad (2.6)$$

Величину R_{0*} определяем из условия 2π -периодичности функции θ по τ . Таким образом, получаем (см. также [6])

$$R_{0*} = \frac{\pi^2 q^2 R_0}{16(1 + \eta) E^2(\gamma)}, \quad \gamma = \left(\frac{2\eta}{1 + \eta} \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

Здесь $E(\gamma)$ — полный эллиптический интеграл второго рода

$$E(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \tau} d\tau$$

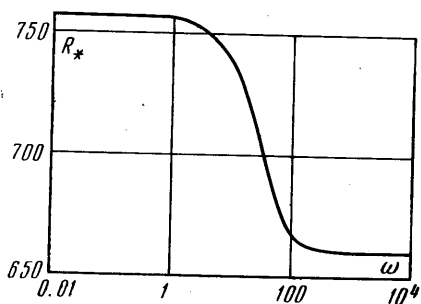
На Фиг. 3 представлены результаты вычислений зависимости R_* от ω при $\alpha = 2.2$, $p = 1$, $\eta = 0.9$. По горизонтали отложены значения ω в логарифмическом масштабе. Заметим, что уже при $\omega \leq 2$ величина R_* практически не отличается от R_{0*} .

3. Случай знакопеременной внешней силы. Вычисления показывают, что при $\eta > 1$ зависимость R от α заметно усложняется. На фиг. 4 представлена нейтральная кривая, вычисленная при $p = 1$, $\eta = 10$, $\omega = 5$. Она состоит из нескольких языков, на каждом из которых имеется свой локальный минимум.

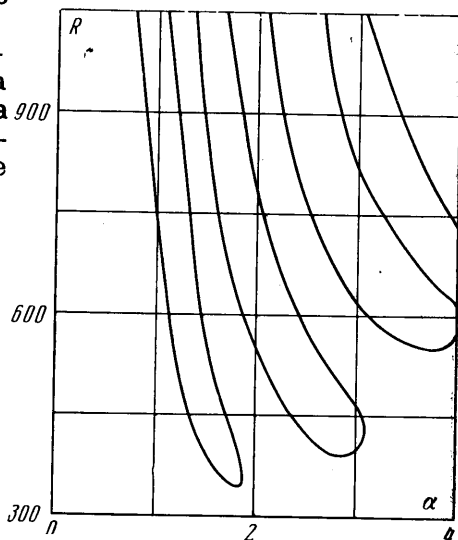
Критическое число R_* находится, как обычно, путем минимизации R по волновому числу α (при фиксированных остальных параметрах).

На фиг. 5, а, б показана зависимость от ω критического числа Рэлея R_* и соответствующего критического значения α_* .

При значениях ω_* соответствующих максимумам критического числа Рэлея R_* (вершинам пиков на фиг. 5, а), кривая $\alpha_*(\omega)$ претерпевает разрывы первого рода. Появление

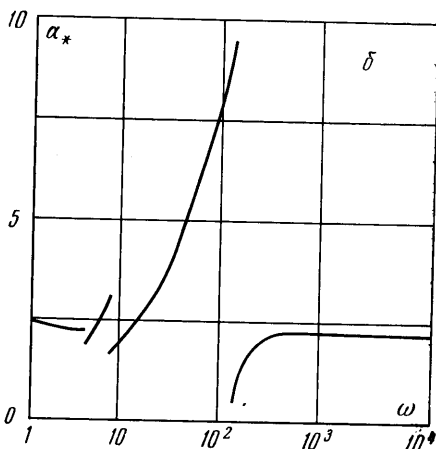
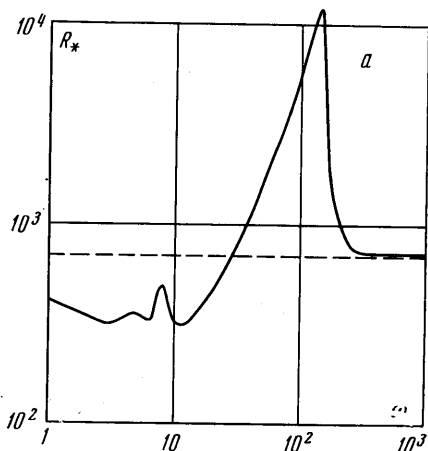


Фиг. 3



Фиг. 4

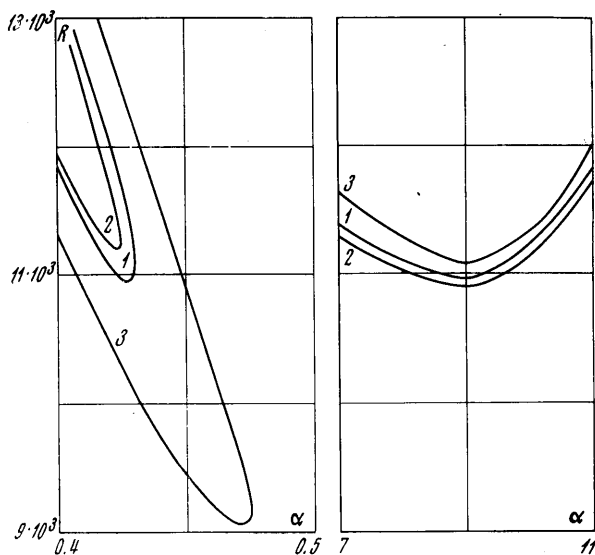
разрывов на фиг. 5, б легко понять, рассмотрев, например, изображение на фиг. 6 нейтральные кривые, соответствующие значению $\omega_* = 140.462$, (кривая 1) и близким значениям $\omega = 140.4$ (кривая 2), $\omega = 141.03$ (кри-



Фиг. 5

вая 3). Оказывается, при значениях ω , больших ω_* , наименьшее значение числа Рэлея R_* достигается на первом языке ($\alpha_* = 0.4$) при ω , меньших, чем ω_* — на втором языке ($\alpha_* = 9$).

При $\omega = \omega_*$ минимальные значения R на первом и втором языках совпадают и равны 10929 (вершина правого пика на фиг. 5, а).



Фиг. 6

Модуляция внешней силы при $\eta > 1$, как видно из фиг. 5, а, может оказывать как стабилизирующее (при $\omega \geq 29$), так и дестабилизирующее (при $\omega < 29$) влияние.

Поступило 26 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Юрков Ю. С. О конвективной устойчивости при наличии периодически меняющегося параметра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
2. Маркман Г. С. О неустойчивости равновесия жидкости, находящейся под действием вибрационных сил и периодического по времени градиента температуры. Сб. «Математический анализ и его приложения», т. 2, Изд. Ростовск. ун-та, 1970.
3. Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г. Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
4. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
5. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
6. Rosenblat S., Herbert D. M. Low-frequency modulation of thermal instability. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, No. 2.