

УДК 532.526.2 : 532.526.5

О ЛАМИНАРНОМ ОТРЫВЕ

В. В. СЫЧЕВ

(Москва)

Исследуется ламинарное течение несжимаемой жидкости в окрестности точки отрыва на гладкой поверхности твердого тела. Показано, что отрыв потока при больших числах Рейнольдса (R) происходит под действием большого локального положительного градиента давления, величина которого при неограниченном возрастании числа R стремится к бесконечности, как $R^{1/2}$, а протяженность области воздействия этого градиента давления стремится к нулю, как $R^{-3/2}$. Предельное состояние течения в окрестности точки отрыва при $R \rightarrow \infty$ описывается при этом известным решением классической теории струйных течений идеальной жидкости со свободными линиями тока.

Исследование механизма возникновения и развития отрыва ламинарного пограничного слоя несжимаемой жидкости на гладкой поверхности обтекаемого тела является одной из фундаментальных проблем гидродинамики. Этой проблеме посвящено много работ, в основе которых лежит изучение поведения пограничного слоя под действием неблагоприятного (положительного) градиента давления¹. К числу важнейших исследований этого направления относятся работы [2-5]. В этих работах показано, что при заданном положительном градиенте давления, действующем на участке твердой поверхности конечной протяженности, уравнения пограничного слоя в общем случае имеют особенность в точке, где трение обращается в нуль. Решение, соответствующее этой особенности, не может быть продолжено за точку отрыва. Попытка устранения этой особенности за счет учета взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком, предпринятая недавно в работе [6], оказалась безуспешной. В то же время известно, что, если градиент давления не является заранее заданным, а индуцируется в некоторой малой окрестности точки отрыва самим пограничным слоем, то упомянутая выше особенность может отсутствовать, а само решение может быть продолжено за точку отрыва. Впервые такая возможность была продемонстрирована в работе [7] путем выбора определенной (хотя и искусственной) зависимости давления от толщины вытеснения. Рациональные решения такого типа, соответствующие отрыву пограничного слоя в сверхзвуковом потоке, были недавно получены с помощью процедуры построения срачиваемых асимптотических разложений в работах [8-10].

В данной работе показывается, что при использовании для описания внешнего невязкого потока в окрестности точки отрыва известных решений струйной теории идеальной жидкости со свободными линиями тока, удается построить рациональную теорию ламинарного отрыва в несжимаемой жидкости. Механизм отрыва потока оказывается при этом во многом похожим на отрыв сверхзвукового потока и происходит под действием больших локальных градиентов давления.

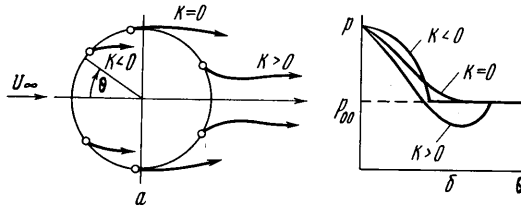
¹ Подробный обзор этих работ содержится в статье [1].

1. Постановка задачи. Исходные оценки. Все существующие модели течений идеальной жидкости со свободными линиями тока приводят к следующему выражению для давления на нулевой линии тока в окрестности точки отрыва на гладкой поверхности (см., например, [1]):

$$p(x) = p_{00} - k(-x)^{1/2} + O(-k^2x) \quad \text{при } x < 0 \quad (1.1)$$

$$p(x) = p_{00} + O(-x)^{\beta}, \quad \beta > 0 \quad \text{при } x > 0$$

Здесь и в дальнейшем x отсчитывается от точки отрыва $x = 0$ вдоль нулевой линии тока; используются безразмерные переменные: в качестве



Фиг. 1

единицы измерения длины выбирается характерный размер тела L , давление и компоненты скорости отнесены соответственно к удвоенному скоростному напору ρU_{00}^2 и величине U_{00} — скорости на свободной линии тока невязкого течения, соответствующей давлению $p_{00}\rho U_{00}^2$ в зоне отрыва. Градиент давления

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{2} K(-x)^{-1/2} - O(k^2), \quad (x < 0) \quad (1.2)$$

стремится к бесконечности при $-x \rightarrow 0$, если $k \neq 0$

Кривизна свободной линии тока

$$\kappa = \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{2} kx^{-1/2} + O(1), \quad (x > 0) \quad (1.3)$$

также в общем случае бесконечна при $x \rightarrow 0$. Случай течения при $k < 0$ является физически невозможным, так как при этом свободная линия тока пересекает поверхность тела (фиг. 1). Случай $k > 0$ обычно отвергается на основании того, что бесконечно большой положительный градиент давления в точке $x = 0$ привел бы к более раннему отрыву потока. Случай $k = 0$ соответствует известному условию Бриллюэна — Вилля, при котором положительный градиент давления вдоль нулевой линии тока вообще отсутствует и появление отрыва становится физически необъяснимым. Сказанное позволяет сделать следующее предположение: в реальных течениях жидкости с большими числами Рейнольдса (R) внешний невязкий поток в некоторой окрестности точки $x = 0$ описывается соотношениями (1.2), (1.3) с постоянной $k > 0$, зависящей от числа R и стремящейся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Иными словами, предельным состоянием течения при $R \rightarrow \infty$ является невязкое течение, удовлетворяющее условию Бриллюэна — Вилля всюду, за исключением особой точки $x = 0$, сам же процесс предельного перехода является особым. Поэтому предположим, что

$$k = \varepsilon(R) k_0, \quad R = U_{00}L/\nu \quad (1.4)$$

где $\varepsilon(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Так как при сделанном предположении прира-

щение давления в окрестности точки отрыва согласно (1.1) будет малым

$$\Delta p \sim \varepsilon(-x)^{1/2} \quad (1.5)$$

то в основной части пограничного слоя (где продольная составляющая скорости u порядка единицы) изменения скорости Δu , обусловленные этим членом, будут малы. Однако вблизи стенки найдется такая область, в которой

$$u \sim \Delta u \sim \sqrt{\Delta p} \sim \varepsilon^{1/2}(-x)^{1/4} \quad (1.6)$$

Так как исходный профиль скорости u в основной части пограничного слоя (соответствующий внешнему потоку, удовлетворяющему условию Бриллюэна — Вилля) таков, что

$$u \sim Y \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad Y = R^{1/2}y \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

то толщина рассматриваемой области пристеночного подслоя будет

$$\Delta Y \sim u \sim \varepsilon^{1/2}(-x)^{1/4} \quad (1.8)$$

Этот подслой должен быть вязким для удовлетворения условию прилипания, т. е. необходимо потребовать, чтобы было

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \quad (1.9)$$

Подставляя в (1.9) полученные оценки (1.5) — (1.8) для u , Δp и ΔY , получаем, что

$$\Delta x \sim \varepsilon^6 \quad (1.10)$$

т. е. оценку продольного размера области, в которой процесс взаимодействия пограничного слоя с внешним невязким потоком оказывает определяющее влияние. Тогда градиент давления в области (1.10) будет

$$\frac{dp}{dx} \sim \varepsilon(-x)^{-1/2} \sim \varepsilon(\Delta x)^{-1/2} \sim \varepsilon^{-2} \quad (1.11)$$

Этот градиент давления индуцируется вытесняющим воздействием пограничного слоя, а последнее в своем главном члене вызывается изменением толщины подслоя (на величину порядка его собственной толщины, поскольку здесь $u \sim \Delta u$). Поэтому общее изменение толщины пограничного слоя в области (1.10) на основании (1.8) будет

$$\Delta \delta \sim R^{-1/2} \Delta Y \sim R^{-1/2} \varepsilon^2 \quad (1.12)$$

а кривизна линий тока внешнего невязкого течения, обусловленная этим процессом взаимодействия, будет

$$\kappa \sim d^2 \delta / dx^2 \sim R^{-1/2} \varepsilon^{-10} \quad (1.13)$$

С другой стороны, согласно уравнениям теории внешнего потенциального течения (1.2) и (1.3), кривизна нулевой линии тока и градиент давления, обусловленный ею, должны быть величинами одного порядка. Приравняв по порядку величины (1.11) и (1.13), находим, что

$$\varepsilon = R^{-1/16} \quad (1.14)$$

Собирая полученные результаты и подставляя найденное значение малого параметра ε , выпишем окончательные оценки для всех переменных

подслоя области взаимодействия:

$$\begin{aligned} |x| &\sim R^{-3/2}, & Y &\sim R^{-1/2} \\ u &\sim R^{-1/2}, & V &\sim R^{1/2} v \sim R^{1/2}, & \Delta p &\sim R^{-1/2} \\ \frac{dp}{dx} &\sim R^{1/2}, & \vartheta &\sim \frac{v}{u} \sim R^{-1/2}, & \kappa &\sim \frac{d\vartheta}{dx} \sim R^{1/2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Таким образом, при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности, градиент давления и кривизна линий тока внешнего течения неограниченно возрастают, как $R^{1/2}$, а протяженность области взаимодействия убывает, как $R^{-3/2}$. Эта ситуация во многом подобна той, которая возникает в области свободного взаимодействия пограничного слоя сверхзвукового потока. Интересно отметить полное совпадение соответствующих оценок (1.15) для всех переменных (ср. [8] или [9]).

2. Пограничный слой перед областью взаимодействия. Подробный анализ поля течения в окрестности точки отрыва пограничного слоя начнем с рассмотрения пограничного слоя на поверхности тела при $x < 0$. Уравнения пограничного слоя при этом удобно записать в форме Мизеса

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dp}{dx} = u \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \Psi} \right), \quad u \frac{\partial Y}{\partial \Psi} = 1, \quad u \frac{\partial Y}{\partial x} = V \quad (2.1)$$

где $\psi = R^{-1/2} \Psi$ — безразмерная функция тока. Ось x ортогональной системы координат x, Y будем полагать совпадающей с нулевой линией тока $\Psi = 0$. В области $-x \sim 1$ функции течения в пограничном слое можно записать в виде разложений¹

$$\begin{aligned} u &= u_0(x, \Psi) + R^{-1/2} u_1(x, \Psi) + O(R^{-1/2}) \\ V &= V_0(x, \Psi) + R^{-1/2} V_1(x, \Psi) + O(R^{-1/2}) \\ Y &= Y_0(x, \Psi) + R^{-1/2} Y_1(x, \Psi) + O(R^{-1/2}) \\ p &= p_0(x) + R^{-1/2} p_1(x) + O(R^{-1/2}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получим последовательные системы уравнений

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{dp_0}{dx} = u_0 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \Psi} \right) \quad (2.3)$$

$$u_0 \frac{\partial Y_0}{\partial \Psi} = 1, \quad u_0 \frac{\partial Y_0}{\partial x} = V_0$$

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{dp_1}{dx} &= u_0 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \Psi} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial \Psi} \right) + u_1 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \Psi} \right) \\ u_0 \frac{\partial Y_1}{\partial \Psi} + u_1 \frac{\partial Y_0}{\partial \Psi} &= 0, \quad u_0 \frac{\partial Y_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial Y_0}{\partial x} = V_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

и т. д.

Первые члены разложений (2.2) описывают течение в пограничном слое с заданным распределением давления, соответствующим невязкому течению, удовлетворяющему условию $k_0 = 0$. Они имеют поэтому при $-x \rightarrow 0$

¹ О технике построения сращиваемых асимптотических разложений, применяемой на протяжении всей работы, см. [12].

разложения вида

$$\begin{aligned} u_0 &= u_{00}(\Psi) + (-x)u_{01}(\Psi) + O(-x)^\beta - R^{-1/6}u_{01}(\Psi)\Delta_0 + \dots \\ V_0 &= V_{00}(\Psi) + (-x)V_{01}(\Psi) + O(-x)^\beta - R^{-1/6}V_{01}(\Psi)\Delta^0 + \dots \\ Y_0 &= Y_{00}(\Psi) + (-x)Y_{01}(\Psi) + O(-x)^\beta - R^{-1/6}Y_{01}(\Psi)\Delta_0 + \dots \\ p &= p_{00} + O(-x)^\beta, \quad \beta > 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Появление в этих соотношениях членов порядка $R^{-1/6}$ связано с тем, что положение точки отрыва свободной линии тока вязкого течения при заданном давлении p_{00} в зоне отрыва зависит от величины k . При $k = R^{-1/6}k_0$ эта точка сместится вниз по потоку от своего исходного положения (соответствующего $k = 0$) на величину $\Delta x = R^{-1/6}\Delta_0$. Поэтому, принимая в соотношениях (2.5) и всюду в дальнейшем, что значению $x = 0$ соответствует «новое» положение точки отрыва (при $k_0 \neq 0$), надо учесть это обстоятельство добавлением указанных членов. Сказанное относится ко всем функциям течения, кроме давления, так как $p_0'(0) = 0$.

Подставляя (2.5) в (2.3) получаем для главных членов систему

$$\begin{aligned} -u_{01} &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\Psi^2}(u_{00}^2), \quad V_{00} = -u_{00}Y_{01} \\ \frac{dY_{00}}{d\Psi} &= \frac{1}{u_{00}}, \quad \frac{dY_{01}}{d\Psi} = -\frac{u_{01}}{u_{00}^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Интегрируя два последних уравнения с учетом граничных условий на стенке $Y_{00}(0) = Y_{01}(0) = 0$, получим при $\Psi \rightarrow 0$ следующие приближенные выражения:

$$\begin{aligned} u_{00} &= a_0\sqrt{\Psi} + a_1\Psi^2 + \dots, \quad u_{01} = -\frac{15}{4}a_0a_1\sqrt{\Psi} + \dots \\ Y_{00} &= \frac{2}{a_0}\sqrt{\Psi} - \frac{a_1}{a_0^2}\Psi^2 + \dots, \quad Y_{01} = -\frac{15}{2}\frac{a_1}{a_0}\sqrt{\Psi} + \dots \\ V_{00} &= \frac{15}{2}a_1\Psi + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим теперь поведение вторых членов разложений (2.2) при $-x \rightarrow 0$. Так как на основании (1.2)

$$dp_1/dx = 1/2k_0(-x)^{-1/2} + \dots \quad (2.8)$$

то вязкие члены в системе (2.4) при $-x \rightarrow 0$ становятся пренебрежимо малыми по сравнению с инерционными. В результате условие прилипания жидкости на стенке не может быть удовлетворено. Это заставляет ввести в рассмотрение внутреннюю область течения, в которой

$$u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} \sim u_0 \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial \Psi} \right) \sim \frac{dp}{dx} \sim (-x)^{-1/2} \quad (2.9)$$

и для выполнения этого условия предположить, что

$$u_1 = (-x)^{\alpha} \bar{f}_1(\bar{\eta}) + \dots, \quad \bar{\eta} = \Psi(-x)^{-\beta} \quad (2.10)$$

Учитывая, что тогда на основании (2.7)

$$u_0 = a_0(-x)^{\beta/2} \sqrt{\bar{\eta}} + \dots \quad (2.11)$$

и подставляя (2.10), (2.11) в (2.9), получаем, что $\alpha = 1/6$, $\beta = 2/3$.

Схематически, поле течения при $-x \rightarrow 0$ представлено на фиг. 2, где область 1 — основная часть пограничного слоя, а область 2 — внутренняя.

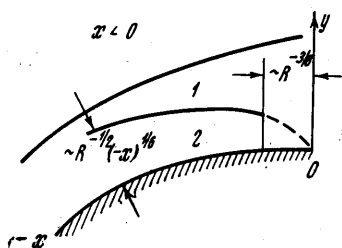
Пользуясь вторым и третьим уравнениями (2.4), нетрудно установить вид функций Y_1 и V_1 во внутренней области течения. В итоге рассматриваемые функции могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{k_0}{a_0^{1/3}} (-x)^{1/6} f_1(\eta) + O(-x)^{1/3} \\ V_1 &= \frac{k_0}{a_0^2} (-x)^{-1/2} g_1(\eta) + O(-x)^{-1/3} \\ Y_1 &= \frac{k_0}{a_0^{10/3}} (-x)^{-1/6} h_1(\eta) + O(-x)^{1/3} \\ \eta &= a_0^{-2/3} \Psi (-x)^{-2/3} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подстановка (2.12) в (2.4) приводит к следующей системе уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned} \eta f_1'' + \left(1 - \frac{2}{3} \eta^{3/2}\right) f_1' + \left(\frac{1}{6} \eta^{1/2} - \frac{1}{4\eta}\right) f_1 &= \frac{1}{2} \\ \eta h_1' &= -f_1, \quad g_1 = \eta^{1/2} (2/3 \eta h_1' - 1/6 h_1) \\ f_1(0) &= g_1(0) = h_1(0) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Важным для дальнейшего является определение асимптотического поведения решений (2.13) при $\eta \rightarrow \infty$. Имеющее физический смысл частное решение (2.13) при больших η может быть представлено в виде



$$\begin{aligned} f_1 &= A_1 \eta^{1/4} + \eta^{-1/2} + O(\eta^{-5/4}) \\ g_1 &= -1/6 B_1 \eta^{1/2} - 1 + O(\eta^{-3/4}) \\ h_1 &= -4A_1 \eta^{1/4} + B_1 + 2\eta^{-1/2} + O(\eta^{-5/4}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Интегрирование (2.13) определяет значения постоянных A_1 и B_1 ¹. Полученные выражения (2.12) и (2.14) позволяют установить, что главные члены разложений функций u_1 ,

V_1 , Y_1 при $-x \rightarrow 0$ в основной части пограничного слоя имеют вид

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}(\Psi) + (-x)^{1/2} u_{11}(\Psi) + O(-x) \\ V_1 &= (-x)^{-5/6} V_{10}(\Psi) + O(-x)^{-2/3} \\ Y_1 &= Y_{10}(\Psi) + (-x)^{1/6} Y_{11}(\Psi) + O(-x)^{1/3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

При $\Psi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} u_{10}(\Psi) &= \frac{k_0}{a_0^{3/2}} A_1 \Psi^{1/4} + \dots, \quad u_{11}(\Psi) = \frac{k_0}{a_0} \Psi^{-1/2} + \dots \\ V_{10}(\Psi) &= -\frac{1}{6} \frac{k_0}{a_0^{7/3}} B_1 \Psi^{1/2} + \dots \\ Y_{10}(\Psi) &= -\frac{4k_0}{a_0^{7/2}} A_1 \Psi^{1/4} + \dots, \quad Y_{11} = \frac{k_0}{a_0^{10/3}} B_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

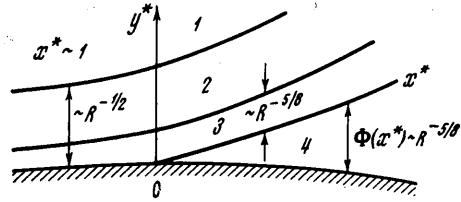
¹ Численные значения этих постоянных следующие: $A_1 \approx -2.59$, $B_1 \approx -6.16$.

Подставляя разложения (2.15), (2.5) и (2.7) в систему уравнений (2.4) и используя условия (2.16), получим

$$u_{11} = \frac{k_0}{u_{00}}, \quad Y_{10} = - \int_0^\Psi \frac{u_{10}}{u_{00}^2} d\Psi, \quad Y_{11} = \frac{k_0}{a_0^{10/3}} B_1 \quad (2.17)$$

$$V_{10} = - \frac{1}{6} \frac{k_0}{a_0^{10/3}} B_1 u_{00}$$

3. Область взаимодействия. Полученные в п. 1 оценки показывают, что разложения (2.2) несправедливы во внутренней части пограничного слоя, в окрестности точки отрыва с продольным масштабом порядка $R^{-3/8}$. Это непосредственно следует также из результатов анализа предыдущего раздела. В самом деле, сравнивая по порядку величины два первых члена любого из разложений (2.2) во внутренней части пограничного слоя, находим, что они становятся в этой области одного порядка. Например, $u_0 \sim R^{-1/10} u_1$, т. е. $(-x)^{1/8} \sim R^{-1/10} (-x)^{1/10}$ когда $(-x) \sim R^{-3/8}$. Поэтому рассмотрим теперь течение в области взаимодействия, введя независимую переменную $x^* = R^{3/8} x$ порядка единицы. Функции течения в основной части пограничного слоя при $|x^*| \sim 1$ могут быть представлены в виде



Фиг. 3

$$u = u_{00}(\Psi) + R^{-1/10} u_{10}(\Psi) + O(R^{-1/8}), \quad V = R^{1/4} \tilde{V}_1(x^*, \Psi) + O(R^{3/10})$$

$$Y = Y_{00}(\Psi) + R^{-1/10} Y_{10}(\Psi) + O(R^{-1/8}) \quad (3.1)$$

$$p = p_{00} + R^{-1/4} \tilde{p}_1(x^*) + O(R^{-5/10})$$

Это следует из рассмотрения внутреннего предела для внешнего разложения (2.2) с учетом (2.5) и (2.15), причем

$$\tilde{V}_1(x^*, \Psi) = (-x^*)^{-5/8} V_{10} + \dots \quad (x^* \rightarrow -\infty). \quad (3.2)$$

Таким образом профиль продольной скорости течения для основной части пограничного слоя в области взаимодействия по-прежнему мало отличается от исходного профиля скоростей $u_{00}(\Psi)$, но при этом происходит одинаковое отклонение всех линий тока пограничного слоя на угол порядка

$$\vartheta \sim R^{-1/2} \frac{V}{u} \sim R^{-1/4} \frac{\tilde{V}_1}{u_{00}} \sim R^{-1/4} \quad (3.3)$$

Это отклонение потока, как было показано в п. 1, связано с вытесняющим воздействием вязкого подслоя в рассматриваемой области $|x^*| \sim 1$. Поэтому функция $\tilde{V}_1(x^*, \Psi)$ может быть представлена в виде $\tilde{V}_1 = F'(x) u_{00}(\Psi)$.

С целью рассмотрения течения в вязком подслое введем систему переменных, которые являются здесь величинами порядка единицы

$$x^* = R^{3/8} x, \quad Y^* = R^{3/8} y = R^{1/8} Y, \quad \Psi^* = R^{3/4} \Psi = R^{1/4} \Psi$$

$$u^* = R^{1/8} u, \quad V^* = R^{3/8} v = R^{-1/8} V, \quad p^* = R^{1/4} (p - p_{00}) = \tilde{p}_1(x^*) \quad (3.4)$$

При рассмотрении течения в области вязкого подслоя удобнее воспользоваться обычной формой записи уравнений пограничного слоя в системе координат x^* , Y^* . При этом ось x^* будем по-прежнему полагать совпадающей с линией тока $\Psi^* = 0$, которая в точке $x^* = 0$ отрывается от поверхности тела.

Схематически течение в области взаимодействия представлено на фиг. 3, где 1 — область невязкого течения, 2 — основная часть пограничного слоя, 3 — вязкий подслой, 4 — область отрыва.

Система уравнений, описывающих течение в вязком подслое имеет вид

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial u^*}{\partial Y^*} + \frac{dp^*}{dx^*} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial Y^{*2}}, \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial V^*}{\partial Y^*} = 0 \quad (3.5)$$

На стенке и нулевой линии тока выполняются следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} u^*(x^*, 0) &= V^*(x^*, 0) \quad \text{при } x^* < 0 \\ V^*(x^*, 0) &= 0 \\ u^* &= V^* = 0 \quad \text{при } Y^* = -\Phi(x^*) \end{aligned} \right\} \quad \text{при } x^* > 0 \quad (3.6)$$

Функция $\Phi(x^*)$ в выбранной системе координат представляет собой форму контура тела (или форму свободной линии тока в системе координат, связанной с телом). Она определяется вместе с решением задачи о течении в подслое.

Условия на внешней границе подслоя получаются путем сращивания функций течения в этой области и в основной части пограничного слоя. На основании (3.1) и (2.16) можно записать их в параметрической форме

$$\begin{aligned} u^* &= a_0 \Psi^{*1/2} + \frac{k_0}{a_0^{1/2}} A_1 \Psi^{*1/4} + \dots \\ Y^* &= \frac{2}{a_0} \Psi^{*1/2} - \frac{4k_0}{a_0^{1/2}} A_1 \Psi^{*1/4} + \dots \quad (Y^* \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для получения начальных условий необходимо провести сращивание функций течения в рассматриваемой области с решением для внутренней области пограничного слоя при $x < 0$. Используя полученные в предыдущем разделе асимптотические представления этого решения при $-x \rightarrow 0$ (2.5) и (2.12)), можно записать асимптотические выражения искомых функций при $x^* \rightarrow -\infty$ в следующей параметрической форме:

$$\begin{aligned} u^* &= a_0^{1/3} (-x^*)^{1/3} \sqrt{\eta} + \frac{K_0}{a_0^{1/3}} (-x^*)^{1/6} f_1(\eta) + \dots \\ Y^* &= \frac{2}{a_0^{2/3}} (-x^*)^{1/3} \sqrt{\eta} + \frac{K_0}{a_0^{10/3}} (-x^*)^{1/6} h_1(\eta) + \dots \\ \eta &= \frac{\Psi^*}{a_0^{2/3} (-x^*)^{2/3}} = \frac{\Psi}{a_0^{2/3} (-x)^{2/3}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

При заданном градиенте давления выписанные граничные условия (3.6) — (3.8) были бы достаточны для определения единственного решения системы (3.5). Однако градиент давления определяется в свою очередь вытесняющим воздействием подслоя $F(x^*)$ и формой области отрыва $\Phi(x^*)$. Поэтому для замыкания системы соотношений необходимо получение дополнительного условия, учитывающего указанное взаимодействие.

С этой целью рассмотрим область внешнего течения с характерным поперечным размером порядка продольного размера области взаимодействия

$$x^* = R^{3/8}x, \quad y^* = R^{3/8}y = R^{-1/8}Y$$

Поскольку поперечная составляющая скорости в этой области, определяемая отклонением линий тока основной части пограничного слоя, является величиной порядка $R^{-1/8}$, продольная составляющая мало отличается от единицы, а течение здесь является невязким, то имеем

$$u = 1 + R^{-1/8}U_1(x^*, y^*) + \dots, \quad v = R^{-1/8}\phi_1(x^*, y^*) + \dots \quad (3.9)$$

$$p = p_{00} + R^{-1/8}P_1(x^*, y^*) + \dots$$

Система уравнений, описывающих течение в этой области, будет обычной системой линеаризованных уравнений Эйлера

$$\frac{\partial U_1}{\partial x^*} + \frac{\partial P_1}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x^*} + \frac{\partial P_1}{\partial y^*} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x^*} + \frac{\partial \phi_1}{\partial y^*} = 0 \quad (3.10)$$

Поэтому зависимость градиента давления от кривизны линии тока $y^* = 0$ представляется известным интегралом теории тонкого профиля

$$\left. \frac{\partial P_1}{\partial x^*} \right|_{y^*=0} = \tilde{p}_1'(x^*) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi_1'(\xi, 0)}{x^* - \xi} d\xi \quad (3.11)$$

На основании полученных выше соотношений

$$\phi_1'(x^*, 0) = F''(x^*) + \Phi''(x^*) \quad (3.2)$$

где $\Phi(x^*) \equiv 0$ при $x^* < 0$ и определяет согласно (3.6) форму свободной линии тока при $x^* > 0$, а функция $F(x^*)$ определяется из внешнего предела решения задачи для вязкого подслоя

$$F'(x^*) = \lim_{Y^* \rightarrow \infty} \left[\frac{V^*(x^*, Y^*)}{u^*(x^*, Y^*)} \right] \quad (3.13)$$

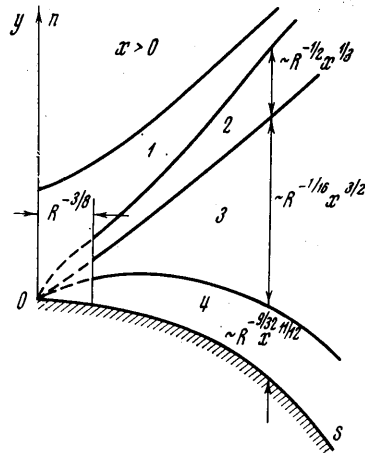
Заметим, что на основании (3.7), (3.2) и (2.17)

$$F'(x^*) = -\frac{1}{6} B_1 \frac{k_0}{a_0^{10/3}} (-x^*)^{-5/6} + \dots \quad (x^* \rightarrow -\infty) \quad (3.14)$$

Соотношения (3.11) — (3.14) полностью замыкают задачу об определении течения в области взаимодействия.

4. Течение за областью взаимодействия. Рассмотрим теперь область течения, расположенную вниз по потоку от области взаимодействия (при $x > 0$), и в первую очередь подслей смешения, разделяющий основную часть оторвавшегося пограничного слоя и область отрыва. Определим решение для этого свободного подслоя при $x \rightarrow 0$.

Поле течения при $x \rightarrow 0$ схематически изображено на фиг. 4, где 1 — основная часть оторвавшегося пограничного слоя, 2 — подслей смешения, 3 — область невязкого течения, 4 — пограничный слой возвратного течения.



Фиг. 4

Исходные уравнения в отсутствие градиента давления¹ запишем в обычной форме

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.1)$$

и будем искать их решение в виде

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = x^{\alpha-\beta} f_0'(\eta) + \dots$$

$$V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = x^{\alpha-1} [-\alpha f_0(\eta) + \beta \eta f_0'(\eta)] + \dots \quad (4.2)$$

$$\eta = Yx^{-\beta}$$

В основной части оторвавшегося пограничного слоя в качестве главного члена сохраняется исходный профиль скорости, и на основании (2.7)

$$u_{00} = 1/2 a_0^2 Y + \dots \quad (Y \rightarrow 0) \quad (4.3)$$

Тогда подставляя (4.2) в (4.1) и требуя выполнения условия (4.3) для u при $\eta \rightarrow \infty$, найдем, что $\alpha = 2/3$, $\beta = 1/3$. В результате приходим к следующей задаче для определения функции тока в рассматриваемом подслое:

$$f_0''' + 2/3 f_0 f_0'' - 1/3 f_0'^2 = 0, \quad f_0' = 1/2 a_0^2 \eta \dots \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (4.4)$$

$$f(0) = 0, \quad f_0' \rightarrow 0 \quad (\eta \rightarrow -\infty)$$

Решение (4.4) дает значение $f_0(-\infty) = C^2$.

Покажем теперь возможность сращения этого решения с решением для подслоя в области взаимодействия, где $x^* = R^{3/2} x = O(1)$. На основании (4.2) имеем

$$Y = x^{1/3} \eta = R^{-1/3} x^{*1/3} \eta$$

$$u = x^{1/3} f_0'(\eta) + \dots = R^{-1/3} x^{*1/3} f_0'(\eta) + \dots$$

$$V = x^{-1/3} (1/3 \eta f_0' - 2/3 f_0) + \dots = R^{1/3} x^{*-1/3} (1/3 \eta_0' - 2/3 f_0) + \dots \quad (4.5)$$

$$\eta = Yx^{-1/3} = Y^* x^{*-1/3}$$

что полностью соответствует порядкам величин функций (3.4) и асимптотическому характеру псевдения этих функций при $x^* \rightarrow \infty$ $Y^* > 0$.

Дальнейшим шагом будет рассмотрение течения в области отрыва. Согласно (1.3) толщина зоны отрыва при $x \rightarrow 0$ должна быть

$$\Delta y_s = 2/3 R^{-1/3} k_0 x^{3/2} + \dots \quad (4.6)$$

и, следовательно, массовый расход возвратного течения

$$\psi_s \sim u \Delta y_s \sim u R^{-1/3} x^{3/2} \quad (4.7)$$

С другой стороны, из полученного решения для подслоя смешения следует, что количество жидкости, поглощаемое им, определяется величиной

$$\psi_s = R^{-1/2} |_{\eta \rightarrow \infty} = C R^{-1/2} x^{3/2} + \dots \quad (4.8)$$

¹ На основании (1.1) $dp/dx \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$.

² Численное значение этой постоянной $C = -0.9569$ определено в работе [10].

Приравнивая эти расходы по порядку величины, находим, что величина скорости возвратного течения

$$u \sim R^{-7/16} x^{-5/6} \quad (4.9)$$

откуда следует, что давление в этой области

$$p - p_0 \sim u^2 \sim R^{-7/8} x^{5/3} \quad (4.10)$$

Таким образом, решение для течения в зоне отрыва при $x \rightarrow 0$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} p - p_0 &= R^{-7/8} x^{-5/3} \pi_0 + \dots \\ R^{1/2} \psi &= \Psi = x^{2/3} \chi_0(\xi) + \dots \\ \xi &= R^{1/16} n x^{-3/2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

где n — координата, нормальная к поверхности тела ($n = 0$). Подстановка (4.11) в уравнения Навье — Стокса приводит к следующему уравнению и граничным условиям, определяющим невязкое течение этой области

$$\begin{aligned} 2\chi_0 \chi_0'' + 5/2 \chi_0'^2 + 5\pi_0 &= 0 \\ \chi_0(0) &= 0, \quad \chi_0(\xi_0) = C \end{aligned} \quad (4.12)$$

Постоянная ξ_0 определяет форму внешней границы зоны отрыва, согласно (4.6) $\xi_0 = 2/3 k_2$.

Вновь покажем возможность сращения решения (4.11), (4.12) с решением для области взаимодействия. На основании (4.11) имеем

$$\begin{aligned} n &= R^{-1/16} x^{3/2} \xi = R^{-5/8} x^{*3/2} \xi \\ \Psi &= x^{2/3} \chi_0(\xi) + \dots = R^{-1/4} x^{*2/3} \chi_0(\xi) + \dots \\ \xi &= R^{1/16} n x^{-3/2} = [\Phi(x^*) + Y^*] x^{*-3/2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

что находится в полном соответствии с (3.4). Выражения (4.13) определяют асимптотический характер решения в области взаимодействия при $x^* \rightarrow \infty$, $Y^* < 0$.

Поскольку только что рассмотренное возвратное течение в области отрыва является невязким, остается еще рассмотреть пограничный слой в этой области вблизи стенки $n = 0$. При $x \rightarrow 0$ функция тока течения в этом пограничном слое может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \psi &= R^{-23/32} x^{1/12} \varphi_0(v) + \dots \\ v &= R^{9/32} n x^{-11/12} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Это следует из характера распределения давления, определенного (4.11), и обычного требования о равенстве порядков вязких и инерционных членов в этой области. Уравнение и граничные условия, которым удовлетворяет функция $\varphi_0(v)$, имеют при этом вид

$$\begin{aligned} \varphi_0''' + 1/12 \varphi_0 \varphi_0'' + 5/6 \varphi_0'^2 + 5/3 \pi_0 &= 0 \\ \varphi_0(0) &= \varphi_0'(0) = 0 \\ \varphi_0'(\infty) &= \chi_0'(0) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из (4.14) имеем

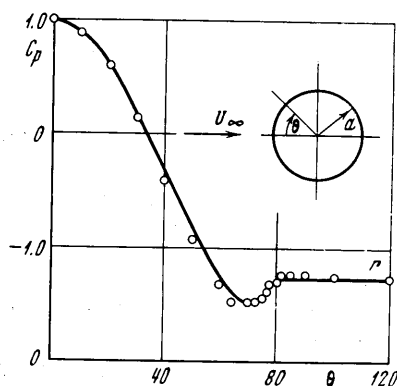
$$\begin{aligned} n &= R^{-9/32} x^{11/12} v = R^{-5/8} x^{*11/12} v \\ \psi &= R^{-23/32} x^{1/12} \varphi_0(v) + \dots = R^{-3/4} x^{*1/12} \varphi_0(v) + \dots \\ v &= R^{9/32} n x^{-11/12} = [\Phi(x^*) + Y^*] x^{*-11/12} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Это доказывает возможность сращивания решения (4.14) с решением для течения в подслое области взаимодействия и дает следующие после (4.13) по порядку величины члены (4.16) асимптотического представления функций последнего при $x^* \rightarrow \infty$, $Y^* < 0$. Заметим, что соотношения (4.13) и (4.16), определяющие поведение возвратного течения ($Y^* < 0$) при $x^* \rightarrow \infty$, играют роль начальных условий для этой области.

5. Обсуждение результатов. Проведенный анализ ламинарного течения жидкости в окрестности точки отрыва при $R \rightarrow \infty$ показывает, что отрыв потока на гладкой поверхности происходит под действием больших градиентов давления ($dp/dx \sim R^{1/8}$), действующих на малом участке поверхности ($\Delta x \sim R^{-3/8}$). Такой механизм отрыва, связанного с внезапным ростом давления после относительно медленного его изменения, во многом подобен механизму отрыва при взаимодействии пограничного слоя со скачком уплотнения в сверхзвуковом потоке (см. [8–10]).

Схема течения, предполагавшая, что отрыв потока на гладкой поверхности происходит в результате неблагоприятного градиента давления, распределенного на конечном участке поверхности тела, и служившая предметом многих исследований, начиная с работы [2], по-видимому, не имеет места в действительности.

Теория струйных течений идеальной жидкости со свободными линиями тока содержит всю необходимую информацию о локальном поведении потенциального потока вне области пограничного слоя вблизи точки отрыва.



Фиг. 5

Уже давно было установлено, что путем введения двух экспериментальных постоянных — положения точки отрыва и давления в зоне отрыва — можно, используя результаты этой теории, получить очень хорошее соответствие экспериментальным данным о распределении давления по поверхности кругового цилиндра (см., например, [11] или [13]). Это показано на фиг. 5, заимствованной из работы [13], где сплошной линией изображена теоретическая кривая, а точками — экспериментальные данные для числа $R = 1.06 \cdot 10^3$. Построенное в данной работе асимптотическое решение не только объясняет причины такого хорошего совпадения, но и позволяет найти

связь между этими двумя постоянными, так что для получения этого решения необходимо задать лишь одну постоянную — давление p_{00} в зоне отрыва. В самом деле, полное численное решение рассмотренной задачи при заданном значении p_{00} дает возможность определить постоянные a_0 и k_0 , а следовательно, и положение точки отрыва.

Теоретическое определение величины p_{00} связано, конечно, с необходимостью рассмотрения течения в «глобальном» масштабе, т. е. в масштабе порядка размеров обтекаемого тела. Весьма вероятно, что такое течение при больших числах Рейнольдса является нестационарным. Но даже в этом случае, построенное в данной работе локальное решение сохраняет смысл, так как нестационарность течения в глобальном масштабе приведет лишь к тому, что рассмотренное здесь решение будет зависеть от времени t как от параметра; эта зависимость войдет в задачу в виде $p_{00}(t)$.

Сказанное объясняет, почему решение задачи об отрывном (нестационарном) течении около гладкого тела, полученное на основе интегрирования уравнений Эйлера, при удовлетворении условию Бриллюэна — Вилля

в точке отрыва (подобное найденному в работе [14]), дает предельное состояние поля течения, соответствующее ламинарному отрыву потока.

Поступило 30 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown S. N., Stewartson K. Laminar separation Ann. Rev. Fluid Mech., 1969, vol. 1.
2. Galdstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, vol. 1, pp. 43—69.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат 1953, стр. 188—194.
4. Kaplun S. Fluid mechanics and singular perturbations. Acad. Press., 1967.
5. Stewartson K. On Goldstein's theory of laminar separation. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1958, vol. 11, pp. 399—410.
6. Stewartson K. Is the singularity at separation removable? J. Fluid Mech., 1970, vol. 44, pp. 347—364.
7. Catherall D., Mangler K. W. The integration of the two-dimensional laminar boundary layer equations past the point of vanishing skin friction. J. Fluid Mech., 1966, vol. 26, pp. 163—182.
8. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
9. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation. Proc. Roy. Soc. A, 1969, vol. 312, pp. 181—206.
10. Нейланд В. Я. Течение за точкой отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
11. Thwaites B. Incompressible aerodynamics. Oxford, 1960.
12. Van-Dyke M. D. Perturbation methods in fluid mechanics. Acad. Press., 1964. (Рус. перев.: Методы возмущений в механике жидкости. М., 1967.)
13. Woods L. C. Two-dimensional flow of a compressible fluid past given curved obstacles with infinite waves. Proc. Roy. Soc. A., 1955, vol. 227, pp. 367—386.
14. Постоловский С. Н. Расчетное исследование нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.