

УДК 532.516

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ШАРОВОМ СЛОЕ

Н. М. АСТАФЬЕВА, И. Ю. БРАЙЛОВСКАЯ, И. М. ЯВОРСКАЯ

(Москва)

Рассматривается осесимметричная задача о движении вязкой сжимаемой теплопроводной жидкости между двумя концентрическими сферами, которые могут вращаться вокруг общей оси с различными угловыми скоростями.

Гидродинамические течения в сферических полостях представляют интерес в связи с изучением глобальных циркуляций в атмосферах Земли и планет, меридиональных течений в конвективных зонах звезд и крупномасштабных течений в океанах. Такого рода движения описываются нелинейной краевой задачей для полной системы уравнений Навье — Стокса.

Движение вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое рассматривалось ранее в [1-7]. В зависимости от величины определяющих параметров использовались различные аппроксимации, позволяющие упростить задачу. При малых числах Рейнольдса задача решалась методом регулярных возмущений, позволяющих представить решение в виде ряда по целым степеням Re [1-3]. При больших числах Re задача рассматривалась методом срачиваемых внутренних и внешних асимптотических разложений [4, 5]. В области средних чисел Re применялись прямые методы типа Галеркина [3, 6, 7] и численные методы [8]. В данной работе полученная нелинейная краевая задача для нестационарных уравнений Навье — Стокса решается численно до выхода на стационарный режим. Проводится анализ результатов и сравнение с решениями, полученными другими методами, при различных значениях определяющих параметров задачи: числа Рейнольдса и отношений угловых скоростей и радиусов внешней и внутренней сфер.

1. Пусть в начальный момент времени жидкость и граничные сферы покоятся, затем угловая скорость одной или обеих сфер импульсно возрастает до заданной величины. Жидкость в слое увлекается вращающимися граничными поверхностями, в результате чего возникает циркуляционное течение в меридиональной плоскости. Результирующее движение описывается системой нестационарных уравнений Навье — Стокса [9]

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{Re} \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \Pi \\ \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \operatorname{div} V \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= (1 - \gamma) T \operatorname{div} V + \frac{\gamma}{Re Pr} \frac{1}{\rho} \operatorname{div} (\lambda \nabla T) + \frac{\gamma(\gamma - 1) M^2}{Re} \frac{\eta}{\rho} \Phi \\ p &= \rho T \end{aligned}$$

Здесь V — вектор скорости с проекциями u, v, w на оси сферической системы координат r, θ, φ соответственно; η, λ — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности; Π — тензор вязких напряжений; Φ — диссипация энергии за счет вязкости.

За характерные масштабы величин выбираются следующие: $\rho_0, T_0, p_0 = \rho_0 R T_0, \eta_0, \lambda_0, \Omega_1, R_1, U = \Omega_1 R_1$ — плотность, температура, давление,

коэффициенты вязкости и теплопроводности в начальный момент времени, угловая скорость вращения и радиус внутренней сферы, характерная линейная скорость; за масштаб времени принята величина Ω^{-1} .

Безразмерные коэффициенты в системе (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{c_p}{c_v}, & M &= \frac{\Omega_1 R_1}{c} \\ \text{Pr} &= \frac{\eta_0 c_p}{\lambda_0}, & \text{Re} &= \frac{\Omega_1 R_1^2 \rho_0}{\eta_0} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь c_p, c_v — удельные теплоемкости; $R = c_p - c_v$ — газовая постоянная; $c = \sqrt{\gamma R T_0}$ — скорость звука; Re, Pr, M — числа Рейнольдса, Прандтля, Маха.

Полагаем, коэффициенты кинематической вязкости η/ρ и теплопроводности $\lambda/\rho c_p$ постоянными, тогда в безразмерном виде $\eta = \lambda = \rho$.

Система (1.1) решалась со следующими граничными условиями:

1) на сферах — условия прилипания

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad w = \sin \theta & \quad \text{при } r = 1 \\ u = v = 0, \quad w = \omega a \sin \theta & \quad \text{при } r = a \end{aligned} \quad (1.3)$$

($\omega = \Omega_2/\Omega_1$, $a = R_2/R_1$ — отношение угловых скоростей и радиусов внешней и внутренней сфер). Плотность на стенках вычисляется из уравнения неразрывности с учетом (1.3)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial r} \rho$$

температуры сфер одинаковы и поддерживаются постоянными:

$$T(r = 1) = T(r = a) = 1 \quad (1.4)$$

2) при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ — условия симметрии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} = v = w = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 & \quad \text{при } \theta = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} = v = \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 & \quad \text{при } \theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Кроме того, в начальный момент времени задаются распределения по пространству всех неизвестных функций

$$\begin{aligned} u(r, \theta, 0) = v(r, \theta, 0) = w(r, \theta, 0) = 0 \\ \rho(r, \theta, 0) = T(r, \theta, 0) = 1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

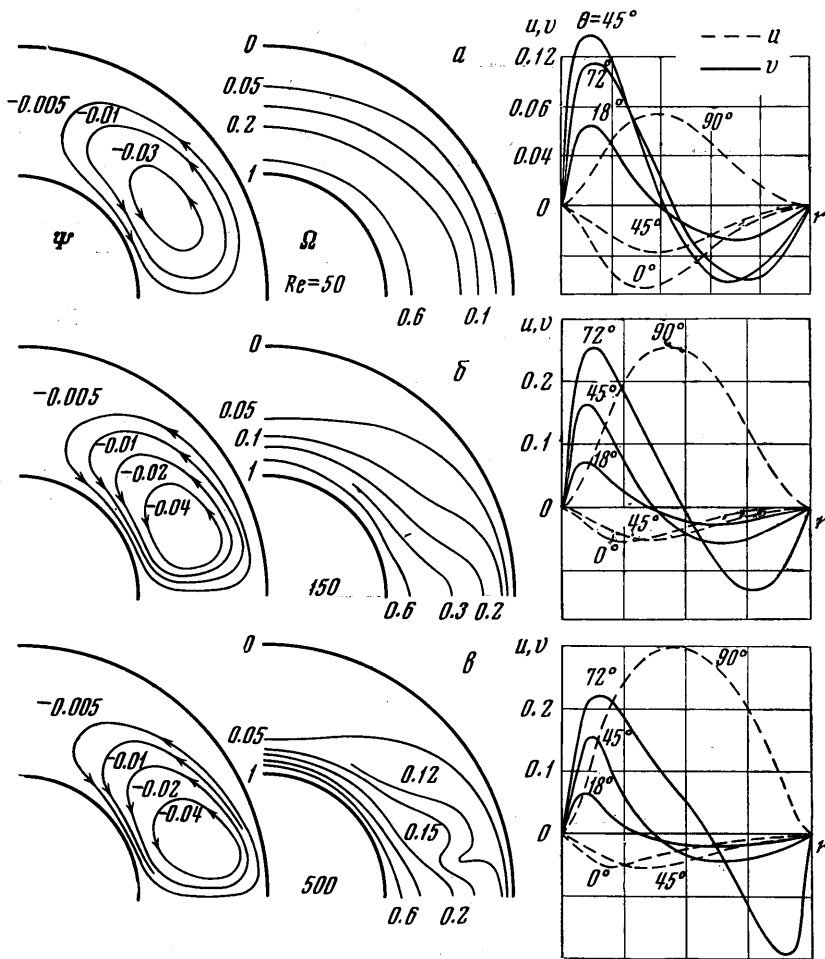
Полученная краевая задача для нестационарных нелинейных уравнений Навье — Стокса решалась разностным методом, описанным в работе [10]. Расчеты производились на БЭСМ-6 с равномерной сеткой с числом узлов $N_r \times N_\theta = 21 \times 21$. Для контроля точности решения были проведены расчеты на сетках 31×31 и 41×41 . Шаг по времени определялся условием устойчивости [10].

Характерные параметры задачи имели значения

$$\begin{aligned} \gamma &= 5/3, & \text{Pr} &= 1, & M^2 &= 0.6 & (M \approx 0.8) \\ \text{Re} &= 50 \div 500, & a &= 1.1 \div 2, & \omega &= 0, & -1 \end{aligned}$$

С ростом t течение выходит на стационарный режим.

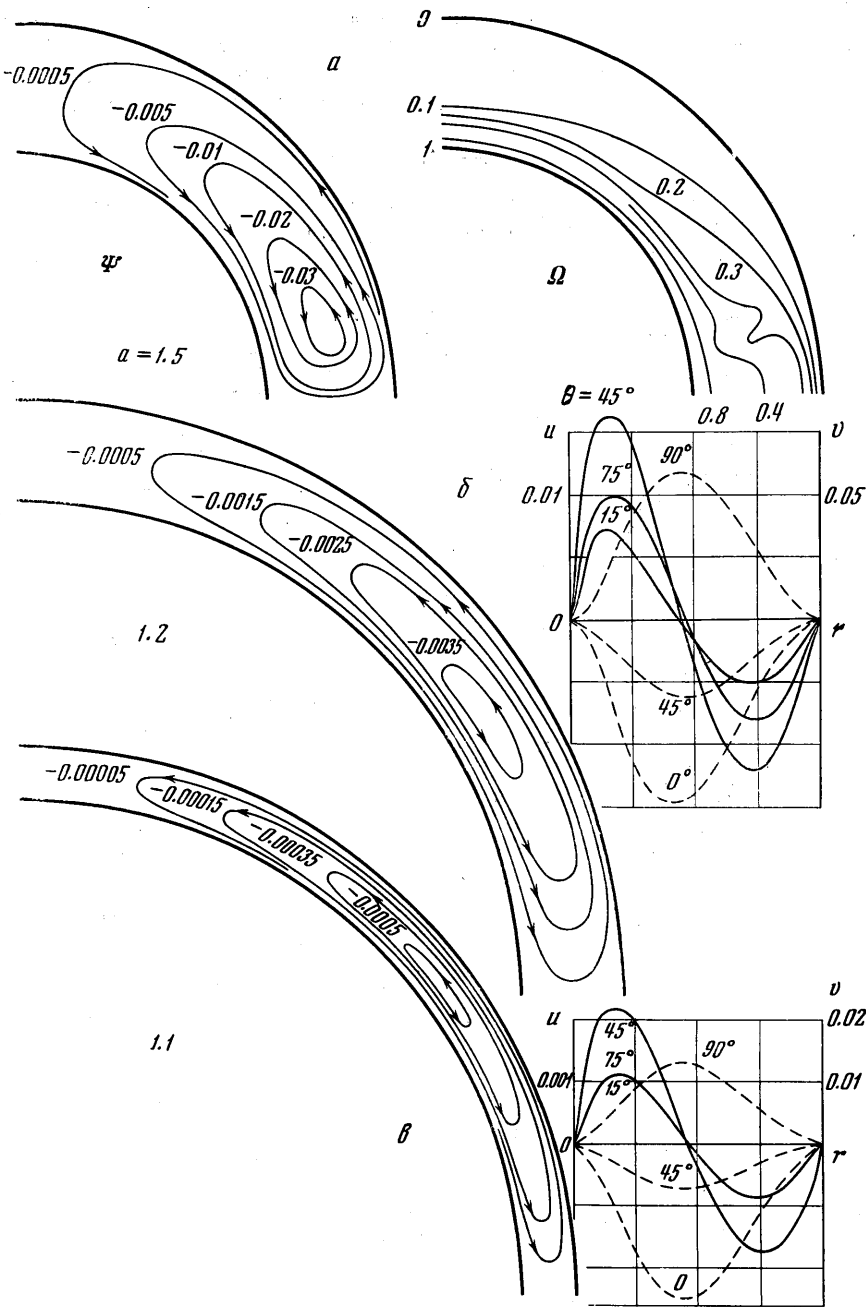
2. На фиг. 1 представлены картины линий тока меридионального течения $\psi = \text{const}$, поверхностей равной угловой скорости $\Omega = \text{const}$ и компоненты меридиональной скорости, описывающие установившееся движение в толстых слоях жидкости ($a = 2$) при $Re = 50, 150, 500$ в случае вращения одной внутренней сферы ($\omega = 0$). При малых Re в об-



Фиг. 1

ласти течения образуется вихрь с направлением циркуляции против часовой стрелки; поверхности равных угловых скоростей — почти concentрические сферы. С ростом числа Re интенсивность циркуляции возрастает, затем при достаточно больших Re рост ее почти прекращается. Центр вихря опускается к плоскости экватора, у полюсов образуются застойные зоны. Поверхности $\Omega = \text{const}$ с ростом Re сгущаются вблизи внутренней сферы, а в центральной области вихря сильно искажаются и имеют сложную структуру. На сферах и в экваториальной плоскости происходит формирование пограничных слоев. Время установления течения $\sim \sqrt{Re}$.

На фиг. 2 представлены результаты расчета при постоянном числе $Re = 500$ и различных значениях толщины слоя $\delta = (R_2 - R_1)/R_1 = a - 1 = 0.1, 0.2, 0.5$ ($a = 1.1, 1.2, 1.5$) в случае $\omega = 0$ (вращается



Фиг. 2

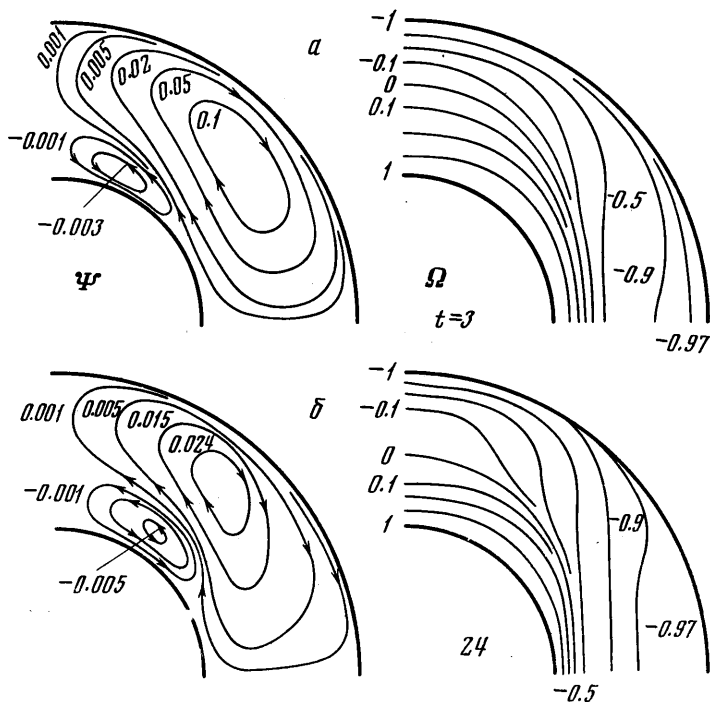
одна внутренняя сфера). С уменьшением толщины слоя при $Re = \text{const}$ отмечается следующее: центр вихря поднимается, пограничные слои исчезают, поверхности $\Omega = \text{const}$ становятся почти концентрическими сферами. Время установления течения $\sim \sqrt{Re^*}$, где $Re^* = \Omega_1 R_1 \delta / \nu_0 = Re \delta / R_1$ — число Рейнольдса, пересчитанное по толщине слоя δ .

На фиг. 3, а, б представлены линии $\Omega = \text{const}$ и линии тока течения, возникающего при вращении граничных сфер с одинаковыми угловыми

скоростями в противоположных направлениях ($\omega = -1$), в различные моменты времени t при $a = 2$, $Re = 200$. В этом случае за начальное распределение угловой скорости Ω было взято распределение по линейному закону — от 1 на внутренней до -1 на внешней сфере, т. е. в (1.6):

$$w(r, \theta, 0) = (3 - 2r)r \sin \theta.$$

На фигурах можно проследить развитие течения со временем вплоть до установления (фиг. 3, б). Полученную картину установившегося течения (фиг. 3, б) можно сравнить с результатами решения аналогичной задачи



Фиг. 3

методом Галеркина [3] для $\omega = -1$, $a = 2$ и чисел Рейнольдса $Re = 25$, 125 (все числа Re пересчитаны по нашим характерным параметрам) и проследить развитие течения с ростом чисел Рейнольдса. При малых Re в области течения образуется один вихрь с циркуляцией по часовой стрелке. С ростом числа Re его интенсивность убывает, в области полюса у внутренней сферы образуется слабый вихрь с обратной циркуляцией интенсивность которого возрастает при дальнейшем увеличении Re .

3. Сделаем на основе проведенных расчетов некоторые качественные выводы и проведем сравнение с имеющимися в литературе результатами. При изучении движения вязкой жидкости в шаровых слоях было установлено, что характер течения существенно зависит от трех параметров: толщины слоя жидкости $\delta = a - 1$, числа Рейнольдса Re и отношения угловых скоростей вращения сфер; зависимость течения от вращательного числа Маха для $M^2 = 0.6$ оказалась мало существенной.

Действительно, с ростом числа Re при постоянной толщине слоя ($a = 2$) интенсивность меридиональной циркуляции заметно меняется, происходит сильная деформация линий тока и искажение поверхностей рав-

ных угловых скоростей. Эти изменения происходят различным образом в зависимости от значений ω . При $\omega = 0$ меридиональное течение сосредоточивается в экваториальной зоне, в области полюсов образуются застойные зоны, наибольшее искажение поверхностей $\Omega = \text{const}$ происходит в центре вихря (фиг. 1). При $\omega = -1$ вблизи внутренней сферы в области полюса образуется второй вихрь, меридиональное течение стремится сосредоточиться внутри цилиндрического слоя со средним радиусом, примерно равным R_1 ; вне этого цилиндра образуется зона почти твердотельного вращения фиг. 3, б и фиг. 4, 5 из [3].

В толстых слоях с ростом Re происходит образование пограничных слоев на сферах и в области экватора при $\omega = 0$ (фиг. 1, в); и вблизи цилиндра $\approx R_1$ и на сферах внутри этого цилиндра при $\omega = -1$, (фиг. 3, б).

С уменьшением толщины слоя δ при постоянном Re и $\omega = 0$ наблюдается та же тенденция, что и при постоянной толщине слоя и уменьшении числа Рейнольдса: меридиональный вихрь поднимается, пограничные слои исчезают, поверхности $\Omega = \text{const}$ становятся почти concentрическими сферами (фиг. 2). Это приводит к выводу, что для слоев с $\delta < 1$ характерным является число Рейнольдса, посчитанное по толщине слоя Re^* .

Время установления течения во всех рассмотренных случаях порядка $\sqrt{Re^*}$.

Учет сжимаемости жидкости в интервале рассмотренных параметров при $M^2 = 0.6$ и $Pg = 1$ оказывает слабое влияние на движение жидкости. Максимальное изменение плотности в слое за счет вращения при $\omega = 0$ не превышало нескольких процентов. Однако, при $\omega \neq 0$ плотность меняется значительно; так, при $\omega = -1$, $Re = 200$ и $a = 2$ в экваториальной области возникает перепад плотности примерно в 3 раза.

Результаты, полученные в [3, 8] для течений несжимаемой жидкости при соответствующих значениях определяющих параметров Re , ω и a качественно и количественно согласуются с приведенными результатами (фиг. 1, 3, б). Следует отметить существенное отличие приведенных результатов от результатов работы [6], полученных методом Галеркина для несжимаемой жидкости. Сравнение работы [6] с работой [3], где аналогичная задача решалась более точно методом типа Галеркина, наводит на мысль, что, по-видимому, базис из 12 функций, принятый в работе [6], недостаточен.

Из работы [11], где энергетическим методом (как известно, этот метод дает нижнюю границу устойчивости) исследуется устойчивость движений в сферических слоях, можно было бы заключить, что к расчетам при больших числах Рейнольдса нужно относиться с осторожностью, так как реализуемые течения могут оказаться трехмерными. Однако в эксперименте [12] для слоев с $a \geq 1.19$ и $\omega = 0$ наблюдались устойчивые осесимметричные движения при числах Рейнольдса, которые значительно превышают критические значения, полученные в [11]. Качественное согласование с экспериментальными данными полученных результатов и результатов работ [3, 8] позволяет сделать вывод о том, что рассчитанные осесимметричные течения близки к реализуемым в действительности.

Поступило 24 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Братухин Ю. К. К оценке критического числа Рейнольдса для течения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. ПММ, 1961, т. 25, № 5.
2. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.

3. Munson B. R., Joseph D. D. Viscous incompressible flow between concentric rotating spheres, pt 1. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 49, No. 2, pp. 289—305.
4. Proudman I. The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres. *J. Fluid Mech.*, 1956, vol. 1, No. 5, pp. 505—516.
5. Stewartson K. On almost rigid rotation, pt 2. *J. Fluid Mech.*, 1966, vol. 26, No. 1, pp. 131—144.
6. Якушин В. И. О стационарном движении вязкой жидкости в шаровом слое. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1968, № 2.
7. Якушин В. И. О стационарном движении вязкой жидкости между двумя сферическими поверхностями. *Уч. зап. Пермск. ун-та, Гидродинамика*, 1968, вып. 1, № 184, стр. 169—183.
8. Pearson C. E. A numerical study of the time-dependent viscous flow between two rotating spheres. *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 28, No. 2, pp. 323—336.
9. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2. М., Физматгиз, 1963.
10. Браиловская И. Ю. Разностный метод численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. *Сб. «Вычислительные методы и программирование»*, вып. 7, М., Изд-во МГУ, 1967.
11. Munson B. R., Joseph D. D. Viscous incompressible flow between concentric spheres, pt 2. *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 49, No. 2, pp. 305—319.
12. Сорокин М. П., Хлебутин Г. Н., Шайдуров Г. Ф. Об устойчивости движения жидкости между двумя вращающимися сферическими поверхностями. *ПМТФ*, 1966, № 6.