

УДК 532.526 : 538.4

ОТРЫВНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ЛАМИНАРНОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ВДУВЕ И ОТСОСЕ

А. В. ГОТОВЦЕВ

(Москва)

Исследованы автомоделные течения в магнитогиродинамическом пограничном слое при наличии градиента давления, вдува и отсоса проводящей жидкости. Определена область существования автомоделных решений для «отрывного» режима течения, характеризующегося равным нулю трением на стенке. Указаны области изменения определяющих параметров, при которых осуществляются безотрывные течения на непроницаемой и проницаемой поверхностях. Отмечено, что в диффузорном режиме течения автомоделное уравнение МГД пограничного слоя при фиксированных граничных условиях на стенке и на бесконечности допускает бесчисленное множество решений. Предложен способ отбора решения и указан расчетный метод его определения. Показана возможность значительного расширения области безотрывных течений при наложении электрического и магнитного полей.

1. Постановка задачи. Рассмотрим магнитогиродинамический пограничный слой несжимаемой жидкости на непроводящей поверхности при отсосе или вертикальном вдуве сквозь стенку жидкости, обладающей теми же свойствами, что и среда в основном потоке. Внешнее магнитное поле \mathbf{B} лежит в плоскости течения, а электрическое поле \mathbf{E} ориентировано в направлении оси z : $\mathbf{E} = (0, 0, -E(x))$. Здесь x — координата, отсчитываемая вдоль контура, y — в перпендикулярном к нему направлении, z — координата, перпендикулярная плоскости течения. Уравнение пограничного слоя при условии, что магнитное число Рейнольдса, определенное по длине поверхности, порядка единицы, а характерный размер изменения магнитного поля в поперечном направлении намного больше толщины пограничного слоя, запишутся в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma B}{\rho} (E - uB), \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь u и v — продольная и поперечная компоненты скорости; $p = p(x)$ — давление во внешнем потоке; ρ , σ и ν — плотность, электрическая проводимость и коэффициент кинематической вязкости жидкости (ρ , σ , $\nu = \text{const}$). Величина $B = B(x)$ представляет собой нормальную к поверхности составляющую магнитного поля в точках обтекаемой поверхности. Функции $B(x)$ и $E(x)$ должны рассматриваться как заданные [1].

Граничными условиями для решения системы (1.1) являются соотношения

$$\begin{aligned} u = 0, \quad v = v_w(x) \quad \text{при } y = 0 \\ u \rightarrow u_\infty(x) \quad \text{при } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $v_w(x)$ — заданная на поверхности скорость вдува ($v_w > 0$) или отсоса ($v_w < 0$) жидкости. Систему (1.1), используя связь между параметрами на границе пограничного слоя

$$u_\infty \frac{du_\infty}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\sigma B}{\rho} (E - u_\infty B) \quad (1.3)$$

можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\sigma B^2}{\rho} (u_\infty - u) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Рассмотрим класс течений, когда скорость на границе пограничного слоя представляется степенной зависимостью

$$u_{\infty} = Cx^m \quad (C = \text{const} > 0) \quad (1.5)$$

Будем предполагать, что указанное изменение скорости реализуется при течении в канале, спрофилированном соответствующим образом. При этом «эффективный» градиент давления

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dp}{dx} - \sigma BE$$

будет определяться из равенства (1.3) по заданным величинам u_{∞} и B , где u_{∞} — скорость течения в канале, рассчитываемая в одномерном приближении¹.

Нетрудно убедиться, что течение в МГД пограничном слое будет автомодельным, если заданные магнитное поле и скорость вдува удовлетворяют соотношениям

$$B = B_* x^{(m-1)/2}, \quad v_w = v_{w*} x^{(m-1)/2} \quad (B_*, v_{w*} = \text{const})$$

Вводя функцию тока $\psi(x, y)$ и используя автомодельные переменные

$$\eta = \sqrt{\frac{m+1}{2}} \frac{C}{v} x^{(m-1)/2} y, \quad \Phi(\eta) = \sqrt{\frac{m+1}{2\nu C}} x^{-(m+1)/2} \psi(x, y)$$

$$\left(u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)$$

систему (1.4), (1.2) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению со следующими граничными условиями:

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' + \beta(1 - \Phi^2) + n(2 - \beta)(1 - \Phi') = 0$$

$$\Phi = \Phi_w, \quad \Phi' = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \quad (1.6)$$

$$\Phi' \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty$$

$$\beta = \frac{2m}{m+1}, \quad n = \frac{\sigma B^2(x)x}{\rho u_{\infty}(x)} = \frac{\sigma B_*^2}{\rho C}, \quad \Phi_w = -\sqrt{\frac{2}{(m+1)\nu C}} v_{w*} \quad (1.7)$$

Здесь n — параметр МГД взаимодействия; константа Φ_w характеризует интенсивность вдува или отсоса. При вдуве жидкости в пограничный слой параметр $\Phi_w < 0$, а при отсосе $\Phi_w > 0$. Течению на непроницаемой стенке соответствует значение $\Phi_w = 0$. Таким образом, решение системы (1.6) зависит от трех безразмерных параметров: β , n и Φ_w .

В случае, когда магнитное поле отсутствует ($n = 0$), уравнение системы (1.6) переходит в уравнение Фолкнера — Скэн, описывающее течение в гидродинамическом пограничном слое. Численное решение уравнения Фолкнера — Скэн при $\Phi_w = 0$ получено в работе [2] в диапазоне значений $\beta_0 \leq \beta \leq 2$. Значение $\beta_0 = -0.1988$ соответствует течению с нулевым напряжением трения на стенке.

В работе [3] указано на существование максимально возможной интенсивности вдува $\Phi_w = \Phi_w^*$ при безградиентном газодинамическом обтекании пластины ($\beta = 0$): $-\Phi_w^* = 0.87574$. При $\Phi_w = \Phi_w^*$ трение на пластине обращается в нуль. Очевидно, что при уменьшении параметра β ($\beta < 0$), характеризующего градиент скорости на границе пограничного слоя, уменьшается и максимально возможная скорость вдува. Так, при $\beta = -0.1988$ эта скорость равна нулю, а при $\beta < \beta_0$ безотрывное течение в гидродинамическом пограничном слое осуществляется лишь при $\Phi_w > 0$, т. е. при отсосе [4–8]. Некоторые решения системы (1.6) при $n \neq 0$, $\Phi_w = 0$ приведены в работе [9].

В данной работе внимание сосредоточено на течениях в магнитогазодинамическом пограничном слое, характеризующихся равным нулю трением τ_w на стенке при наличии градиента давления и вдува или отсоса проводящей жидкости. Движения в пограничном слое при $\tau_w = 0$ будем называть отрывными течениями.

Известно, что в гидродинамическом пограничном слое отрывные автомодельные течения реализуются лишь при $\beta \leq 0$, т. е. при отрицательном или равном нулю градиенте скорости по границе пограничного слоя. Из системы (1.6) следует, что магнитное поле ($n \neq 0$) при том же значении β ($0 \leq \beta \leq 2$) должно приводить к более

¹ Заметим, что в магнитной гидродинамике возможны и другие интерпретации соотношения (1.5).

наполненному профилю скорости, чем при $n = 0$. Следует заметить, что в данной постановке задачи наполненность профиля безразмерной скорости $\Phi'(\eta)$ (при заданных граничных условиях на стенке) определяется только значениями параметров β и η и не зависит от того, действует ли электромагнитная сила вдоль или против направления движения жидкости в ядре потока.

Следовательно, отрывные магнитогидродинамические течения, так же как и гидродинамические, реализуются лишь при ¹

$$-\infty < \beta \leq 0 \quad (C > 0) \quad (1.8)$$

2. Отрывные течения. Выпишем автомодельное уравнение МГД пограничного слоя с граничными условиями для отрывного режима течения

$$\Phi''' + \Phi\Phi'' + \beta(1 - \Phi')(\varepsilon + \Phi') = 0 \quad (2.1)$$

$$\Phi = \Phi_w, \quad \Phi' = 0, \quad \Phi'' = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \quad (2.2)$$

$$\Phi' \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{n(2 - \beta)}{\beta} \quad (2.4)$$

Чтобы решить систему (2.1) — (2.3), необходимо найти связь между параметрами β и ε , поскольку число граничных условий на единицу превышает порядок системы. Назовем характеристическими такие значения параметров β и ε , при которых существует решение системы (2.1) — (2.3). Попробуем определить область характеристических параметров в плоскости β, ε . Из соотношений (1.8) и (2.4) следует: $\varepsilon \leq 1$. Покажем, что при $\varepsilon \leq 0$ не существует решения системы (2.1) — (2.3). Действительно, при $\varepsilon = 0$ и граничных условиях (2.2) имеется лишь тривиальное решение уравнения (2.1): $\Phi \equiv \Phi_w, \Phi' \equiv \Phi'' \equiv 0$, которое не удовлетворяет граничному условию (2.3). При $\varepsilon < 0$ и граничных условиях (2.2) получим $\Phi'''(0) = -\beta\varepsilon < 0$. Поскольку $\Phi''(0) = \Phi'(0) = 0$ и $\Phi'''(0) < 0$, то вблизи стенки ($\eta > 0$) течение будет возвратным $\Phi'' < 0, \Phi' < 0$.

Для выполнения граничного условия (2.3) необходимо, чтобы существовала точка $\eta = \eta_m$ локального минимума функции $\Phi'(\eta)$ такая, что $\Phi' < 0, \Phi'' = 0, \Phi''' > 0$ при $\eta = \eta_m$. Однако из уравнения (2.1) следует, что при $\beta < 0, \varepsilon < 0$ не существует точки, удовлетворяющей этим соотношениям. Итак, решение уравнения (2.1) при граничных условиях (2.2), (2.3) может существовать лишь при

$$0 < \varepsilon \leq 1, \quad -\infty < \beta < 0 \quad (2.5)$$

Существование решения (2.1) — (2.3) внутри этой области ниже будет доказано с помощью численного эксперимента. Соотношения (2.5) имеют простую физическую интерпретацию: суммарная объемная сила F на стенке отлична от нуля и направлена против потока. Действительно, имеем

$$F(x, y) = -\frac{dp}{dx} + \sigma BE - \sigma B^2 u = \rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \sigma B^2 (u_\infty - u)$$

$$F(x, 0) = \rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} + \sigma B^2 u_\infty = \rho u_\infty \frac{du_\infty}{dx} \varepsilon \quad (2.6)$$

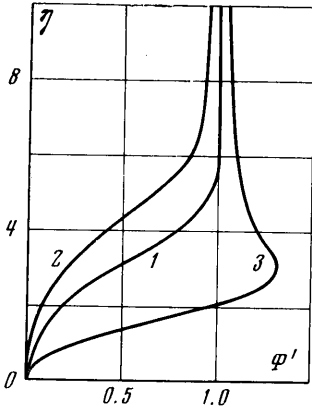
Так как согласно (2.5) $\varepsilon > 0$, а $du_\infty/dx < 0$ ($\beta < 0$), то $F(x, 0) < 0$. Нетрудно также убедиться, что и в ядре потока сила F отрицательна. В самом деле

$$F(x, \infty) = F(x, 0) - \sigma B^2 u_\infty \leq F(x, 0) < 0$$

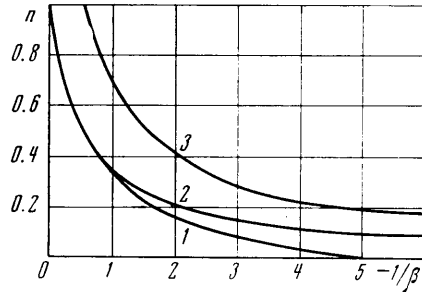
¹ Имеется строгое доказательство данного утверждения.

Утверждение $F(x, 0) < 0$ является обобщением известного в газовой динамике условия, согласно которому в отрывном режиме $dp/dx > 0$. В магнитогидродинамическом пограничном слое, как видно из соотношений (2.5) и (2.6), отрывные режимы возможны как при $dp/dx > 0$, так и при $dp/dx < 0$.

Из проведенного выше анализа вытекает, что при $\varepsilon < 0$ возможны лишь такие течения, при которых напряжение трения на стенке больше нуля. Заметим, что соотношения (2.5) сохраняются при произвольной величине параметра Φ_w .



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Особенности решения системы (2.1) — (2.3). Уравнение (2.1) при $\beta < 0$ допускает бесчисленное множество решений, удовлетворяющих граничным условиям (2.2), (2.3). Выше было показано, что характеристические значения β , ε системы (2.1) — (2.3) должны находиться в области, определяемой соотношениями (2.5). Оказалось, что любая точка из области (2.5) является характеристической. При этом решения системы можно разделить на два семейства: а) решения, при которых $\Phi' < 1$ при любых $0 < \eta < \infty$; б) решения «с выбросом», т. е. такие решения, при которых $\Phi' > 1$ для некоторых значений $0 < \eta < \infty$. Вид профилей скорости $\Phi'(\eta)$ при $\beta = -0.6065$, соответствующий семейству а), представлен на фиг. 1 кривыми 1, 2, а семейству б) кривой 3. В обычной гидродинамике ($\varepsilon = 1$) о неединственности решения уравнения Фолкнера — Скэн впервые упоминается в работе [2].

Из физических соображений ясно, что при заданных значениях параметров Φ_w и β должно реализоваться лишь одно течение (назовем его «искомым»). Это означает, что параметры ε , β и Φ_w должны быть связаны некоторой зависимостью (назовем ее «характеристической»). Чтобы выделить искомое решение для каждого значения Φ_w (т. е. найти характеристическую зависимость $\varepsilon = \varepsilon_0(\beta; \Phi_w)$), необходимо ввести некоторые дополнительные условия. По всей видимости, отрывные профили «с выбросом» не имеют физической интерпретации при $\beta < 0$ и однородной электрической проводимости жидкости. Поэтому решения б) с выбросом так же, как для случая гидродинамического пограничного слоя [2], исключались из рассмотрения. Из семейства решений а) выбиралось такое решение, чтобы $\Phi' \rightarrow 1 - 0$ при $\eta \rightarrow \infty$ наискорейшим образом. Поясним это на примере. Для большей наглядности рассмотрим плоскость параметров $(n, -1/\beta)$. На фиг. 2 кривая 1 является характеристической (т. е. искомым решением) при $\Phi_w = 0$. Кривая 2 (назовем ее ограничивающей) описывается уравнением $\varepsilon(n, \beta) = 0$ (см. (2.4)).

Область, определяемая соотношениями (2.5), заключена между осями координат и ограничивающей кривой. Пусть $n_0, (-1/\beta)_0$ — некоторая точ-

ка на характеристической кривой 1, построенной для $\Phi_w = 0$. Зафиксируем значение $-1/\beta = (-1/\beta)_0$, тогда любому значению $0 < n < n_0$ соответствует решение с выбросом, а значению $\beta/(\beta - 2) > n > n_0$ — решение с профилем скорости менее наполненным, чем при $n = n_0$. Напомним, что в обычной гидродинамике ($\varepsilon = 1$) выбор наиболее наполненного профиля аргументировался непрерывной зависимостью решения от параметра β [2, 8].

Проведенный отбор можно еще интерпретировать следующим образом: для каждого $\beta < 0$ выбирается такое значение параметра ε , при котором профиль скорости принадлежит семейству а) и имеет наименьшую для этого семейства толщину вытеснения. Ниже будет показано, что для случая, когда электрический ток на внешней границе пограничного слоя отсутствует, подводимая к потоку электрическая мощность W пропорциональна толщине вытеснения δ^* . Таким образом, отобранному решению соответствует наименьшая для семейства а) подводимая к пограничному слою электрическая мощность.

Чтобы представить природу неединственности решения системы (2.1) — (2.3), рассмотрим асимптотическое поведение функции Φ при больших η . Из граничного условия (2.3) получаем, что искомое асимптотическое решение может быть представлено в виде суммы

$$\Phi = \varphi_1 + \varphi_2 = \eta - k + \varphi_2, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \varphi_2' = 0 \quad (k = \text{const}) \quad (3.1)$$

Из соотношений (3.1) получаем, что уравнение (2.1) переходит в следующее асимптотическое:

$$\varphi_2''' + (\eta - k)\varphi_2'' - \beta\varphi_2'(1 + \varepsilon) = 0 \quad (3.2)$$

Из асимптотического решения уравнения (3.2) получаем выражение для безразмерной скорости Φ' при больших значениях η

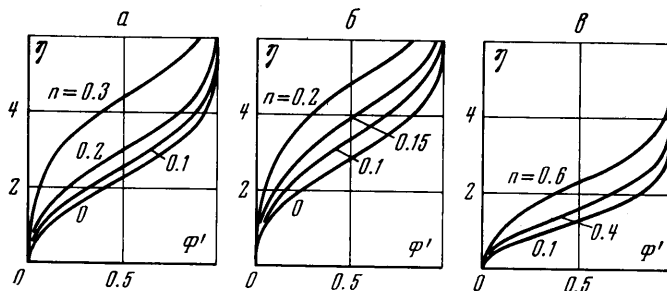
$$\Phi' = 1 + \alpha_1(\eta - k)^{-\beta(1+\varepsilon)-1} \exp[-1/2(\eta - k)^2] + \alpha_2(\eta - k)^{\beta(1+\varepsilon)}$$

Здесь α_1 и α_2 — произвольные константы.

Из граничного условия (2.3) следует, что при $\beta(1 + \varepsilon) \geq 0$ должно быть $\alpha_2 = 0$. Поскольку для срачивания полученного внешнего асимптотического решения с решением вблизи стенки необходимо иметь две константы, то при $\alpha_2 = 0$ решение единственно. Однако если $\beta(1 + \varepsilon) < 0$ (это соотношение выполняется, в частности, в области (2.5)), то, выбирая произвольные значения α_2 ($\alpha_2 \neq 0$), можно получить бесчисленное множество решений, удовлетворяющих граничным условиям на стенке и на бесконечности. Причем при $\alpha_2 > 0$ эти решения будут принадлежать семейству б), а при $\alpha_2 < 0$ — семейству а). В данной работе отбирались такие решения, в которых бы отсутствовал алгебраический член в асимптотическом решении, с тем чтобы $\Phi' \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow \infty$ экспоненциально. Кривая 3 на фиг. 2 описывается уравнением $\varepsilon(n, \beta) = -1$.

Область параметров $(n, -1/\beta)$, лежащая выше этой кривой, характеризуется тем, что суммарная объемная сила на стенке $F(x, 0)$ для параметров из этой области направлена вдоль по потоку и превышает по абсолютной величине объемную силу в ядре потока $F(x, \infty)$, которая действует против течения ($F(x, \infty) < 0$, $F(x, 0) > |F(x, \infty)|$). Для любой точки $n, -1/\beta$ из области выше кривой 3 условие на бесконечности при заданных $\Phi(0)$ и $\Phi'(0)$ выполняется единственным образом, поскольку $\beta(1 + \varepsilon) > 0$. Для любых $n, -1/\beta$ из области, лежащей ниже этой кривой, выполняется соотношение $|F(x, 0)| < |F(x, \infty)|$ и решение при заданных $\Phi(0)$ и $\Phi'(0)$ не единственно. Напомним, что области $\varepsilon(n, \beta) < 0$ соответствуют безотрывные течения.

4. Результаты расчетов. На рис. 3, а, б, в приведены зависимости $\Phi'(\eta)$ при $\Phi''(0) = 0$, $\Phi_w = 0, -0.3, 2$ соответственно и различных значениях параметров взаимодействия $n_0(\beta)$. Как видно из фиг. 3, отрывные профили безразмерной скорости $\Phi'(\eta)$ с ростом параметра МГД взаимодействия n становятся менее наполненными.



Фиг. 3

Эту же тенденцию отражает приведенная на фиг. 4 зависимость безразмерной толщины вытеснения δ_0^* от параметра взаимодействия при отрывном режиме течения

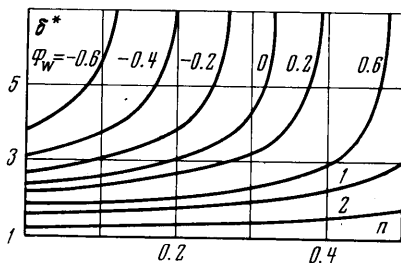
$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \sqrt{\frac{2\nu}{C(m+1)}} x^{(1-m)/2} \delta_0^*, \quad \delta_0^* = \int_0^\infty (1 - \Phi') d\eta \quad (4.1)$$

Интересно отметить, что при $E = u_\infty B$ (токи в ядре отсутствуют) подводимая к потоку на единицу длины электрическая мощность W пропорциональна толщине вытеснения

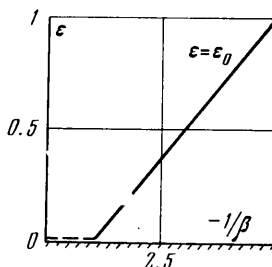
$$W = \int_0^\infty \sigma E(E - uB) dy = \int_0^\infty \sigma u_\infty B^2 \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \sigma C^2 B_*^2 x^{3m-1} \delta^*$$

Из полученного решения следует, что с увеличением $|\beta|$ ($\beta < 0$) характеристическая зависимость $\varepsilon_0(\beta; \Phi_w)$ монотонно убывает (фиг. 5). Так, уже при $\beta = -1$ и $\Phi_w = 0$ получаем $\varepsilon_0 = 10^{-7}$.

В результате численного счета обнаружено, что при $\Phi_w = 0$, $\varepsilon = 10^{-7}$ и при любом значении $0 < -1/\beta < 1$ получаются профили скорости $\Phi'(\eta)$ с выбросом за



Фиг. 4



Фиг. 5

единицу (вида кривой 3 на фиг. 1), т. е. решения, принадлежащие семейству б). Нахождение численного решения в этом диапазоне затруднительно и, по-видимому, не имеет практического смысла, поскольку ε становится исчезающе малой величиной.

Таким образом, если отрывное решение при $\Phi_w = 0$, $\beta < -1$ существует, то характеристическая зависимость $\varepsilon_0(\beta; \Phi_w)$ должна удовлетворять соотношению

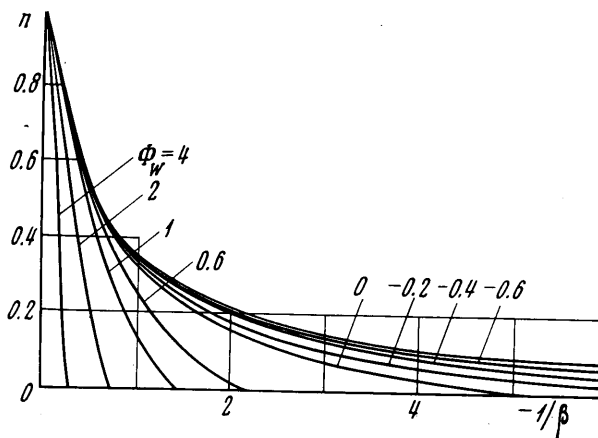
$$0 < \varepsilon_0(\beta; 0) < 10^{-7} \quad \text{при} \quad -\infty < \beta < -1, \quad \Phi_w = 0$$

$$n_0 = -\frac{\beta}{2 - \beta} (1 - \varepsilon_0) \quad (4.2)$$

Оценим величину относительной ошибки значения параметра n_0 , определяемого соотношениями (4.2)

$$\left| \frac{\Delta n_0}{n_0} \right| = \left| \frac{\Delta \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \right| \approx |\Delta \varepsilon_0| \lesssim \varepsilon_0 \lesssim 10^{-7}$$

В работе [9] было получено решение (2.1) — (2.3) при $\Phi_w = 0$. При $\beta > -1$ характеристическая зависимость $n_0(\beta)$, представленная в работе [9], совпадает с результатами данной работы. Однако, как следует из сравнения результатов, приведенная в [9] зависимость $n_0(-1/\beta)$ при $-\infty < \beta < -1$ не удовлетворяет соотношению (2.5). Так, уже при $\beta < -2$ кривая $n_0(-1/\beta)$ из работы [9] проходит су-



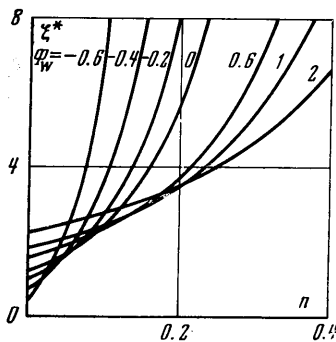
Фиг. 6

щественно выше ограничивающей кривой. По всей видимости, такое расхождение результатов вызвано тем, что нулевого приближения, использованного в работе [9] разложения функции $\varphi(\zeta)$, недостаточно. Предложенное в работе [9] разложение имеет вид

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{N^k} \varphi_k, \quad \varphi(\zeta) = \sqrt{N} \Phi(\eta), \quad N = \frac{2n}{m+1}, \quad \zeta = \sqrt{N} \eta \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{N} (\beta \varphi'^2 - \varphi \varphi'') = \varphi''' + 1 + \frac{\beta}{N} - \varphi'$$

Кроме того, в работе [9] было получено решение (4.3) и при более высоких степенях приближения по параметру $1/N$, однако в этом случае член β/N учитывался в уравнении первого, а не нулевого приближения. Из соотношений (1.7), (2.5) видно, что пренебрегать членом β/N в уравнении нулевого приближения нельзя ни при каком значении $-\infty < \beta < 0$, так как $|\beta/N| = 1/(1-\varepsilon) > 1$.



Фиг. 7

На фиг. 6 приведена зависимость $n(-1/\beta; \Phi_w)$, найденная в результате численного решения (2.1) — (2.3) при вдуве ($\Phi_w < 0$) и отсосе ($\Phi_w > 0$). Отбор решений при $\Phi_w \neq 0$ и $\beta < 0$ так же, как и при $\Phi_w = 0$, производился из условия наискорейшего стремления на бесконечности функции $\Phi'(\eta)$ к единице снизу. Область безотрывного течения для каждого значения параметра Φ_w лежит выше соответствующих кривых $n(-1/\beta; \Phi_w)$, приведенных на фиг. 6.

Следует подчеркнуть, что для всех значений параметра Φ_w , характеризующего скорость вертикального вдува или отсоса, существует одна и та же ограничивающая кривая.

В таблице представлена зависимость $\beta = \beta(n, \Phi_w)$, полученная в результате решения системы (2.1) — (2.3). Прочерк в таблице означает, что при

соответствующих данной графе значениям n и Φ_w и при $\varepsilon = 10^{-7}$ получаются решения, принадлежащие семейству б), т. е. искомое решение (если оно существует при этих значениях n, Φ_w) практически сливается с ограничивающей кривой, а параметры β и n связаны соотношением

$$1 + n(2 - \beta) / \beta < 10^{-7}$$

Φ_w					
n	4	2	0.6	0.2	0
0	1.4782	0.71204	0.47484	0.27672	0.19884
0.05	1.5938	0.80932	0.56723	0.36904	0.28742
0.10	1.7173	0.91389	0.66692	0.46594	0.38403
0.15	1.8494	1.0266	0.77490	0.57157	0.48978
0.20	1.9914	1.1487	0.89233	0.68738	0.60647
0.30	2.3093	1.4258	1.1618	0.95815	0.88477
0.40	2.6830	1.7601	1.4944	—	—
0.50	3.1309	2.1802	—	—	—
0.60	3.6864	—	—	—	—
0.70	—	—	—	—	—

Φ_w				
n	-0.2	-0.3	-0.4	-0.6
0	0.12977	0.09991	0.07332	0.03070
0.05	0.21852	0.18906	0.16320	0.12334
0.10	0.31568	0.28701	0.26239	0.22744
0.15	0.42285	0.39564	0.37326	—
0.20	0.54241	0.51802	0.5009	—

Напомним, что согласно соотношениям (2.5) характеристические кривые не могут иметь общих точек с ограничивающей кривой, а могут лишь приближаться к ней на сколь угодно малое расстояние. Одной из характеристик отрывного течения является параметр отрыва ξ^* , равный значению формпараметра

$$\xi = \frac{dp}{dx} \frac{\delta^{*2}}{\rho v u_\infty} \tag{4.4}$$

в сечении отрыва [10-12]. Заметим, что в автомоделном решении отрывные профили скорости реализуются сразу по всему обтекаемому контуру. В том случае, когда электрические токи на границе МГД пограничного слоя отсутствуют, градиент газодинамического давления, как и в обычной гидродинамике, выражается через u_∞ . Используя соотношения (4.1), (4.4), получим

$$\xi = -\beta \delta_0^{*2}$$

На фиг. 7 показана зависимость параметра отрыва ξ^* от параметра взаимодействия n и интенсивности вдува Φ_w .

Автор благодарит А. Б. Ватажина за ценные советы и постоянное внимание к работе, а также Г. М. Бам-Зеликовича и Н. М. Белянина за полезные обсуждения.

Поступило 1 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
2. Hartree D. R. On an equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equation of the boundary layer. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1937, vol. 33.
3. Emmons H. W., Leigh D. C. Tabulation of Blasius functions with blowing and suction. ARC Paper CP 157, 1954.

4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
 5. Nickel K. Eine einfache Abschätzung für Grenzschichten. Ing — Arch., 1962, vol. 31.
 6. Козлов Л. Ф., Крупник В. М. Интегрирование на ЭВМ уравнения Фолькнера — Скейна для случая замедленного течения на пористой поверхности при отсасывании. Межвед. научн. сб. «Вычислительная и прикладная математика», 1969, вып. 9.
 7. Fox H., Saland H. Separation solutions for the similar laminar boundary layer. AIAA Journal, 1970, No. 4.
 8. Stewartson K. Further solutions of the Falkner — Skan equation. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1954, vol. 50.
 9. Китанин Э. Л., Соковишин Ю. А. Пограничный слой проводящей среды в магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1966, № 1, стр. 47—50.
 10. Бам-Зеликович Г. М. Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 2.
 11. Ватажин А. Б. Об отрыве магнитогидродинамического пограничного слоя. ПММ, 1963, т. 27, № 2.
 12. Ватажин А. Б. Определение параметра отрыва несжимаемого магнитогидродинамического пограничного слоя с помощью теории размерности. Теплофизика высоких температур, 1972, т. 10, № 2.
-