

УДК 532.522.2 : 532.594

## О НЕЛИНЕЙНОМ РАЗВИТИИ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН В СТРУЕ ЖИДКОСТИ

М. П. МАРКОВА, В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Рассматривается развитие капиллярных волн, возникающих в струе жидкости после потери устойчивости. Исследовано влияние нелинейных членов на процесс развития возмущений. Возбуждение более высоких гармоник в результате нелинейного взаимодействия может приводить к нарушению однородности капель, образующихся при распаде струи. Выбором вида начального возмущения и начальной амплитуды можно в определенной степени воздействовать на процесс распада струи.

Неустойчивость струйных течений в линейном приближении исследуется, начиная с работ Рэлея, который вывел критерий неустойчивости под действием сил поверхностного натяжения [1]. Влияние окружающей среды на устойчивость бесконечно длинного жидкого цилиндра рассмотрено в работе [2]. Линейная теория получила дальнейшее развитие в ряде последующих работ. Хотя эта теория предсказывает появление неустойчивости, она не может описать распадение струи на капли, когда существенную роль играют нелинейные стадии развития возмущений, которыми в значительной степени определяется, например, однородность образующихся капель. Так как распыление жидкости на капли имеет важные приложения [3], были сделаны попытки построить теорию нелинейной неустойчивости. В работе [4] применялось разложение по амплитуде волны. В данной статье применяется метод разложения в ряд Фурье с последующим численным интегрированием нелинейных уравнений для коэффициентов.

**1. Основные уравнения.** Рассмотрим осесимметричную струю вязкой капельной жидкости, вытекающую с некоторой характерной скоростью  $U_0$  из отверстия, радиус которого  $R_0$ . Введем цилиндрическую систему координат  $r, z, \theta$  с началом в центре выходного отверстия и ось  $z$  направим по линии действия силы тяжести. Обозначим размерные составляющие скорости и давление через  $v^*, u^*, w^*, p^*$ . Для осесимметричной струи эти величины зависят только от  $r, z$  и времени  $t^*$ , причем  $w^* \equiv 0$ . Предположим, что давление слабо зависит от  $r$  и равно давлению на поверхности струи. Это предположение хорошо выполняется, когда поперечная составляющая скорости  $v^*$  много меньше продольной составляющей  $u^*$ , что имеет место в стационарном течении струи и при образовании достаточно длинных волн [5]. Если форму поверхности струи обозначить через  $d(z, t^*)$ , то давление в жидкости будет

$$p^* = p_a^* + T \{d^{-1} - d'' [1 + (d')^2]^{-1}\} [1 + (d')^2]^{-1/2} \quad (1.1)$$

Здесь  $T$  — коэффициент поверхностного натяжения, штрихи обозначают дифференцирование по  $z$ . Первый член в правой части  $p_a^*$  представляет собой давление в окружающей среде, а второй член — давление, вызванное поверхностным натяжением. Вязким взаимодействием струи с окружающей средой пренебрегаем. В силу предположения (1.1) движение жидкости описывается уравнениями пограничного слоя. Если ввести безразмерные величины  $x, y, h, u, v$  соотношениями

$$t^* = R_0 U_0^{-1} t, \quad r = R_0 y, \quad z = R_0 x, \quad d = R_0 h, \quad u^* = U_0 u, \quad v^* = U_0 v \quad (1.2)$$

то эти уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{F} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

В выражении для давления отброшен член  $(\partial h / \partial x)^2$ , который считается малым по сравнению с единицей. Форма поверхности  $h(x, t)$  будет изменяться с удалением от сечения  $x = 0$  как вследствие развития среднего течения, так и в результате образования волн. Уравнение ее получаем из условия непротекания

$$h \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u y dy = 0 \quad (1.4)$$

Так как трение на поверхности струи отсутствует по предположению, то получаем условие

$$\partial u / \partial y = 0, \quad (y = h(x, t)) \quad (1.5)$$

В сечении  $x = 0$  должны быть заданы начальный профиль скорости и толщина струи

$$u = u(0, y, t), \quad h = h(0, t) \quad (1.6)$$

Уравнение (1.3) содержит три безразмерных параметра (числа Рейнольдса, Фруда, Вебера)

$$R = U_0 R_0 \nu^{-1}, \quad F^{-1} = g R_0 U_0^{-2}, \quad W = \sigma^{-1} = \rho R_0 U_0^2 T^{-1} \quad (1.7)$$

в которых  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\rho$  — плотность,  $g$  — ускорение силы тяжести. Характер течения зависит от значений этих параметров.

**2. Стационарное течение.** Образование волн в струе рассматривается здесь как задача устойчивости. Система уравнений (1.3), (1.4) с граничными и начальными условиями (1.5), (1.6) имеет стационарное решение, которое оказывается неустойчивым. Если начальный профиль равномерный  $u(0, y, t) = f(t)$ , то скорость  $u$  будет функцией  $x, t$ . Такое течение описывается системой уравнений для  $u(x, t), h(x, t)$

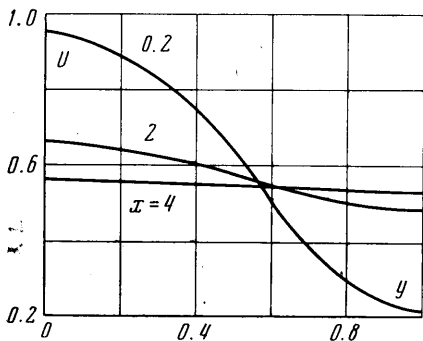
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{F} - \sigma \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{h} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{2} h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Граничное условие (1.5) выполняется автоматически. Скорость  $v$  находим из уравнения неразрывности

$$v = -\frac{1}{2} y \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.2)$$

В случае произвольного профиля  $u(0, y, t)$  система (2.1) дает предельное решение, к которому стремится течение в струе с удалением от сечения  $x = 0$ . Скорость выхода на это решение зависит прежде всего от величин  $R, F$ . При умеренных числах  $R$  выравнивание профиля по сечению происходит на расстоянии, составляющем несколько диаметров выходного отверстия. На фиг. 1 показаны стационарные профили скорости в нескольких

сечениях при  $R = 40$ ,  $F^{-1} = 0$ . Они получены численным интегрированием системы (1.3), (1.4) в стационарном случае; в сечении  $x = 0$  задавался почти параболический профиль скорости. Влияние начального профиля на развитие возмущений здесь не рассматривается. Примем предположение, что профиль скорости либо всегда равномерный, либо выравнивание его



Фиг. 1

происходит быстрее, чем развитие волн. Тогда задача сводится к рассмотрению системы (2.1). Стационарное решение этой системы есть  $u(x) = h^{-2}$ , причем  $h(x)$  находится из уравнения

$$\frac{1}{h^2} \left( \frac{1}{h^2} \right)' = \frac{1}{F} - \sigma \left( \frac{1}{h} - h'' \right)' \quad (2.3)$$

с соответствующими краевыми условиями. Параметр  $F$  определяет степень сужения струи по мере удаления от  $x = 0$ . Если  $F^{-1} = 0$ , то получаем струю постоянной толщины с постоянной скоростью — случай, кото-

рый обычно рассматривается при исследовании устойчивости. Если  $F^{-1} \neq 0$ , то при достаточно больших  $x$  будем иметь

$$h \approx (1/2F)^{1/4} x^{-1/4} \quad (2.4)$$

и изменение по  $x$  оказывается слабым. Предположим, что можно принять  $F^{-1} = 0$ . Физически это означает, что скорость истечения достаточно велика, чтобы не учитывать сужение, но не настолько велика, чтобы следовало учитывать взаимодействие струи с окружающей средой.

**3. Развитие возмущений по времени.** Рассмотрим периодические по  $x$  возмущения, которые представляют собой волны, распространяющиеся вдоль струи. Амплитуда волн с течением времени может изменяться (возрастать или затухать). Строго говоря, такие волны могли бы наблюдаться только в струе, неограниченной при  $x \rightarrow \pm \infty$ . Для полуограниченной струи более естественными являются волны, периодические по времени, амплитуда которых изменяется с удалением от  $x = 0$ . При исследовании устойчивости обычно применяется первый подход прежде всего потому, что он оказывается более простым. Если волны возникают вдали от сечения  $x = 0$ , то влияние начального сечения в действительности будет мало. Кроме того, при определенных условиях возмущения, изменяющиеся по времени и по пространству, можно связать определенными соотношениями. Об этой связи будет подробнее сказано в п. 4.

Введем независимые переменные  $\xi$ ,  $\tau$  и функции  $u$ ,  $h$

$$\xi = ax - \beta t, \quad \tau = \alpha \sigma^{1/2} t, \quad u = 1 + \sigma^{1/2} u_j \quad (3.1)$$

Тогда система уравнений (2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + (\omega + u) \frac{\partial u}{\partial \xi} &= h^{-2} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \alpha^2 \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial h}{\partial \tau} + (\omega + u) \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{1}{2} h \frac{\partial u}{\partial \xi} &= 0, \quad \omega = (1 - c) \sigma^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(индекс  $j$  опущен). Здесь  $c = \beta / \alpha$  есть фазовая скорость волны.

Бегущие волны с переменной по времени амплитудой соответствуют периодическим по  $\xi$  нестационарным решениям системы (3.2). Такие решения имеют вид

$$\begin{aligned} 2h &= 2h_0 + h_1 e^{-i\xi} + h_1^0 e^{i\xi} + h_2 e^{-2i\xi} + h_2^0 e^{2i\xi} + \dots \\ 2u &= 2u_0 + u_1 e^{-i\xi} + u_1^0 e^{i\xi} + u_2 e^{-2i\xi} + u_2^0 e^{2i\xi} + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь  $h_k = h_{k0} + ih_{k1}$ ,  $u_k = u_{k0} + iu_{k1}$ ,  $h_k^0$ ,  $u_k^0$  суть комплексно сопряженные величины. Коэффициенты разложений (3.3) — функции времени. Решение (3.3) можно записать также в виде

$$h = h_0 + h_{10} \sin \xi + h_{11} \cos \xi + h_{20} \sin 2\xi + h_{21} \cos 2\xi + \dots$$

и аналогично можно записать  $u$ .

Уравнения для  $h_k$ ,  $u_k$  можно получить либо методом работы [5], либо подставляя разложение (3.3) в уравнения (3.2) и приравнявая нулю выражения при различных степенях  $e^{i\xi}$ . Если в решении оставлять члены до второго порядка включительно, то эти уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_0' &= 0, \quad h_0' = -\frac{1}{4}(u_{11}h_{10} - u_{10}h_{11}) \\ ih_1' + \omega h_1 + \frac{1}{2}h_0 u_1 + \frac{3}{4}u_1^0 h_2 &= 0 \\ ih_2' + 2\omega h_2 + h_0 u_2 + \frac{3}{4}u_1 h_1 &= 0 \\ iu_1' + \omega u_1 + (\alpha^2 - h_0^{-2})h_1 + \frac{1}{2}u_1^0 u_2 - h_0^{-3}(\frac{3}{4}h_1^2 h_1^0 h_0^{-1} - h_1^0 h_2) &= 0 \\ iu_2' + 2\omega u_2 + 2(4\alpha^2 - h_0^{-2})h_2 + \frac{1}{2}u_1^2 + h_0^{-3}h_1^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Как следует из первого уравнения (3.4), средняя скорость в рассматриваемом нестационарном решении не меняется, и можно положить  $u_0 = 0$ . Каждое из уравнений системы (3.4) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, поэтому следует задать начальные значения всех функций  $h_k(0)$ ,  $u_k(0)$ . Этими значениями определяется начальное волновое возмущение. Волновое число  $\alpha$  считается заданным. Параметр  $\omega$  можно, вообще говоря, задавать произвольно, так как частота колебаний по времени заранее неизвестна, а значение  $\omega$  не влияет существенно на поведение решения.

Прежде всего, обратимся к линейному приближению системы (3.4), которое описывает линейную неустойчивость течения  $u_0 = 0$ ,  $h_0 = 1$ . Отбрасывая в (3.4) члены второго порядка и выше, получим

$$h_1' - i(\frac{1}{2}u_1 + \omega h_1) = 0, \quad u_1' - i[\omega u_1 + (\alpha^2 - 1)h_1] = 0 \quad (3.5)$$

Решение системы (3.5) имеет вид

$$\begin{aligned} h_1 &= C_1 \exp b_1 \tau + C_2 \exp b_2 \tau \\ u_1 &= -2i[(b_1 - i\omega)C_1 \exp b_1 \tau + (b_2 - i\omega)C_2 \exp b_2 \tau] \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $b$  находится из соотношений

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= i\omega \pm [1/2(1 - \alpha^2)]^{1/2} \quad (\alpha \leq 1) \\ b_{1,2} &= i\{\omega \pm [1/2(\alpha^2 - 1)]^{1/2}\} \quad (\alpha > 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются по начальным условиям

$$\begin{aligned} h_1(0) &= \varepsilon_1, \quad u_1(0) = \varepsilon_2 \\ C_1 &= [1/2i\varepsilon_2 - (b_2 - i\omega)\varepsilon_1](b_1 - b_2)^{-1}, \\ C_2 &= -[1/2i\varepsilon_2 - (b_1 - i\omega)\varepsilon_1](b_1 - b_2)^{-1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Первая из формул (3.7) выражает хорошо известный результат линейной теории: при  $0 \leq \alpha \leq 1$  возмущения с волновым числом  $\alpha$  будут с течением времени усиливаться за счет члена, содержащего  $\exp b_1 \tau = \exp(b_1 \alpha \sigma^{1/2} t)$ , и коэффициент усиления равен  $b_2 = [1/2 \sigma \alpha^2 (1 - \alpha^2)]^{1/2}$ . Численные значения  $b_2$  мало отличаются от результатов работы [1], в которой не делалось предположение о постоянстве давления в сечении струи.

$\alpha$	$\varepsilon$	$\tau_k$	$q_1$	$\alpha$	$\varepsilon$	$\tau_k$	$q_2$
0.5	0.1	5	2.49	0.5	0.1	4.7	1.95
0.5	0.05	6.2	3.22	0.625	0.1	5.2	2.04
0.5	0.01	8.8	5.01	0.75	0.1	5.8	2.18
0.5	0.001	12.6	7.17	0.875	0.1	7.4	2.20

Максимальный коэффициент усиления достигается при  $\alpha = 0.707$  (формула (3.7)) и  $\alpha = 0.697$  [1]. Как видно из (3.7), если положить  $\omega = 0$ , амплитуда волны не будет иметь колебаний по времени; в соответствии с определением  $\omega$ , это означает, что линейные волны распространяются со средней скоростью жидкости. Вторая из формул (3.7) показывает, что возможны и чисто периодические по времени решения (3.5) для коротких волн.

Рассмотрим два частных случая:  $\varepsilon_1 \neq 0, \varepsilon_2 = 0$  и  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 \neq 0$ . В первом из них в начальный момент возмущается толщина струи, а во втором — скорость (или расход). В качестве характеристики процесса возрастания амплитуды удобно ввести величину  $Q_1 = (h_{10}^2 + h_{11}^2)^{1/2} / h_{10}$  в первом случае и  $Q_2 = (u_{10}^2 + u_{11}^2)^{1/2} / u_{10}$  — во втором. Тогда на основании (3.6) получим

$$Q_{1,2} = 1/2 (\exp \delta \tau + \exp (-\delta \tau)) \quad (3.9)$$

При малых  $t$ , когда линейная теория применима, имеем

$$q_{1,2} = \ln Q_{1,2} \approx 1/2 (\delta \tau)^2, \quad \delta = [1/2 (1 - \alpha^2)]^{1/2}$$

**4. Пространственно растущие возмущения.** Пространственно растущие возмущения можно представить в виде разложений (3.1), коэффициенты которых являются функциями координаты  $x$ . Действительная величина  $\beta$  (частота колебаний) задается. Если возмущения малы, то в линейном приближении будем иметь

$$u = 1 + U \exp (bx + i\xi), \quad h = 1 + H \exp (bx + i\xi) \quad (4.1)$$

где  $U, H$  — амплитуды возмущений. Подставляя (4.1) в исходную систему уравнений (2.1) и отбрасывая члены с квадратами амплитуд, получим однородную линейную систему двух уравнений для  $U, H$ , условие разрешимости которой приводит к уравнению

$$[b + \alpha(1 - c)i]^2 = -1/2 \sigma (b + i\alpha) [b - 3\alpha^2 b + b^3 + i(\alpha - \alpha^3 + 3\alpha b^2)] \quad (4.2)$$

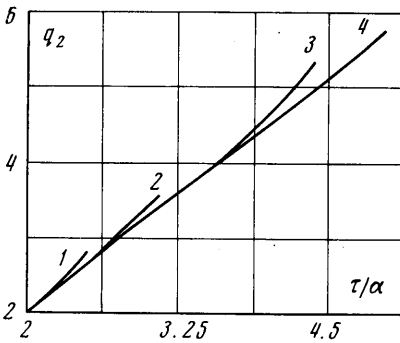
Величины  $U, H$  связаны соотношением

$$U + 2[b + \alpha(1 - c)i](b + i\alpha)^{-1}H = 0 \quad (4.3)$$

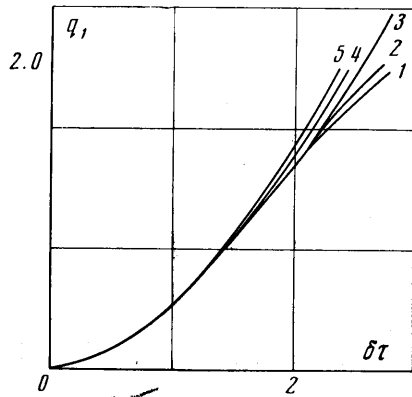
Уравнение (4.2) служит для определения волнового числа  $\alpha$  и коэффициента скорости возрастания  $b$  в зависимости от частоты колебаний  $\beta$ . Отделяя в (4.2) действительную и мнимую части, находим

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= -\frac{1}{2}\sigma(1 - 2\alpha^2 + 4b^2)\alpha \\ b^2 - (\alpha - \beta)^2 &= \frac{1}{2}\sigma[(1 - \alpha^2)\alpha^2 - b^2 - b^4 + 6b^2\alpha^2] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Если  $\sigma \ll 1$ , что обычно выполняется для рассматриваемых капиллярных струй, то  $\alpha - \beta \approx 0$ ,  $b^2 \approx \frac{1}{2}\sigma\alpha^2(1 - \alpha^2)$ , т. е. в первом приближении волна перемещается со средней скоростью жидкости, а скорость возрастания  $\alpha$  совпадает со скоростью возрастания по времени.



Фиг. 2



Фиг. 3

Чтобы получить уравнения нелинейного развития волн по  $x$ , введем переменные

$$u = 1 + \sigma^{1/2}u_j, \quad x = \alpha^{-1}\sigma^{-1/2}x_j, \quad 1 - c = \sigma^{1/2}\omega \quad (4.5)$$

где  $u_j, h$  зависят от  $\xi, x$ . Подставляя (4.5) в (2.1) и отбрасывая члены порядка  $\sigma^{1/2}$  и выше, получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + (\omega + u)\frac{\partial u}{\partial \xi} &= h^{-2}\frac{\partial h}{\partial \xi} + \alpha^2\frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial h}{\partial x} + (\omega + u)\frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{h}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

(индекс  $j$  опущен). Уравнения (4.6) совпадают с уравнениями (3.2) развития волн по времени, если заменить  $\tau$  на  $x$ .

**5. Результаты расчетов.** Пусть в момент  $t = 0$  задано начальное волновое возмущение, т. е. заданы коэффициенты  $h_k, u_k$  разложений (3.3). Тогда можно провести интегрирование системы (3.4), чтобы определить, как изменяются коэффициенты  $h_k, u_k$  с течением времени, и вычислить в каждый последующий момент времени форму волны и распределение скоростей. По такой схеме было проведено численное решение системы (3.4) при различных значениях волнового числа  $\alpha$  и разных начальных возмущениях. Интегрирование проводилось методом Рунге — Кутты с постоянным шагом по времени. В начальный момент на течение накладывались синусоидальные возмущения либо поверхности струи  $h_1 = \epsilon$ , либо распределения скоро-

сти  $u_1 = \varepsilon$ . Их развитие качественно одинаково. При любом  $0 \leq \alpha \leq 1$ , соответствующем неустойчивой длине волны, каждое из этих возмущений возрастает, амплитуда волн увеличивается. Естественно считать, что в тот момент, когда на длине волны впервые появляется точка  $\xi_1$ , в которой  $h(\xi_1) = 0$ , происходит разрушение струи.

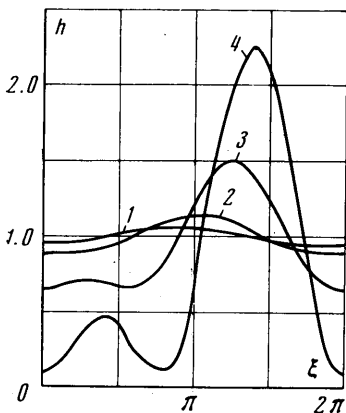
На фиг. 2 показано, как изменяется с течением времени величина  $q_1$  при различных значениях амплитуды начального возмущения  $h_1$ .

Кривым 1—4 отвечают значения  $u_1(0)$ , равные 0.1, 0.05, 0.01 и 0.001 соответственно;  $\alpha = 0.5$ .

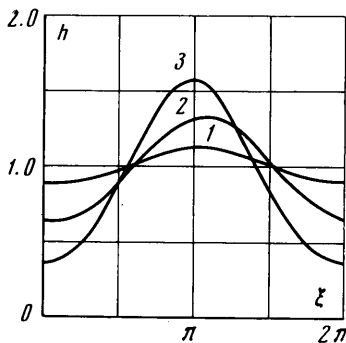
Линия 1, уравнение которой (3.9), соответствует развитию в линейном приближении при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При конечных значениях  $\varepsilon$  кривые возрастания  $q_1$  имеют с линией 1 лишь общий начальный участок. С ростом времени развитие отклоняется от линейного, а соответствующая кривая отклоняется от линии 1. Чем больше  $\varepsilon$ , тем раньше происходит ответвление. Однако расстояние, разделяющее кривые, остается небольшим, поэтому до момента разрушения струи развитие основной гармонике близко к линейному.

На фиг. 3 изображены кривые развития возмущений с одинаковой начальной амплитудой  $\varepsilon$  при различных длинах волн. Взято  $h_1(0) = 0.1$ ; кривые 1—5 соответ-

ствуют значениям  $\alpha$ , равным 0.125, 0.625, 0.71, 0.875 и 0.9375. Кривая 3 соответствует возмущению, макси-



Фиг. 4



Фиг. 5

мально растущему по линейной теории. В характере развития возмущений при разных  $\alpha$  имеются определенные различия. Общим является непрерывное возрастание первоначального возмущения, приводящее к разрушению струи. В экспериментах также наблюдается распад при разных  $\alpha$  [ $\varepsilon \rightarrow 0$ ].

В таблице приведены некоторые результаты расчетов. Здесь дано волновое число  $\alpha$ , амплитуда начального возмущения  $\varepsilon$ , безразмерное время развития до момента разрушения  $\tau_k$ , а также величины  $q_1$ ,  $q_2$ , по которым можно судить о том, насколько увеличилась амплитуда основной гармонике до момента разрушения. Как видно из таблицы, начальные возмущения влияют на распад струи. При одной и той же длине волны возмущение формы струи и возмущение расхода дают разные значения  $\tau_k$ . Еще сильнее на  $\tau_k$  влияет начальная амплитуда возмущения. С ростом  $\varepsilon$  заметно падает  $\tau_k$ . Таким образом, процессом разрушения струи можно до известной степени управлять не только выбором начальных параметров жидкости [ $\varepsilon$ ], но и выбором начальных возмущений, что экспериментально наблюдалось в [7].

На фиг. 4, 5 показано, как изменяется форма волны в процессе развития возмущения. На фиг. 4 принято  $\alpha = 0.5$ ,  $u_1(0) = 0.1$ , причем кривым 1—4 отвечают значения  $t = 1, 2, 4$  и 5 соответственно. Кривые 1—3 на фиг. 5 построены при  $\alpha = 0.75$ ,  $u_1(0) = 0.1$  и  $t = 2, 4$  и 6 соответственно. При малых временах форма волны близка к гармонической, однако с ростом амплитуды она существенно изменяется. Наибольшая и наименьшая толщина струи изменяются с разной скоростью, что соответствует экспериментальным наблюдениям [8]. На поздней стадии развития заметное влияние начинает оказывать возбуждение второй гармонике, вызываемое нелинейным взаимодействием. На фиг. 4 можно видеть образование второго максимума в распределении толщины струи. Хотя этот максимум много меньше основного, он может играть заметную роль, вызывая образование капелек меньшего размера. Этот факт экспериментально исследовался в работе [9], в которой показано, что нарушение однородности капель может быть связано с возбуждением высоких кратных частот колебаний. Образование второго максимума происходит лишь в случае длинновол-

новых возмущений при  $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ . Возмущения коротковолновые, для которых  $\alpha_1 < \alpha \leq 1$ , развиваются более гладко, ярко выраженный локальный максимум не наблюдается. Пример такого развития дается на фиг. 5. Критическое значение  $\alpha_1$  соответствует примерно длине волны наиболее растущего возмущения.

Поступило 16 VII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей. Теория звука, т. 2, М., Гостехиздат, 1955.
2. Петров Г. И. Об устойчивости вихревых слоев. Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 304.
3. Бородин В. А., Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Ягодкин В. И. Распыление жидкости. М., «Машиностроение», 1967.
4. Yuen M. C. Non-linear capillary instability of a liquid jet. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt 1.
5. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
6. Явельский М. Б. Некоторые характеристики монодисперсного распада струи жидкости. Инж.-физ. ж., 1969, т. 16, № 3.
7. Холин Б. Г. О влиянии формы регулярных возмущений поверхности жидкой струи на ее распад на капли. Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 2.
8. Goedde E. F., Yuen M. C. Experiments on liquid jet instability. J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, pt 3.
9. Rutland D. F., Jameson G. J. A non-linear effect in the capillary instability of liquid jets. J. Fluid Mech., 1971, vol. 46, pt 2.
10. Незгада В. Ю. Влияние начальных параметров жидкости на распад струи. ПМТФ, 1970, № 3.