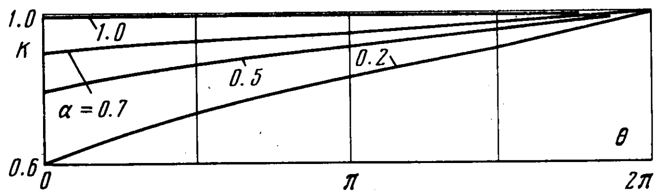


Фиг. 6

Коэффициент эжекции K с ростом θ от 0 до 2π растет от величины

$$K_{\min} = \frac{\eta}{\eta_*} \lim_{\theta\to 0} \frac{\Phi(\vartheta)}{\Phi(\theta)} = \frac{\eta}{\eta_*} \lim_{\theta\to 0} \left[\frac{\chi(\vartheta)}{\chi(\theta)}\right]^{2/3} = \left(\frac{\eta_*}{\eta}\right)^{1/3}$$

до величины

$$K_{\max} = \frac{\eta}{\eta_*} \lim_{\theta\to 2\pi} \frac{\Phi(\vartheta)}{\Phi(\theta)} = \frac{\eta}{\eta_*} \left[\frac{\chi(\vartheta)}{\chi(\theta)}\right]^{1/2} = 1$$

При $\alpha = 1$ $K = 1$, т. е. расходы высоконапорной и низконапорной жидкости одинаковы.

Поступило 3 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. О гидравлическом ударе в водонапорных трубах. М.— Л., Гостехтеоретиздат, 1949.
2. Андронов А. А., Аронович Г. В. К теории гидравлического тарана. Инж. сб., т. 20, 1954, т. 20.
3. Натанзон М. С., Сухих В. А. Экспериментальные исследования вынужденных разрывных колебаний жидкости в трубопроводах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
4. Цынкова О. Э. О вибрационном подъеме жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.

УДК 533.6.013.122

К РАСЧЕТУ СРЫВНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ

С. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, М. И. НИШТ

(*Москва*)

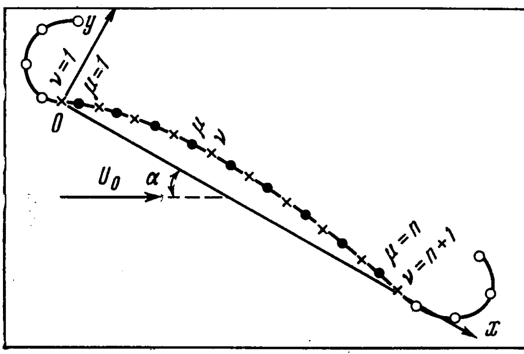
В настоящее время проявляется интерес к моделированию и расчету срывных течений. Методы, основанные на схеме идеальной среды, содержат определенные возможности, границы которых могут быть уточнены в процессе численных экспериментов на современных ЦВМ. Попытки в этом направлении делались, например, в работах [1–3].

В работе [4] показана возможность расчета сворачивания свободных вихрей за крылом в концевые жгуты в рамках стационарной нелинейной теории. Методы, развитые для нелинейных стационарных задач [4] и линейных нестационарных задач [5], позволяют перейти к решению общей нестационарной нелинейной задачи о крыле.

В данной работе излагается численный метод расчета неустановившегося обтекания тонкого профиля несжимаемым потоком при наличии срыва с передней и задней кромок. Зависимость граничных условий от координат и времени может быть произвольной, а угол атаки профиля — большим. Идея метода состоит в переходе от непрерывных распределений и процессов к дискретным. Во-первых, заменяющий крыло и его след вихревой слой в расчетах моделируется системой дискретных вихрей, представляющих собой прямолинейные бесконечные нити с постоянной по длине циркуляцией. Во-вторых, непрерывный процесс изменения по времени граничных условий на профиле заменяется ступенчатым: в определенные (расчетные) моменты времени эти условия изменяются скачком, а в промежутке между расчетными моментами остаются неизменными.

Предлагаемый метод позволяет рассчитывать весь переходный процесс. Он сравнительно легко обобщается на пространственный случай нестационарного обтекания тонкого крыла произвольной формы в плане.

1. Метод расчета. Рассмотрим тонкое крыло бесконечного размаха, движущееся в идеальной несжимаемой среде со средней поступательной скоростью U_0 под углом атаки α (фиг. 1). Введем жестко связанную с крылом систему координат xy, при этом начало координат O совместим с передней кромкой крыла, ось x направим назад вдоль его хорды, а ось y — вверх, перпендикулярно плоскости крыла.



Фиг. 1

Пусть в некоторый момент времени $t = 0$ граничные условия на крыле начинают изменяться по произвольному закону

$$\frac{W_n}{U_0} = f(\xi_0, \eta_0, \tau), \quad \xi_0 = \frac{x_0}{b},$$

$$\eta_0 = \frac{y_0}{b}, \quad \tau = \frac{U_0 t}{b} \quad (1.1)$$

Здесь x_0, y_0 — координаты точки на поверхности крыла, b — хорда крыла, W_n — нормальная составляющая относительной скорости среды.

Изменение граничных условий по времени приводит к изменению циркуляций присоединенных вихрей, заменяющих крыло, что будет сопровождаться сходом свободных вихрей. Не приводя всех уравнений и условий рассматриваемой задачи, которые подробно описаны в работах [4, 5], отметим лишь особенности этих уравнений и условий для случая срывного нестационарного обтекания крыла.

В качестве дополнительного условия при решении задачи, как обычно, используется гипотеза Чаплыгина — Жуковского о сходе свободных вихрей с острой задней кромки крыла. При этом, вообще говоря, на передней кромке будут возникать бесконечные скорости, что физически невозможно. В связи с этим потребуем выполнения указанного постулата и на передней кромке крыла. Тогда свободные вихри будут сходить как с задней, так и с передней острых кромок, и скорости здесь будут конечны. Указанную схему можно рассматривать как простейшую модель срывного обтекания тонкого крыла в идеальной среде.

Дискретные вихри на крыле и контрольные точки, в которых удовлетворяются граничные условия о непротекании крыла, выбираются следующим образом (фиг. 1). Тонкий профиль делится на n равных частей. Присоединенные вихри располагаются на линиях μ $(1 \leqslant \mu \leqslant n)$ на расстоянии $1/2$ длины каждого участка от его начала, а контрольные точки — на линиях ν $(1 \leqslant \nu \leqslant n+1)$ — на конце каждого участка. В результате такого разбиения контрольные точки находятся посередине между соседними вихрями, а первая и последняя контрольные точки — на кромках крыла. При увеличении числа вихрей n соответствующие суммы, дающие выражения для скоростей, перейдут в сингулярные интегралы, у которых берется их главное значение по Коши. То обстоятельство, что расчетные точки на корме и носке лежат за последними вихрями крыла, автоматически обеспечивает выполнение постулата Чаплыгина — Жуковского. Свободные вихри стелются вначале по поверхности крыла, сходят с кромок, а дальше движутся по линиям тока относительного движения.

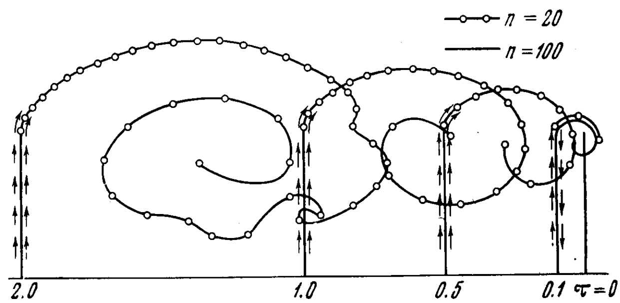
В нелинейной теории крыла бесконечного размаха в качестве основного вихревого элемента естественно рассматривать бесконечно длинный прямолинейный вихревой шнур постоянной по длине циркуляции.

Составляющие относительной скорости в любой точке на крыле и вне его равны сумме соответствующих компонент скорости невозмущенного потока и возмущенной скорости, вызванной крылом и его вихревым следом. Если задан закон движения крыла, то нетрудно найти составляющие скорости невозмущенного потока. Составляющие возмущенной скорости равны сумме составляющих скоростей, индуцируемых в данной точке присоединенными и свободными вихрями. Эти скорости легко вычисляются, если известны циркуляции вихрей на крыле и вне его.

В рассматриваемый момент времени на крыле находятся как присоединенные, так и свободные вихри, а вне крыла образуются две пелены свободных вихрей — носовая и кормовая. Поэтому при вычислении циркуляций в каждый момент времени поперечными вихрями заменяется на крыле суммарный вихревой слой, включающий в себя и присоединенные и свободные вихри, а вне крыла — носовая и кормовая пелена свободных вихрей.

Следуя работе [5], непрерывный процесс изменения кинематических параметров движения крыла и циркуляций по времени заменим дискретным. Безразмерное время, протекающее между последовательными (расчетными) моментами изменения параметров, т. е. расчетный шаг, выберем равным $\Delta\tau = n^{-1}$.

В качестве расчетных примем моменты, которые непосредственно предшествуют скачкообразному изменению параметров. В моменты, следующие непосредственно за расчетными, скачком изменяются циркуляции на крыле и от присоединенных

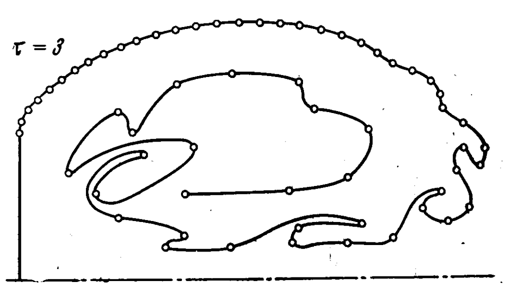


Фиг. 2

вихрей отделяются параллельные им свободные вихри. В промежутке между расчетными моментами кинематические параметры и циркуляции не меняются, а свободные вихри движутся по линиям тока относительного движения с постоянной скоростью, равной скорости относительного движения в той точке, где они находились в начале расчетного интервала времени. Циркуляция образовавшихся свободных вихрей во все последующие моменты времени сохраняется неизменной.

В каждый расчетный момент времени необходимо найти суммарные циркуляции вихрей на крыле, циркуляции свободных вихрей, образовавшихся в отрезок времени, предшествовавший расчетному моменту и только что сошедших с носка и кормы крыла, а также положение всех свободных вихрей вне крыла (циркуляции этих вихрей, как уже указывалось выше, со временем не меняются).

Указанное на фиг. 1 расположение дискретных вихрей и расчетных точек позволяет в любой расчетный момент времени определить все неизвестные циркуляции. Для этого из граничных условий в $(n+1)$-й контрольной точке и условия о постоянстве циркуляции получается система из $n+2$ линейных алгебраических уравнений.



Фиг. 3

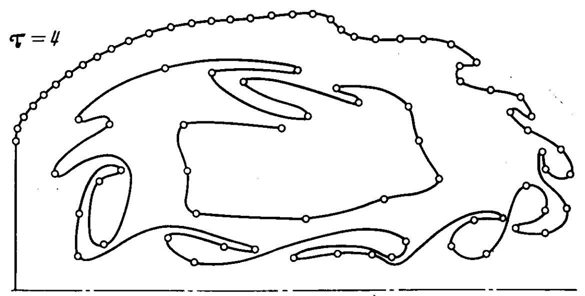
Для определения положения сошедших с крыла свободных вихрей в каждый расчетный момент времени используется условие движения вихрей, сформулированное выше. При этом криволинейные траектории движения свободных вихрей вне крыла заменяются системой прямолинейных отрезков. Расчет положения свободных вихрей проводится последовательно и начинается с ближайших к крылу точек, в которых расположены вихри.

В результате решения системы уравнений в каждый расчетный момент находятся суммарные циркуляции присоединенных и свободных вихрей на крыле. Для расчета аэродинамических нагрузок по теореме Жуковского «в малом» из суммарных циркуляций необходимо выделить циркуляции присоединенных вихрей [5]. Однако можно воспользоваться непосредственно интегралом Коши — Лагранжа. Для нахождения аэродинамической нагрузки в данной точке крыла интеграл Коши — Лагранжа применяется к верхней и нижней поверхностям крыла, при этом разность потенциалов скоростей на верхней и нижней поверхностях выражается через циркуляцию по соответствующему замкнутому контуру.

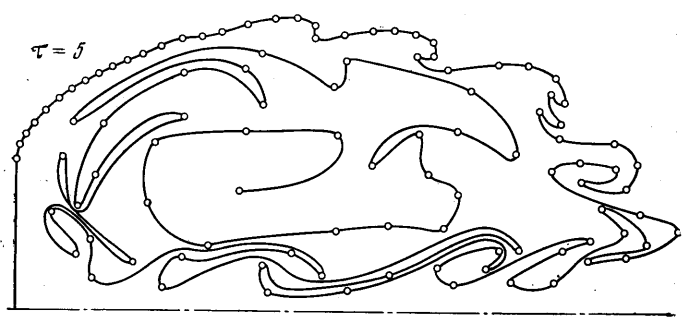
2. Пример. В качестве примера произведен расчет обтекания пластинки под углом атаки $\alpha = 90°$, когда она внезапно переходит от состояния покоя к движению с постоянной скоростью U_0. Таким образом, скорость поступательного движения описывается зависимостью

$$U(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < 0 \\ U_0, & \tau \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

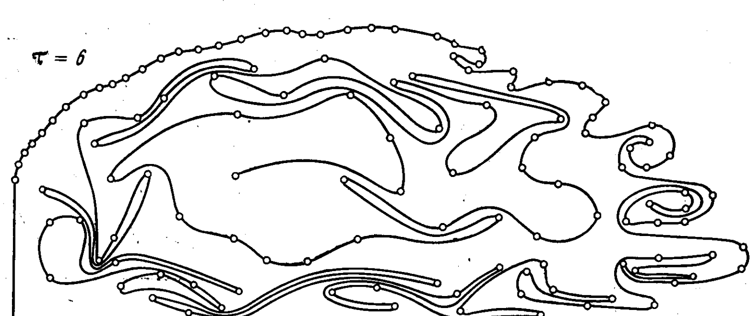
В расчетах пластина заменялась различным числом вихрей ($n = 10 \div 100$) как с методической целью, так и в зависимости от изучаемого этапа обтекания, кото-



Фиг. 4



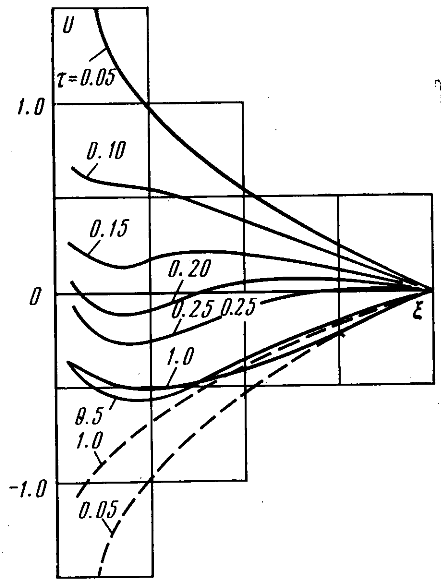
Фиг. 5



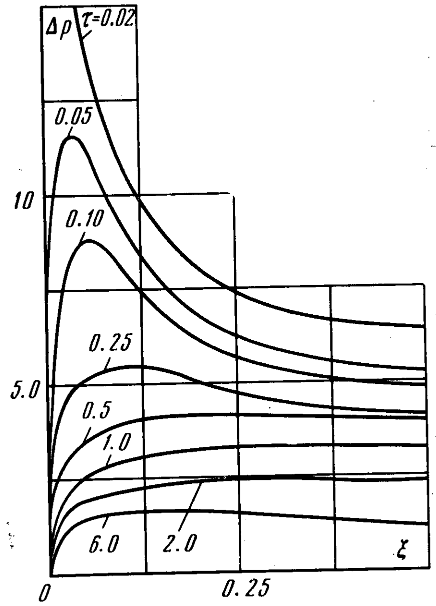
Фиг. 6

рый характеризуется безразмерным временем. Чтобы полнее проследить начальный этап обтекания, бралось $n = 100$. Однако по мере развития процесса обтекания в памяти машины накапливались данные о все большем числе вихрей за пластиной. Кроме того, увеличение n уже мало влияло на результаты. Поэтому при большом τ расчеты производились с $n = 10$ и 20.

Так как нижняя и верхняя части пластины обтекаются симметрично и эта симметрия практически не нарушалась в расчетах до больших τ ($\tau \leqslant 13$), то дальше приводятся данные только для одной половины пластины. На фиг. 2 показан на-



Фиг. 7

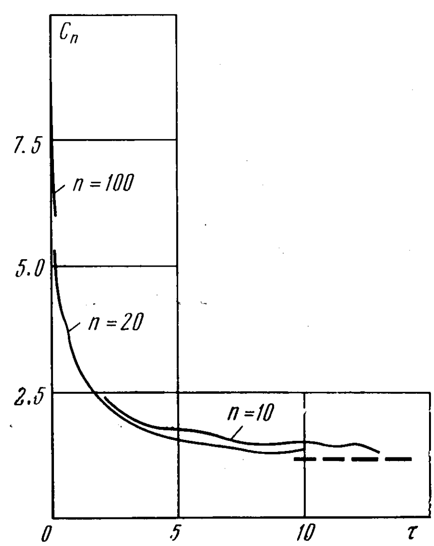


Фиг. 8

чальный момент движения, причем путь, пройденный пластиной, соответствует указанным значениям безразмерного времени $\tau = 0,\ 0.1,\ 0.5,\ 1.0,\ 2.0$. На поверхности пластины стрелками указаны направления относительной скорости жидкости. Дальнейшее развитие процесса образования вихревого следа иллюстрируют фиг. 3—6. На фиг. 2—6 точками показано положение свободных вихрей в соответствующие моменты времени.

Интересно отметить образование петлеобразных форм на вихревой поверхности, начиная примерно с $\tau = 2$, которые свидетельствуют о неустойчивости вихревой пелены и разрушении ее. Они очень похожи на те, которые неоднократно наблюдались в экспериментальных исследованиях за плохообтекаемыми телами [1, 6].

На фиг. 7 показано изменение безразмерной касательной скорости потока $v = W_x / U_0$ в различные моменты времени (сплошными линиями — на задней стороне пластины, штриховыми — на ее передней стороне). Как видно, на передней стороне пластины течение со временем изменяется незначительно, причем всегда поток направлен от центра пластины к кромкам. Иное дело на задней стороне. Под влиянием вихревой пелены с течением времени поток перестраивается: в начальный момент он направлен от кромок к центру пластины, но уже при $\tau > 0.25$ меняет направление на обратное.



Фиг. 9

На фиг. 8 изображено распределение по полухорде безразмерной разности Δp давления на передней (p_+) и задней (p_-) сторонах пластины, отнесенной к скоростному напору набегающего потока.

В начале движения имеют место значительные пики нагрузки вблизи кромок. С течением времени они уменьшаются, а непосредственно на кромках нагрузка обращается в нуль.

На фиг. 9 показано изменение по времени коэффициента нормальной силы пластины

$$C_n = N(^1/_2\rho b U_0^2)^{-1} \qquad (2.2)$$

Здесь N — нормальная сила, приходящаяся на единицу размаха пластины. Для сравнения там же (пунктирная линия) приведены результаты экспериментальных исследований прямоугольной пластины с удлинением $\lambda = 5.8$ при числах $\mathrm{Re} = (2 \div 3) \cdot 10^5$ в аэродинамической трубе малых скоростей при стационарном обтекании [7].

Приведенный пример показывает, что для аккуратного построения картины течения при больших τ на предельных режимах или близких к ним, нужен достаточно точный расчет всего переходного процесса.

Поступило 16 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Wedemeyer E. Ausbildung eines Wirbelpaares an den Kanten einer Platte. Ingr — Arch., 1961, Bd 30, Nr 3.
2. Ham N. D. Aerodynamic Ioading on a two-dimensional airfoil during dynamic Stall. AIAA Journal, 1968, No. 10.
3. Djojodihardjo R. H., Widnall S. E. A numerical method for the calculation of nonlinear unsteady lifting potential flow problems. AIAA Journal, 1969, No. 10.
4. Белоцерковский С. М. Расчет обтекания крыльев произвольной формы в плане в широком диапазоне углов атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
5. Белоцерковский С. М. Метод расчета воздействия порыва на произвольное тонкое крыло. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
6. An introduction to fluud dinamics by G. K. Batchelor. Cambridge Univ. Press., 1967.
7. Горлин С. М., Худяков Г. Е. Влияние начальной турбулентности потока на аэродинамические характеристики плоской пластинки. Ин-т механ. МГУ, Научн. тр., 1970, № 4.

УДК 533.6.011.5

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА БЕЗ ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ

Ю. М. ЛИПНИЦКИЙ, Ю. Я. МИХАЙЛОВ, К. Г. САВИНОВ

(*Москва*)

Задача о стационарном пространственном обтекании сверхзвуковым потоком идеального газа головной части затупленного тела решена методом установления на основе разностной схемы [1, 2] в сочетании с тригонометрической аппроксимацией. Для гладких тел включение тригонометрической аппроксимации в разностную схему позволяет обеспечить достаточную точность без существенного увеличения количества узлов сетки.

1. Пусть u, v, w есть компоненты вектора скорости в сферической системе координат $\{r, \theta, \psi\}$, p, ρ — давление и плотность. Следуя [1, 2], запишем уравнения газовой динамики в виде системы условий совместности

$$A\frac{\partial X}{\partial t} + \Lambda A\frac{\partial X}{\partial \xi} = F, \qquad \xi = \frac{r - r_1(\theta, \psi)}{r_2(t, \theta, \psi) - r_1(\theta, \psi)}$$

$$X = \begin{vmatrix} U \\ \varepsilon \\ V \\ W \\ \delta \end{vmatrix}, \qquad \begin{matrix} A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} \gamma c^{-1} & -1 \\ \gamma c^{-1} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{1.1}$$

$$\varepsilon = \ln p, \qquad \delta = \varepsilon - \gamma \ln \rho$$

Здесь $r = r_1(\theta, \psi)$ и $r = r_2(t, \theta, \psi)$ — уравнения поверхностей тела и ударной волны, E — единичная матрица, γ — отношение удельных теплоемкостей, c — скорость звука, $U = (u\xi_r + v\xi_\theta / r + w\xi_\psi / r \sin\theta)|N|^{-1}$ — проекция вектора скорости на нормаль к координатной поверхности $\xi = \mathrm{const}$ $(N : [\xi_r;\ \xi_\theta / r;\ \xi_\psi / r \sin\theta])$, а V и W — проекции скорости на два линейно-независимых вектора, ортогональных N, Λ — диагональная матрица с элементами вида

$$\lambda(\zeta) = \xi_t + (U + \zeta c)|N| \qquad (\zeta = -1,\ 1,\ 0) \tag{1.2}$$

а именно

$$\Lambda_{11} = \lambda(-1), \quad \Lambda_{22} = \lambda(1), \quad \Lambda_{33} = \Lambda_{44} = \Lambda_{55} = \lambda(0)$$

В состав вектора правых частей F помимо искомых функций и их производных по θ и ψ входят еще $\xi_{t\theta}$ и $\xi_{t\psi}$.