

7. Васенин И. М., Рычков А. Д. Численное решение задачи о смешанном осесимметричном течении газа в некоторых криволинейных областях методом установления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1, стр. 155—159.
8. Иванов М. Я. К расчету течения газа в ударной трубе переменного сечения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3, стр. 162—166.
9. Гринь В. Т., Иванов М. Я., Крайко А. Н. Исследование динамики течения торможения идеального газа с замыкающим скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4, стр. 23—32.
10. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Матем. сб., 1959, т. 47 (89), № 3, стр. 271—306.
11. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отходящей ударной волной. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6, стр. 1020—1050.

УДК 532.5.013.2

### НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

А. В. ОСТРОУМОВ

(Москва)

В работе указан ряд частных решений уравнений движения тяжелой жидкости в приближении мелкой воды. Решения строятся в предположении, что внутренним трением можно пренебречь, и имеют вид полиномов по степеням пространственной координаты. В качестве иллюстрации применения полученных решений рассмотрена задача о разрушении хранилища жидкости, расположенного на сферическом или плоском основании.

Укажем некоторые частные решения системы уравнений, описывающей в гидравлическом приближении неустановившиеся течения жидкости в каналах, обусловленные силой тяжести. Пренебрегая гидравлическим сопротивлением, будем иметь уравнение импульсов в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = g \sin \psi - \frac{g}{2h} \frac{\partial}{\partial s} (h^2 \cos \psi) \quad (1)$$

Здесь  $s$  — координата вдоль канала;  $h(s, t)$  — наибольшая глубина жидкости в сечении  $s$ , отсчитываемая вдоль перпендикуляра к дну;  $u(s, t)$  — осредненная по сечению  $s$  скорость частиц жидкости;  $\psi(s)$  характеризует уклон дна (см. фиг. 1).

Если продольный профиль дна аппроксимируется дугами окружности радиуса  $\delta^{-1}$ , то в соответствии с принятым на фиг. 1 направлением отсчета  $\psi = -\delta s$  и при малых  $\psi$  имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = -\delta g s - g \frac{\partial h}{\partial s} \quad (2)$$

Если дно имеет постоянный уклон  $\psi_0$ , то уравнение (1) дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = g \sin \psi_0 - g \cos \psi_0 \frac{\partial h}{\partial s} \quad (3)$$

Для течений в каналах с прямоугольным поперечным сечением и шириной  $L(s) = L_1 s^\nu$  ( $L_1$  — постоянная), для каналов с поперечным профилем  $z_1 = a|x|^{2\nu} s^\sigma$  ( $\nu > 0$ ,  $a$  — постоянная) и для осесимметричных течений уравнение неразрывности имеет общий вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial s} + Ah \frac{\partial u}{\partial s} + B \frac{uh}{s} = 0 \quad (4)$$

причем  $A = 1$ ,  $B = \nu$  для прямоугольных каналов;  $A = n/(n+1)$ ,  $B = -\sigma/(n+1)$  для параболических каналов;  $A = B = 1$  для осесимметричных течений соответственно. Тогда система уравнений (2), (4) допускает частные решения вида

$$u(s, t) = u_1(t)s + u_0(t), \quad h(s, t) = h_2(t)s^2 + h_1(t)s + h_0(t) \quad (5)$$

(для  $h(s, t)$  допустимы также оба полинома меньшей степени) при  $B = 0$  и вида

$$u(s, t) = u_1(t)s, \quad h(s, t) = h_2(t)s^2 + h_0(t) \quad (6)$$

(можно также считать  $h_2 \equiv 0$ , либо  $h_0 \equiv 0$ ) при произвольном  $B$ .

Система уравнений (3), (4) имеет при  $B = 0$  частные решения вида (5), а также решения

$$u(s, t) = u_0(t), \quad h(s, t) = h_1(t)s + h_0(t) \quad \text{или} \quad h(s, t) = h_0(t).$$

Приведенные решения в ряде случаев выражаются в элементарных функциях и могут быть использованы для проверки различных численных методов. Кроме того, некоторые из них имеют простой физический смысл.

Рассмотрим такую задачу. На сферическом или плоском основании расположено хранилище жидкости, поверхность которого образована вращением кривой  $z = H(1 - s^2/s_0^2)$  вокруг вертикальной оси  $z$ , являющейся также осью симметрии основания (фиг. 2, а). Здесь  $H$  и  $s_0$  — константы, которые задают размеры хранилища. В некоторый момент времени у хранилища мгновенно удаляются стенки. Требуется оценить возникающее после этого движение жидкости.

Исходными уравнениями для задачи будут (2) и (4) при  $A = B = 1$ . Решение естественно искать в виде

$$u(s, t) = u_1(t)s, \quad h(s, t) = -h_2(t)s^2 + h_0(t) \quad (h_2 > 0, \quad h_0 > 0) \quad (7)$$

Искомые функции описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_1' = -u_1^2 - \delta g - 2gh_2, \quad h_2' = -4u_1h_2, \quad h_0' = -2u_1h_0 \quad (8)$$

с начальными условиями при  $t = 0$

$$u_1(0) = 0, \quad h_2(0) = H/s_0^2, \quad h_0(0) = H \quad (9)$$

Последние два уравнения (8) с учетом (9) дают

$$h_0 = s_0\sqrt{Hh_2} \quad (10)$$

Соотношения (7) и (10) позволяют найти закон распространения фронта жидкости в виде

$$s_f = (s_0^2 H / h_2)^{1/4}$$

Исключая  $u_1$  из первого и второго уравнений системы (8), получим уравнение для  $h_2$  со следующими начальными данными:

$$\begin{aligned} h_2'' - \frac{5}{4}h_2^{-1}h_2' &= \\ &= 4\delta gh_2 - 8gh_2^2 \\ h_2(0) &= H/s_0^2, \\ h_2'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что

$$h_2' = \pm h_2 \times$$

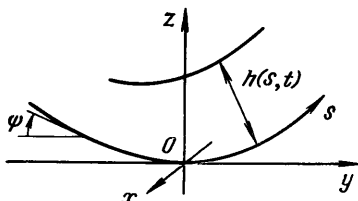
$$\begin{aligned} &\times \sqrt{2(C h_2^{1/2} - 16gh_2 - 8g\delta)}, \\ C &= 16g\sqrt{H}/s_0 + 8g\delta s_0 / \sqrt{H} \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) во второе уравнение (8), получаем

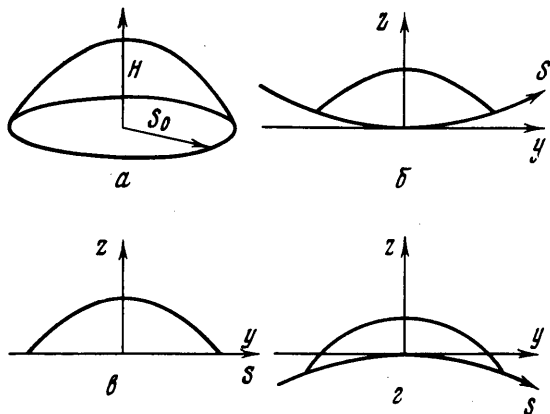
$$u_1 = \mp \sqrt{\frac{1}{8}C h_2^{1/2} - 2gh_2 - g\delta} \quad (13)$$

Нужный знак в формулах (12), (13) легко выбрать, согласуя его с направлением начального движения жидкости, которое в каждом конкретном случае очевидно.

Дальнейшее интегрирование (12) зависит от структуры подкоренного выражения. Рассмотрим представляющиеся здесь возможности.



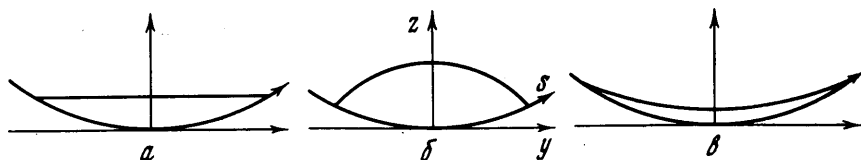
Фиг. 1



Фиг. 2

1.  $\delta > 0$  (фиг. 2, б). В этом случае на характер движения существенно влияют начальные данные.

а)  $h_2(0) = \delta/2$ . Тогда (12) формально дает расходящийся интеграл для  $t$ . Физический смысл полученного результата легко понять, если учесть, что в данном слу-



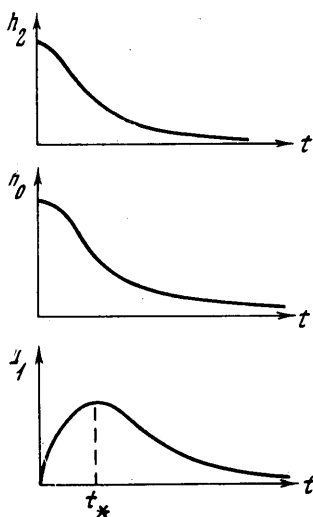
Фиг. 3

чае правая часть уравнения импульсов при  $t = 0$  тождественно равна нулю, и так как начальные скорости тоже нулевые, то имеем равновесную конфигурацию, которая сохраняется сколь угодно долго. Геометрически это соответствует ситуации, когда в рамках принятых приближений поверхность хранилища вырождается в горизонтальную плоскость, после удаления которой никакого движения, естественно, не возникнет (фиг. 3, а).

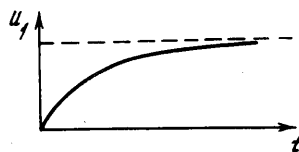
б)  $h_2(0) \neq \delta/2$ . Тогда с учетом (11) получаем

$$h_2(t) = 256g^2\delta^2s_0^2H[16gH + 8g\delta s_0^2 \mp (16gH - 8g\delta s_0^2) \times \sin(2\sqrt{g\delta}t \pm \pi/2)]^{-2} \quad (14)$$

где верхний знак следует брать при  $h_2(0) > \delta/2$  (фиг. 3б), нижний — при  $h_2(0) < \delta/2$  (фиг. 3, в). Формулы (10), (12) — (14) позволяют также найти явно  $u_1(t)$  и  $h_0(t)$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Как и следовало ожидать, возникает колебательное движение жидкости. Выбор верхнего или нижнего знака в (14) не меняет качественно картины движения, поэтому исследуем лишь случай  $h_2(0) > \delta/2$ .

Основные характеристики течения таковы:

$$T = \pi(g\delta)^{-1/2}, \quad \min_t(h_2) = 1/4\delta^2s_0^2H^{-1}, \quad \min_t(h_0) = 1/2\delta s_0^2$$

$$\max_t(u_1) = \left( \frac{(2gH + g\delta s_0^2)}{2Hs_0^2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\delta^2s_0^4 + 4H^2}} - \frac{g(\delta^2s_0^4 + 4H^2)}{4Hs_0^2} - g\delta \right)^{1/2}, \quad s_b = \sqrt{\frac{2H}{\delta}}$$

где  $T$  — период колебания,  $s_b$  — максимальный выброс жидкости по  $s$ .

2.  $\delta = 0$  (фиг. 2, в). В этом случае, принимая во внимание (11), имеем

$$h_2(t) = Hs_0^2(s_0^2 + 2gHt^2)^{-2}$$

Так как скорость всегда положительна, то в (13) следует взять нижний знак. В момент времени  $t_* = s_0(2gH)^{-1/2}$  имеем

$$u_1(t_*) = \max(u_1) = s_0^{-1}\sqrt{1/2gH}, \quad h_0(t_*) = 1/2H, \quad h_2(t_*) = 1/4Hs_0^{-2}$$

График решения указан на фиг. 4.

3.  $\delta < 0$  (фиг. 2,  $\varepsilon$ ). Положим  $\delta = -\delta_1$ , где  $\delta_1 > 0$ . Тогда, учитывая (11), получаем

$$h_2(t) = 256g^2\delta_1^2s_0^2 [8g\delta_1s_0^2 - 16gH + (8g\delta_1s_0^2 + 16gH) \operatorname{ch} (2\sqrt{g\delta_1}t)]^{-2}H$$

Поведение  $h_2(t)$  и  $h_0(t)$  качественно такое же, как и в предыдущем случае, однако  $u_1(t)$  уже является монотонно возрастающей функцией (см. фиг. 5).

Автор благодарен М. Э. Эглит за ценные замечания.

УДК 532.517.4

## ПЕРЕХОДНЫЙ РЕЖИМ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛЕДЕ ЗА ТОНКОЙ ПЛАСТИНОЙ И ЦИЛИНДРОМ

А. Н. СЕКУНДОВ, О. В. ЯКОВЛЕВСКИЙ

(Москва)

Переход от ламинарного режима течения к турбулентному в дозвуковом плоском следе за тонкими пластинами экспериментально и теоретически исследовался в ряде работ [1-3]. В данной работе проведено экспериментальное исследование течения в следе за тонкими пластинами и цилиндром при небольших значениях числа Рейнольдса, получены распределения продольных пульсаций скорости вдоль следа при различных условиях обтекания пластин, определены критические числа Рейнольдса и характерные частоты пульсаций при переходе. Показано существенное различие характеристик перехода в следе за пластиной и цилиндром. Опытные данные обобщены на основе известных результатов линейной теории невязкой неустойчивости [4].

1. Эксперименты производились в рабочей части аэродинамической трубы с поперечным сечением  $100 \times 100$  мм<sup>2</sup>. Интенсивность турбулентности в невозмущенном потоке не превышала 0.2-0.3%. Основные измерения осуществлялись с помощью термоанемометрических датчиков с постоянной температурой нити (термоанемометр УТА-5 конструкции И. С. Егоренкова). Экспериментальная аппаратура более подробно описана в работе [5].

Исследовалось течение в следе за пластинами толщиной 1-3 мм и длиной  $l = 20, 40, 60, 120$  и 270 мм. Передняя кромка каждой пластины имела обтекаемую форму, а задняя кромка была заостренной. Кроме того, было исследовано течение в следе за круглым цилиндром диаметром  $d = 1.6$  мм. Переход к турбулентному режиму течения фиксировался по показаниям датчика термоанемометра, который устанавливался в такой точке следа, где интенсивность пульсаций скорости была максимальной.

Таблица 1

Обтекаемое тело	Характерный размер, мм	$R_1$ *	$R_2$ *	$R_1$	$R_2$
Пластина	20	2400	2700	65	70
	40	2400	4300	65	87
	60	3500	5300	79	97
	120	6000	7800	102	118
	270	10000	14000	132	157
Цилиндр	1.6	37	45	31	36

При обработке опытных данных для удобства сравнения свойств следа за пластиной и цилиндром в качестве характерного линейного размера была выбрана толщина потери импульса  $\delta$ , которая определялась по профилю продольной скорости  $u(y)$  в изобарическом участке следа

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} u(U-u)dy/U^2 \quad (1.1)$$