

УДК 538.4 : 532.54

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ ПОРШНЯ

В. А. МАРЕЕВ

(Москва)

Магнитогазодинамические течения по каналам различных устройств в присутствии неоднородных магнитных полей изучались в ряде работ. Так, например, в линейной постановке было исследовано движение ударной волны в зоне входа и выхода из магнитного поля [1], рассмотрены неавтономные течения излучающего газа в магнитном поле, вызванные движением поршня<sup>1</sup> [2]. Полученные результаты были использованы для решения задачи о движении с большой сверхзвуковой скоростью тонких заостренных тел в осевом магнитном поле [2]. Ряд задач о движении проводящего газа через магнитное поле в ударной трубе, на стенках рабочего канала которой установлены электроды, изучался в [3].

Одной из важных особенностей движения высокотемпературной плазмы ( $T > 15\,000^\circ\text{K}$ ) в каналах электроразрядных установок и ударных трубах является излучение газа, без учета которого нельзя построить сколько-нибудь полную картину течения. В некоторых случаях можно считать, что плазма излучает как оптически прозрачное тело [4]. Тогда система уравнений значительно упрощается и появляется возможность получать решения и исследовать их особенности с помощью численных методов.

Данная работа является продолжением исследований, выполненных в работах [1, 2]. В основной части сформулированы нестационарные магнитогазодинамические задачи при  $R_m \ll 1$  с учетом радиационных эффектов и найден класс автономных течений, соответствующих движению поршня по степенному закону. Далее представлены численные решения двух автономных задач и найдены условия, при которых происходит ускорение или замедление ударного фронта. Приведенные результаты подтверждают выводы, полученные ранее с помощью линейной теории [2].

1. Рассмотрим нестационарное одномерное течение совершенного газа с постоянными теплоемкостями, вызванное движением плоского ( $\nu = 1$ ) или цилиндрического ( $\nu = 2$ ) поршня, который в момент времени  $t = 0$  начинает вытеснять газ из пространства  $x > 0$  (при  $\nu = 1$ ) или расширяться в радиальном направлении от оси симметрии в случае цилиндрической геометрии (при  $\nu = 2$ ). Плоское течение будем так же трактовать, как движение газа в канале с проводящими стенками.

Предположим, что скорость поршня  $\dot{x}_p(t)$  значительно превышает скорость звука покоящегося газа, так что в области между поршнем и ударной волной  $x_p < x < x_v$  газ имеет достаточно высокую температуру, становится электропроводным и может излучать энергию.

Пусть движение газа происходит во внешних магнитном и электрическом полях следующей структуры:

$$\mathbf{B} = (0, 0, B(x)), \quad \mathbf{E} = (0, E(x), 0) \quad (1.1)$$

Здесь при  $\nu = 1$  используются декартовы координаты  $x, y, z$ , а при  $\nu = 2$  — цилиндрические  $x, \theta, z$ .

Такая геометрия электрического и магнитного полей обеспечивает в случае изотропной проводимости одномерное плоское или с цилиндрической симметрией течение газа.

<sup>1</sup> Работы, посвященные исследованию этого круга вопросов, указаны в статьях [1, 2].

В дальнейшем будем предполагать, что магнитные числа Рейнольдса  $R_m$  достаточно малы, так что индуцированным магнитным и вихревым электрическим полями можно пренебречь по сравнению с приложенными внешними полями.

Таким образом, закон Ома, плотность объемной электромагнитной силы  $\mathbf{j}$  и джоулева диссипация  $Q$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}c^{-1}), & Q &= \sigma(E - uBc^{-1})^2 \\ \mathbf{f} &= (f_x, 0, 0), & f_x &= \sigma Bc^{-1}(E - uBc^{-1}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где величины  $B$  и  $E$  заданы.

Предположим, что в области  $x_p < x < x_v$  газ излучает, как оптически прозрачное тело, и ограничен оптически прозрачными поверхностями. В этом случае потери энергии  $Q_R$  единицей объема газа за единицу времени вследствие излучения выражаются следующей формулой:

$$Q_R = -4\Sigma T^4 l_1^{-1} \quad (1.3)$$

где  $\Sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана,  $l_1$  — длина свободного пробега излучения, выраженная по Планку [4].

Принимая во внимание все сделанные предположения, систему уравнений, которая описывает течение газа в области  $x_p < x < x_v$  между поршнем, движущимся со скоростью  $\dot{x}_p(t)$  и ударной волной, распространяющейся по покоящемуся газу со скоростью  $\dot{D} = \dot{x}_v(t)$ , можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + (\gamma - 1) \frac{\rho u}{x} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sigma B}{c\rho} \left( E - \frac{uB}{c} \right) \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} = \gamma \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - (\gamma - 1) \frac{4\Sigma T^4}{l_1} + (\gamma - 1) \sigma \left( E - \frac{uB}{c} \right)^2 \quad (1.6)$$

$$p = R\rho T \quad (1.7)$$

$$p = p_\infty + \rho_\infty Du$$

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left( 1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{a_\infty^2}{D^2} \right)^{-1} \quad (x = x_v)$$

$$D = \frac{\gamma + 1}{4} u + \sqrt{\frac{(\gamma + 1)^2}{16} u^2 + a_\infty^2} \quad \left( a_\infty^2 = \gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \right) \quad (1.8)$$

$$u = \dot{x}_p \quad (x = x_p) \quad (1.9)$$

Здесь все обозначения общепринятые, а индексом  $\infty$  обозначаются параметры покоящегося газа.

Система уравнений (1.4) — (1.9) дает возможность определить функции  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ , а также скорость ударной волны  $D = \dot{x}_v(t)$  по заданной скорости поршня  $\dot{x}_p(t)$ . Если, наоборот, задать скорость ударной волны, тогда из решения задачи может быть найдена скорость поршня.

2. Рассмотрим течения, для которых имеют место соотношения

$$B = B_* x^m, \quad E = E_* x^l, \quad \sigma = \sigma_* p^s \rho^k, \quad l_1 = l_* p^r \rho^q, \quad x_v = V t^{n+1} \quad (2.1)$$

Здесь величины со звездочками и  $V$  размерные.

Нетрудно убедиться, что в систему (1.4) — (1.9), (2.1) входят следующие размерные параметры:  $A, B, C, \rho_\infty, p_\infty, V$

$$A = 4\Sigma(l_1 R^*)^{-1}, \quad B = \sigma_* B_*^2 c^{-2}, \quad C = E_* c B_*^{-1} \quad (2.2)$$

С помощью теории размерностей и подобия [5] можно установить, что условия автомодельности для рассматриваемого класса течений имеют вид

$$n = 0, \quad 2n(r - 3) - 1 = 0 \quad (2.3)$$

$$2n(s + m) + 2m + 1 = 0, \quad (n + 1)(m - l) + n = 0 \quad (2.4)$$

Из этих соотношений определяются показатели степени в (2.1). Первое условие (2.3) соответствует тому, что в систему определяющих параметров входит  $P_\infty$ , однако при этом первое условие (2.4), связанное с присутствием «радиационного» параметра  $A$ , не выполняется, что делает невозможным существование автомодельных течений излучающего газа при наличии противодействия. Заметим, что на практике высокие температуры, при которых необходимо учитывать излучение газа, реализуются за сильной ударной волной, т. е. когда противодействие не существенно и первое условие (2.3) не имеет места. Автомодельные течения, отвечающие остальным соотношениям (2.3), (2.4), могут осуществляться в достаточно широком диапазоне изменения параметров.

Введем следующие безразмерные давление, плотность, скорость газа и координату:

$$p = \rho_\infty V^{2t^{2n}} P(\xi), \quad \rho = \rho_\infty (\gamma + 1) (\gamma - 1)^{-1} R(\xi) \\ U = V t^n U(\xi), \quad \xi = x (V t^{n+1})^{-1} \quad (2.5)$$

В случае автомодельных течений уравнения и граничные условия (1.4) — (1.9) перейдут в следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $P(\xi), R(\xi)$  и  $U(\xi)$ :

$$R'[U - (n + 1)\xi] + RU' + (\gamma - 1)UR\xi^{-1} = 0 \\ U'[U - (n + 1)\xi] + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{P'}{R} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} N \times \\ \times (K\xi^l - U\xi^m)\xi^m P^s R^{h-1} + nU = 0 \quad (2.6)$$

$$(P' + \gamma PR'/R)[U - (n + 1)\xi] + (\gamma - 1)N_R P^{4-r} R^{-(4+q)} - \\ - (\gamma - 1)N(K\xi^l - U\xi^m)^2 P^s R^h + 2nP = 0$$

$$R(1) = 1, \quad U(1) = 2(n + 1)/(\gamma + 1), \quad P(1) = 2(n + 1)^2/(\gamma + 1) \quad (2.7)$$

$$U(\xi_p) = \xi_p(n + 1) \quad (2.8)$$

$$\left( N = \frac{\sigma_* B_*^2 V^{2(s+m)}}{c^2 \rho_\infty^{1-h-s}} \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^h, \quad K = \frac{c E_*}{B_*} \right.$$

$$\left. N_R = \frac{4\Sigma}{l_1^* R^4 V^{2r-6}}, \quad \xi_p = \frac{x_p}{V t^{n+1}} \right)$$

Здесь  $N$  — параметр МГД взаимодействия,  $N_R$  — параметр, характеризующий интенсивность высвечивания энергии,  $K$  — параметр нагрузки и  $\xi_p$  — безразмерная координата поршня.

Соотношения (2.7) представляют собой условия на ударной волне, а из соотношения (2.8) (условие непротекания) находится скорость поршня.

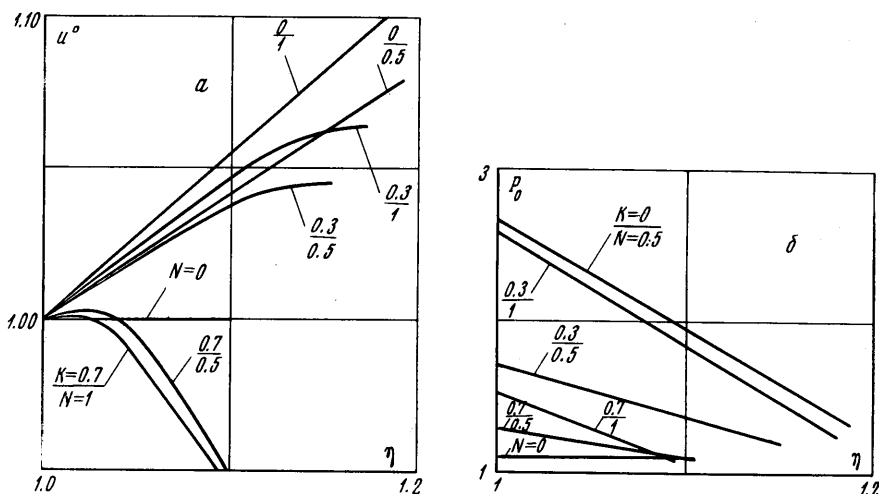
Данная система была численно проинтегрирована в двух частных случаях. В расчетах принималось  $\gamma = 1.2$ . Результаты расчетов приведены ниже.

3. Пусть плоское течение газа ( $\nu = 1$ ) характеризуется следующим распределением «управляющих» функций:

$$x_v = Vt, \quad E = E_* x^{-1/2}, \quad B = B_* x^{-1/2}, \quad \sigma = \text{const}, \quad N_R = 0 \quad (3.1)$$

Нетрудно проверить, что при условиях (3.1) движение автомодельно.

Если  $N = 0$ , то распределения параметров в области  $2 / (\gamma + 1) = \zeta_p < \zeta < 1$  между ударной волной и поршнем являются однородными.



Фиг. 1

Если  $N \neq 0$ , то решение зависит от двух параметров:  $N$  и  $K$ . Прежде чем перейти к анализу изменения параметров  $U$ ,  $P$  и  $R$  в сжатом слое газа, представим результаты расчетов в более наглядном виде. Введем в рассмотрение следующие безразмерные функции, представляющие собой скорость, плотность и давление газа, когда за характерную скорость принята скорость поршня  $\dot{x}_p(t)$ .

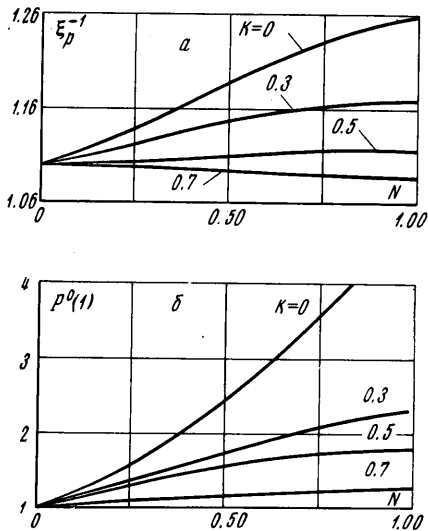
$$u^\circ = [(n+1)\zeta_p]^{-1} U(\eta), \quad \rho^\circ = R(\eta), \quad p^\circ = [(n+1)\zeta_p]^{-2} P(\eta) \quad (3.2)$$

$$\eta = \zeta / \zeta_p = (1 / (n+1)\zeta_p) \dot{x}_p(t) = \dot{x}_v(t) / \dot{x}_p(t)$$

Результаты расчетов приведены на фиг. 1, 2. Первые две фигуры (1, а, б) иллюстрируют изменение скорости  $u^\circ$  и давления  $p^\circ$  в сжатом слое газа. На фиг. 2, а и б показаны соответственно зависимости скорости ударной волны и давления на поршне  $p^\circ(1)$  от параметров  $N$  и  $K$ .

Приведенные графики показывают, что при  $K = 0$  (короткое замыкание) и  $K = 0.3$  наличие магнитного поля приводит к увеличению скорости газа и скорости ударной волны. При этом скорость в сжатом слое газа возрастает от поршня к ударной волне. Эта зависимость имеет линейный характер при  $K = 0$  и вблизи поршня при  $K = 0.3$  (прямая, соответствующая  $K = 0, N = 1$ , приведена не полностью).

Когда же  $K = 0.7$ , то магнитогидродинамическое воздействие сопровождается уменьшением скорости газа  $u^\circ$  и скорости ударной волны (ударная волна пружинается к поршню). Скорость в этом случае убывает от поршня к ударной волне.

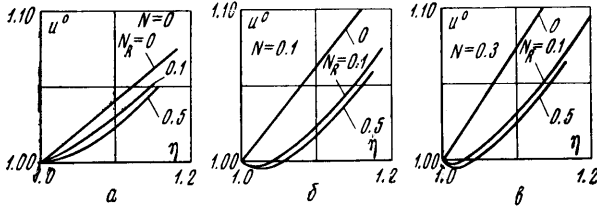


Фиг. 2

Давление в сжатом слое газа линейно возрастает по направлению к поршню при всех значениях  $K$  (прямая, соответствующая  $K = 0, N = 1$ , на графике не приведена).

Отметим также, что все указанные эффекты проявляются тем сильнее, чем больше параметр МГД взаимодействия  $N$ .

Объяснение полученных результатов состоит в следующем. Работа газа, затрачиваемая на преодоление сопротивления магнитного поля в генераторном режиме, пере-

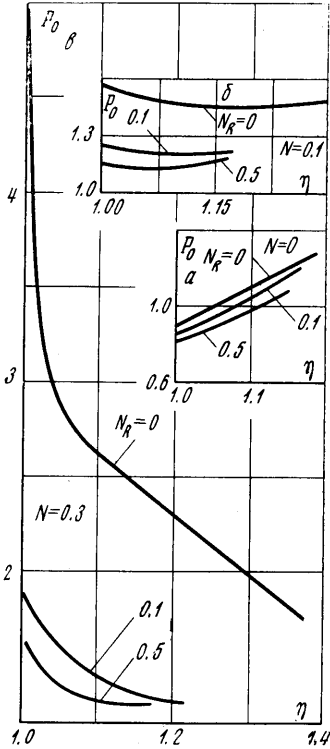


Фиг. 3

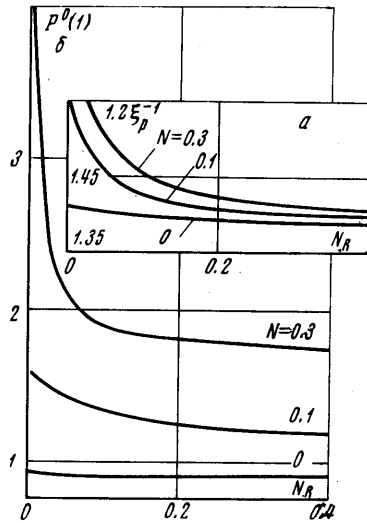
ходит в джоулеву теплоту, выделяемую в газе, и электроэнергию, отводимую во внешний контур.

При малых  $K$  преобладает эффект джоулева тепловыделения, вызывающий увеличение скорости газа и скорости ударной волны по сравнению с обычным газодинамическим течением. При  $K = 0.7$ , наоборот, преобладает выделение энергии во внешнюю цепь, и поэтому наблюдается уменьшение скорости газа и ударной волны.

Интенсивность токов, протекающих по плазме (и соответственно тормозящая сила), с увеличением  $K$  монотонно падает и тем сильнее, чем больше  $N$ . Поэтому наибольшее давление на поршне имеет место при  $K = 0$ .



Фиг. 4



Фиг. 5

Указанные выше особенности изменения параметров в области  $1 < \eta < \eta_0$  хорошо согласуются с результатами исследования задачи в линейной постановке [2].

4. Исследуем плоское ( $\nu = 1$ ) течение излучающего газа в магнитном поле. Пусть управляющие функции имеют следующий вид:

$$x_v = Vt^{5/6}, \quad B = B_* x^{-3/6}, \quad \sigma = \text{const}, \quad l_1 = \text{const}, \quad K = 0 \quad (4.1)$$

Легко видеть, что соотношения (4.1) являются частным случаем общих, сформулированных в п. 2 условий автомодельности.

Исследуемое течение зависит от двух параметров  $N$  и  $N_R$ .

На фиг. 3, 4, 5 представлены безразмерные скорость (фиг. 3, а, б, в), давление (фиг. 4, а, б, в), введенные формулами (3.2), а также безразмерное давление на поршне  $p^\circ$  (1) (фиг. 5, б) и  $\dot{x}_n / \dot{x}_p = 1,2\zeta_p^{-1}$  (5, а) в зависимости от параметров  $N$  и  $N_R$ . При этом прямые, соответствующие  $N_R = 0$ ,  $N = 0.1$  и  $N = 0.3$  на фиг. 4, приведены не полностью.

Как следует из приведенных графиков, по мере увеличения  $N_R$  при  $N = 0$  (одно излучение) наблюдается уменьшение скорости газа  $u^\circ$  и скорости ударной волны по сравнению с обычным газодинамическим течением. Давление газа  $p^\circ$  и давление на поршне  $p^\circ$  (1) также уменьшаются. В этом случае и скорость и давление возрастают по направлению к ударной волне от поршня.

Сравнивая магнитогазодинамическое воздействие на поток при  $K = 0$  в отсутствие излучения (п.з) с воздействием излучения, легко установить, что они приводят к совершенно противоположным эффектам: при наличии магнитного поля увеличиваются скорость и давление, а при учете излучения — уменьшаются. Аналогичным образом магнитное поле и излучение влияют на давление на поршне и скорость ударной волны.

Таким образом, совместное воздействие магнитного поля и излучения характеризуется установлением неких промежуточных режимов течения, при которых значения газодинамических параметров и их распределения в сжатом слое газа зависят от соотношения между величинами  $N$  и  $N_R$ .

Объяснение полученных результатов состоит в следующем. Излучение нагретого газа приводит к высвечиванию энергии из объема между поршнем и ударной волной, что сопровождается уменьшением скоростей газа и ударной волны, а также уменьшением давления газа и давления на поршне. С другой стороны, магнитогазодинамическое воздействие при  $K = 0$  характеризуется выделением в сжатом слое газа джоулева тепла и вызывает обратное изменение параметров.

В заключение автор благодарит А. Б. Ватажина за постоянное внимание к данной работе и ценные замечания при ее выполнении.

Поступило 7 VI 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В а т а ж и н А. Б. Распространение ударной волны в канале при взаимодействии сжатого в ней газа с неоднородным магнитным полем. ПММ, 1970, т. 34.
2. В а т а ж и н А. Б. Нестационарное течение газа в канале, вызванное движением поршня, при магнитогазодинамическом отводе энергии и высвечивании газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
3. З а й ц е в С. Г., Ф а в о р с к а я И. К. Расчет распространения ударной волны в магнитогазодинамическом канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 5.
4. З е л ь д о в и ч Я. Б., Р а й з е р Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
5. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 6. М., «Наука», 1967.