УДК 534.26

ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН НА ЦИЛИНДРЕ В ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ

П. И. ЦОЙ

(*Тула*)

Рассматривается задача о дифракции цилиндрических и плоских стационарных звуковых волн на цилиндре в вязкой и теплопроводной среде. Решение этой задачи без учета теплопроводности дано в работе [1].

1. Постановка задачи. Из гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости известно, что полная система уравнений для малых возмущений имеет вид [2–5]

$$\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\operatorname{grad} p-\mu\Delta\mathbf{v}-\left(\mu'+\frac{\mu}{3}\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}=0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial s}{\partial t}+\varkappa_0\Delta T \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\rho_0c_0^2\left(\frac{\partial s}{\partial t}+\alpha\frac{\partial T}{\partial t}\right),\qquad c_0^2=\frac{p_0}{\rho_0},\qquad \gamma-1=\alpha\beta$$

Здесь μ' и μ — коэффициент вязкости, T — температура, $\varkappa_0$ — коэффициент температуропроводности, γ — отношение удельных теплоемкостей, c_0 — ньютоновское значение скорости звука, p_0 и ρ_0 — давление и плотность среды в невозмущенном состоянии, s — сжатие, $\mathbf{v}$, p, ρ — скорость, давление и плотность частицы среды, а β — коэффициент пропорциональности.

Предполагая

$$\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{rot}\mathbf{\Phi} \tag{1.2}$$

где первый член определяет потенциальное поле скоростей, а второй — поле вихрей, можно привести систему (1.1) к виду

$$\varkappa_0\Delta\Delta\varphi+\frac{\varkappa_0\nu^*}{c_0^2}\Delta\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\nu^*}{c_0^2}\Delta\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\gamma\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}=0$$

$$\partial\mathbf{\Phi}/\partial t-\nu\Delta\mathbf{\Phi}=0,\qquad \nu^*=\nu'+{}^4/_3\nu \tag{1.3}$$

где ν' и ν — кинематические коэффициенты вязкости среды.

Для установившегося режима движения (с временным множителем $e^{-i\sigma t}$) система (1.3) приводится к системе уравнений Гельмгольца

$$\Delta\varphi_1+k_{11}^2\varphi_1=0,\quad \Delta\varphi_2+k_{12}^2\varphi_2=0,\quad \Delta\mathbf{\Phi}+k_2^2\mathbf{\Phi}=0 \tag{1.4}$$

где k_{11}^2 и k_{12}^2 — корни уравнения

$$A-Bk_1^2-Ck_1^4=0 \tag{1.5}$$

$$A=\frac{\sigma^2}{c^2}\gamma,\quad B=\gamma\left[1-\frac{\sigma i}{c^2}(\nu^*+\varkappa_0)\right],\quad C=\varkappa_0\left[\frac{\gamma\nu^*}{c^2}+\frac{i}{\sigma}\right] \tag{1.6}$$

$$k_2^2=i\sigma\nu^{-1},\qquad k_2=k_2'+ik_2'',\quad k_2'=k_2''=(\sigma/2\nu)^{1/2} \tag{1.7}$$

Здесь σ — частота колебаний, а c — скорость звука в невязкой и нетеплопроводной среде. При выводе (1.4) предполагали, что

$$\varphi = C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 \tag{1.8}$$

где C_1' и C_2' — постоянные.

Если решение (1.4) известно, то скорость определяется по формуле (1.2), потенциал скоростей φ — по формуле (1.8), а остальные величины — по формулам

$$s = -i\sigma^{-1}\Delta\varphi, \qquad p = p_0 + i\rho_0\sigma\varphi + \rho_0\nu^*\Delta\varphi \tag{1.9}$$

$$T = T_0 + \frac{1}{\alpha}\left(\gamma\frac{p-p_0}{\rho_0 c^2} + \frac{i}{\sigma}\Delta\varphi\right)$$

Здесь T_0 — невозмущенная температура среды. Выясним граничные условия для φ и $\mathbf{\Phi}$. Пусть ось цилиндрических волн O_1 находится на расстоянии b от оси цилиндра O_2. На поверхности жесткого цилиндра проекции скорости $\mathbf{v}$ должны удовлетворять следующим граничным условиям, записанным в цилиндрических координатах:

$$v_r = 0, \qquad v_\theta = 0, \qquad v_z = 0 \tag{1.10}$$

В силу аксиальной симметрии

$$\mathbf{\Phi} = \Phi(r, \theta)\mathbf{i}_3, \qquad \varphi = \varphi(r, \theta) \tag{1.11}$$

Тогда для Φ из (1.4) имеем уравнение

$$\Delta\Phi + k_2^2\Phi = 0 \tag{1.12}$$

В силу (1.11) граничные условия (1.10) примут вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_{r=a} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \tag{1.13}$$

Для температуры на поверхности цилиндра можно задать граничное условие вида

$$T = T(\theta') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n e^{in\theta'}, \qquad \theta' = \pi - \theta \tag{1.14}$$

где T_n определяется по формуле

$$T_n = \frac{a_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(\theta')\cos n\theta' d\theta', \qquad a_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n > 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

В частности, можно задать условия $T = T_0 = \text{const}$, $T_n = 0$ $(n \neq 0)$ или $T = 0$, $T_n = 0$.

2. Решение системы уравнений (1.4) и (1.12). Учитывая (1.9), представим граничное условие (1.14) в виде

$$\left[\frac{\gamma\sigma i}{c^2}\varphi + \left\{\frac{\gamma\nu^*}{c^2} + \frac{i}{\sigma}\right\}\Delta\varphi\right]_{r=a} = \alpha\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n e^{in\theta'} \tag{2.1}$$

Предположим, что центр O_1 будет центром расходящихся цилиндрических звуковых волн единичной амплитуды и ищем решение уравнений

(1.4) и (1.12) и величину φ в виде (2.2)

$$\varphi = C_1'\varphi_1 + C_2'\varphi_2 = H_n(k_{11}R) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H_n(k_{11}r) e^{in\theta'} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n H_n(k_{12}r) e^{in\theta''}$$

$$\Phi = H_0(k_2R) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n H_n(k_2r) e^{in\theta'} \qquad (2.3)$$

Здесь $E_2 = E_2'C_2'$, $C_1' = 1$ (для расходящихся волн единичной амплитуды), $H_n(u)$ — функция Ханкеля первого рода, D_n, E_n, Q_n — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями (1.13) и (1.14), а R — расстояние точки наблюдения от центра цилиндрических волн, причем первые члены в правых частях (2.2) и (2.3) представляют собой расходящиеся звуковые волны от центра источника O_1, а остальные члены — рассеянные волны.

Отметим, что величины (2.2) и (2.3) удовлетворяют условию отсутствия отражения на бесконечности, так как $H_n(u)$ и $H_n'(u)$ стремятся к нулю при $|u| \to 0$.

Используя (2.2) и (2.3) и некоторые известные соотношения теории цилиндрических функций, после преобразований получаем для коэффициентов D_n, E_n и Q_n следующие выражения:

$$D_n = \frac{\Delta_{nD}}{\Delta_n}, \qquad E_n = \frac{\Delta_{nE}}{\Delta_n}, \qquad Q_n = \frac{\Delta_{nQ}}{\Delta_n} \qquad (2.4)$$

Здесь

$$\Delta_n = H_{n-1}(k_{11}a) + \Lambda_{2n} H_{n+1}(k_{11}a) - \frac{k_{12}\delta_{11}}{k_{11}\delta_{12}} H_n(k_{11}a)\,(\Omega_{n-1} + \Lambda_{2n}\Omega_{n+1})$$

$$\Delta_{nD} = -H_n(k_{11}b)\,\{J_{n-1}(k_{11}a) + \Lambda_{2n}J_{n+1}(k_{11}a)\} + \qquad (2.5)$$

$$+\frac{4n}{\pi a^2 k_{11}k_2}\frac{H_n(k_2b)}{H_{n+1}(k_2a)} - \frac{k_{12}}{k_{11}\delta_{12}}\{\alpha T_n - \delta_{11}H_n(k_{11}b)J_n(k_{11}a)\}\,(\Omega_{n-1} + \Lambda_{2n}\Omega_{n+1})$$

$$\Delta_{nE} = \left[\frac{2i\delta_{11}(1-\Lambda_{2n})}{\pi a k_{11}} H_n(k_{11}b) - \frac{4n\delta_{11}}{\pi a^2 k_{11}k_2}\frac{H_n(k_2b)}{H_{n+1}(k_2a)} H_n(k_{11}a) + \right.$$

$$\left. + \alpha T_n\{H_{n-1}(k_{11}a) + \Lambda_{2n}H_{n+1}(k_{11}a)\}\right][\delta_{12}H_n(k_2a)]^{-1}$$

$$\Delta_{nQ} = -J_{n+1}(k_2a)\,\{H_{n-1}(k_{11}a) + \Lambda_{1n}H_{n+1}(k_{11}a)\}\frac{H_n(k_2b)}{H_{n+1}(k_2a)} -$$

$$-\frac{4n(\delta_{12}-\delta_{11})}{\pi a^2 k_{11}k_2\delta_{12}}\frac{H_n(k_{11}b)}{H_{n+1}(k_2a)} + \frac{k_{12}\delta_{11}}{k_{11}\delta_{12}}\frac{H_n(k_2b)}{H_{n+1}(k_2a)} J_{n+1}(k_2a)H_n(k_{11}a) \times$$

$$\times (\Omega_{n-1} + \Lambda_{1n}\Omega_{n+1}) + \frac{ik_{12}}{k_2\delta_{12}}\frac{\alpha T_n}{H_{n+1}(k_2a)}\{H_{n-1}(k_{11}a)\,\Omega_{n+1} - H_{n+1}(k_{11}a)\,\Omega_{n-1}\}$$

$$\Lambda_{2n} = \frac{H_{n-1}(k_2a)}{H_{n+1}(k_2a)}, \qquad \Lambda_{1n} = \frac{J_{n-1}(k_2a)}{J_{n+1}(k_2a)}$$

$$\Omega_{n-1} = \frac{H_n(k_{12}a)}{H_n(k_{12}a)}, \qquad \Omega_{n+1} = \frac{H_{n+1}(k_{12}a)}{H_n(k_{12}a)}$$

$$\delta_{1j} = \frac{\gamma\sigma i}{c^2} - \frac{\gamma\nu^*}{c^2}k_{1j}^2 - \frac{i}{\sigma}k_{1j}^2 \qquad (j = 1, 2)$$

При $\varkappa_0 = 0$ для коэффициентов D_n, E_n и Q_n из (2.4), (2.5), получаются формулы, совпадающие с результатами работы [1]. Скорость v, сжатие s, давление p и температура T определяются по формулам (1.2) и (1.9). В частности, имеем

$$p = p_0 + \rho_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(\sigma i - \nu^* k_{11}^2)\{H_n(k_{11}b)J_n(k_{11}a) + D_n H_n(k_{11}a)\} + (\sigma i - \nu^* k_{12}^2) E_n H_n(k_{12}a)] e^{i(n\theta' - \sigma t)} \tag{2.6}$$

Результирующая сила на единицу длины цилиндра, действующая вдоль отрицательной оси O_2x и обусловленная нормальным напряжением p_{rr}, определяется из выражения

$$F = -a \int_0^{2\pi} p_{rr}|_{r=a} \cos\theta' d\theta'$$

Учитывая (2.6) и определение p_{rr}, после вычисления получаем

$$F = 2\pi a \rho_0 \sigma i \left[\left(1 + \frac{2\nu i}{\sigma} k_{11}^2\right)\{H_1(k_{11}b)J_1(k_{11}a) + D_1 H_1(k_{11}a)\} + \left(1 + \frac{2\nu i}{\sigma} k_{12}^2\right) E_1 H_1(k_{12}a)\right] - 4\pi a \rho_0 \nu [k_{12}^2\{H_1(k_{11}b)J_1''(k_{11}a) + D_1 H_1''(k_{11}a)\} + k_{12}^2 E_1 H_1''(k_{12}a)] e^{-i\sigma t} \tag{2.7}$$

$$H_1''(u) = \frac{d^2 H_2(u)}{du^2}, \qquad J_1''(u) = \frac{d^2 J_2(u)}{du^2}$$

3. Случай малой вязкости и теплопроводности. Рассмотрим только случай, когда жидкость обладает малой вязкостью и теплопроводностью. Найдем действительные и мнимые части комплексных чисел k_{11}, k_{12}, k_2. Выражения для указанных величин, зависящие, в частности, от параметров

$$\sigma\nu' c^{-2}, \qquad \sigma\nu c^{-2}, \qquad \sigma\varkappa_0 c^{-2} \tag{3.1}$$

легко найти из (1.6), (1.7).

Пусть эти параметры малы по сравнению с единицей. Пренебрегая малыми высших порядков, можем написать для действительных и мнимых частей комплексных чисел k_{11}, k_{12}, k_2 следующие приближенные соотношения:

$$k_{11}' \approx \frac{\sigma}{c} \qquad k_{11}'' \approx \frac{\sigma^2}{2c^3}\left(\nu^* + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\varkappa_0\right),$$

$$k_{12}' \approx \left(\frac{\gamma\sigma}{2\varkappa_0}\right)^{1/2}\left[1 - \frac{\gamma - 1}{2c^2}\left(\nu^* - \frac{\varkappa_0}{\gamma}\right)\right] \tag{3.2}$$

$$k_{12}'' \approx \left(\frac{\gamma\sigma}{2\varkappa_0}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2c^2}\sigma\left(\nu^* - \frac{\varkappa_0}{\gamma}\right)\right], \qquad k_2' = k_2'' = \left(\frac{\sigma}{2\nu}\right)^{1/2}$$

Используя малость параметров (3.1), можно показать, что величины k_{12}', k_{12}'', k_2', k_2'' из (3.2) очень велики по сравнению с $(\sqrt{2}c)^{-1}\sigma$. Поэтому цилиндрические функции, зависящие от k_{12} и k_2, могут быть заменены их асимптотическими выражениями, что позволяет значительно упростить выражения для коэффициентов (2.4), (2.5).

Исходя из таких упрощенных выражений, можно получить представления для потенциалов рассеянной волны φ_s и Φ_s. Эти представления имеют вид

$$\varphi_s = \sqrt{\frac{2}{\pi k_{11} r}} e^{-k_{11}'' r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(k_{11} b) \left[J_n'(k_{11} a) + \frac{\gamma - 1}{c} \sqrt{\frac{\sigma \varkappa_0}{2\gamma}} (1+i) J_n(k_{11} a) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\varkappa_0}{2\gamma\sigma}} (1-i) \alpha T_n \right] \left[H_n'(k_{11} a) + \frac{\gamma - 1}{c} \sqrt{\frac{\sigma \varkappa_0}{2\gamma}} (1+i) H_n(k_{11} a) \right]^{-1} \times$$

$$\times \exp\left\{ i \left(k_{11}' r - \sigma t - \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \right) \right\} e^{in\theta'}, \quad \Phi_s \approx 0 \tag{3.3}$$

Ламб при исследовании отражения плоских волн от сферического препятствия определял ту скорость, с которой энергия рассеивается за счет вязкости и отбирается от последовательности первоначальных волн благодаря препятствию [3]. Следуя Ламбу, найдем работу в расчете на единицу времени и единицу цилиндрической поверхности очень большого радиуса r (но $b > r$), произведенную давлением над газом, заключенным внутри цилиндра. Эта работа выражается при помощи поверхностного интеграла

$$\iint (p_q + p_S)(v_{qr} + v_{Sr})\, dS \tag{3.4}$$

где p_q и v_{qr} — давление и радиальная скорость падающей цилиндрической волны, а p_s и v_{sr} — давление и радиальная скорость волн, отраженных от цилиндрической поверхности.

Общее количество энергии первоначальных волн, теряющееся в единицу времени благодаря препятствию оказывается равным среднему за промежуток времени значению интеграла

$$\iint_S p_q v_{Sr}\, dS + \iint_S p_S v_{qr}\, dS \tag{3.5}$$

где S — поверхность единицы длины цилиндра большого радиуса.

Энергия, рассеянная препятствием, вдали от препятствия определяется интегралом

$$\iint_S p_S v_{Sr}\, dS \tag{3.6}$$

4. Дифракция плоских стационарных звуковых волн на цилиндре в вязкой и теплопроводной среде. Рассмотрим случай, когда расстояние между осями волны и цилиндра велико по сравнению с единицей, т. е. $|k_{11} b| \gg 1$, $|k_2 b| \gg 1$. В этом случае $|H_n(k_2 b) : H_n(k_2 a)| \to 0$ при $b \to \infty$.

Сделаем следующие предположения: а) амплитуда потенциала скоростей падающей плоской волны равна $(^1/_2 \pi k_{11} b)^{1/2} \exp\{i(-k_{11} b + \pi/4)\}$, б) вязкость и теплопроводность очень малы. Тогда в пределах обыкновенных звуковых волн с достаточной точностью можно пренебречь всеми членами, содержащими множитель

$$\operatorname{Im} k_{11} a = \frac{\sigma^2 a}{2c^3} \left(\nu^* + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \varkappa_0 \right)$$

в степени выше первой. Применяя теорему сложения цилиндрических функций, можно записать приближенные выражения

$$J_n(\omega + i k_{11}'' a) \simeq J_n(\omega) + i k_{11}'' a J_n'(\omega) + \ldots$$

$$H_n(\omega + i k_{11}'' a) \simeq H_n(\omega) + i k_{11}'' a H_n'(\omega) + \ldots \tag{4.1}$$

$$\omega = k_{11}' a = \sigma a c^{-1}$$

Для простоты считаем, что

$$T_n = (-i)^n T_n' (^1/_2 \pi k_{11} b)^{-1/2} \exp\{i(k_{11} b - {}^1/_4 \pi\} \tag{4.2}$$

При этих приближениях формулы (3.3) после преобразования принимают вид

$$\varphi_S \simeq \left(\frac{2}{\pi k_{11} r}\right)^{1/2} e^{-k_{11}'' r} \exp\left\{i\left(k_{11}' r - \sigma t + \frac{3\pi}{4}\right)\right\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \left[J_n'(\omega) + \right.$$

$$\left. + ik_{11}'' a J_n''(\omega) + \frac{\gamma-1}{c}\left(\frac{\sigma\varkappa_0}{2\gamma}\right)^{1/2}(1+i)J_n(\omega) - \left(\frac{\varkappa_0}{2\gamma\sigma}\right)^{1/2}(1-i)\alpha|T_n'|\exp(t_n i)\right] \times$$

$$\times \left[H_n'(\omega) + \frac{\gamma-1}{c}\left(\frac{\sigma\varkappa_0}{2\gamma}\right)^{1/2}(1+i)H_n(\omega) + ik_{11}'' a H_n''(\omega)\right]^{-1} e^{in\theta'}, \qquad \Phi_S \approx 0 \qquad (4.3)$$

$$|T_n'| = [(\mathrm{Re}\, T_n')^2 + (\mathrm{Jm}\, T_n')^2]^{1/2}, \qquad T_n' = |T_n'| \exp(t_n i)$$

$$H_n'(u) = \frac{dH_n(u)}{du}, \qquad J_n'(u) = \frac{dJ_n(u)}{du}$$

Тогда для давления и нормальной скорости рассеянной волны в точке (r, θ) получим следующие выражения:

$$p_S = \rho_0 \sigma i \left(1 + \frac{\nu^* i}{\sigma} k_{11}^2\right) \varphi_S, \qquad v_{Sr} = \frac{\partial \varphi_S}{\partial r} \qquad (4.4)$$

Далее, следуя Морзу [7, 8], применим обозначения

$$H_n'(\omega) = iC_n e^{\gamma_n i}, \qquad H_n(\omega) = M_n e^{\zeta_n i}$$

$$C_n = {}^1/_2[\{J_{n-1}(\omega) - J_{n+1}(\omega)\}^2 + \{N_{n-1}(\omega) - N_{n+1}(\omega)\}^2]^{1/2}$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma_n = \frac{J_{n+1}(\omega) - J_{n-1}(\omega)}{N_{n-1}(\omega) - N_{n+1}(\omega)}$$

$$M_n = [\{J_n(\omega)\}^2 + \{N_n(\omega)\}^2]^{1/2}, \qquad \mathrm{tg}\,\zeta_n = \frac{N_n(\omega)}{J_n(\omega)}$$

Тогда

$$J_n'(\omega) = -C_n \sin\gamma_n, \qquad H_n''(\omega) = {}^1/_2 i[C_{n-1}e^{\gamma_{n-1} i} - C_{n+1}e^{\gamma_{n+1} i}]$$

$$J_n''(\omega) = {}^1/_2\,[C_{n+1}\sin\gamma_{n+1} - C_{n-1}\sin\gamma_{n-1}] \qquad (4.5)$$

Здесь величины C_n, γ_n определяются по таблицам [7, 8], а величины M_n, ζ_n, $J_n(\omega)$, $N_n(\omega)$ — из таблиц бесселевых функций [6].

Вычислим сначала интеграл (3.6). Для этого определим давление p_s и радиальную скорость v_{sr} в точке (r, θ) вязкой и теплопроводной среды, используя для этой цели (4.3)—(4.5).

Используя получающиеся выражения для этих величин, для интенсивности и рассеянной энергии вдали от цилиндра имеем

$$I_S = I_0 \frac{2a}{\pi\omega r} e^{-2k_{11}'' r} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{n+j} \tau_n \tau_j \frac{Y_n Y_j}{L_n L_j} \cos(f_n - f_j - \delta_n + \delta_j) \times$$

$$\times \cos n\theta' \cos j\theta' \cos(\varepsilon - \varepsilon_1) \qquad (4.6)$$

$$\Pi_S = I_0 \frac{4a}{\omega} e^{-2k_{11}'' r} \cos(\varepsilon - \varepsilon_1)\left[\frac{Y_0^2}{L_0^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n^2}{L_n^2}\right], \qquad I_0 = \frac{\rho_0\sigma^2}{2c}$$

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_n = 2 (n > 0), \qquad e^{\varepsilon i} = 1 + \frac{\nu^*\sigma i}{c^2}, \qquad e^{-\varepsilon_1 i} = 1 - \frac{\sigma^2 i}{2c^3}\left(\nu^* + \frac{\gamma-1}{\nu}\varkappa_0\right)$$

Если не учитывать теплопроводности $(\varkappa_0 = 0)$, то получим результат [1]; если не учитывать вязкости и теплопроводности $(\nu' = 0,\ \nu = 0,\ \varkappa_0 = 0)$, получим результат [7, 8].

Заметим, что ряды во всех формулах быстро сходятся, если ω мала по сравнению с единицей. При очень низких частотах только две волны, соответствующие $n = 0$ и $n = 1$, имеют значения для учета рассеяния звука. Из (4.6) следует, что при

$\omega = k_{11}'a \ll 1$

$$I_S \simeq I_0 \frac{2a}{\pi\omega r} e^{-2k_{11}''r} \left[\frac{Y_0}{L_0} - 2\frac{Y_1}{L_1}\cos\theta' \right]^2 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1)$$

$$\Pi_S \simeq I_0 \frac{4a}{\omega} e^{-2k_{11}''r} \left[\frac{Y_0^2}{L_0^2} + 2\frac{Y_1^2}{L_1^2} \right] \cos(\varepsilon - \varepsilon_1) \tag{4.7}$$

Для длин волн, очень малых по сравнению с длиной окружности (т. е. при $\omega \gg 1$), ряды (4.6) сходятся медленно. Так, например, для $\omega = 5$ потребуется более 60 членов ряда, чтобы выяснить сложную физическую картину акустического поля.

Теперь найдем интеграл (3.5). Имеем

$$\varphi_q = H_0(k_{11}R)\{{}^1/_2\pi k_{11}b\}^{1/2} \exp\{i(-k_{11}b + {}^1/_4\pi)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_{11}r)\cos n\theta' e^{-\sigma t i}$$

откуда легко определить величины p_q и v_{qr} на больших расстояниях r от цилиндра.

Среднее значение интеграла (3.5) выразится в результате в виде

$$\Pi = \int_0^{2\pi} (p_q v_{sr} + p_s v_{qr}) r\, d\theta' 1 \approx I_0 \frac{4a}{\omega} \cos(\varepsilon - \varepsilon_1) \times$$

$$\times \left[\frac{Y_0}{L_0}\cos(f_0 - \delta_0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{L_n}\cos(f_n - \delta_n) \right] e^{-2k_{11}''r} \tag{4.8}$$

Если $\omega = \sigma a c^{-1} \ll 1$, то в (4.8) также существенны только члены, которые соответствуют значениям ($n = 0$ и $n = 1$). Учитывая, что

$$\cos(\varepsilon - \varepsilon_1) \simeq 1, \qquad \exp(-2k_{11}''r) \simeq \exp\left(-\frac{\omega^2[\nu^* + (\gamma-1)/\gamma^{-1}\varkappa_0]}{ca^2} r \right)$$

получим вместо (4.8)

$$\Pi = I_0 \frac{4a}{\omega} \exp\left(-\frac{\omega^2[\nu^* + (\gamma - 1)\gamma^{-1}\varkappa_0]}{ca^2} r \right) \left[\frac{Y_0}{L_0}\cos(f_0 - \delta_0) + 2\frac{Y_1}{L_1}\cos(f_1 - \delta_1) \right] \tag{4.9}$$

Величина

$$I_0 = \rho_0\sigma^2(2c)^{-1} = (\Pi_p)_{\nu'=\nu=\varkappa_0=0}$$

описывает поток энергии первоначальных расходящихся плоских волн в идеальной среде. Поток энергии в вязкой и теплопроводной среде равен

$$\Pi_p = \frac{\rho_0\sigma^2}{2c}\operatorname{ch}(2k_{11}''r) = \frac{\rho_0\sigma^2}{2c}\operatorname{ch}\left[\frac{\omega^2}{ca^2}\left(\nu^* + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\varkappa_0 \right) r \right] \tag{4.10}$$

Если выполняется условие

$$\frac{r}{a} \ll \frac{ca}{\omega^2[\nu^* + (\gamma - 1)\gamma^{-1}\varkappa_0]}$$

то $\exp(-2k_{11}''r) \approx 1$, $\operatorname{ch}(2k_{11}''r) \approx 1$ и из (4.6) и (4.8)—(4.10) получим

$$\frac{\Pi_s}{\Pi_p} \simeq \frac{4a}{\omega}\left[\frac{Y_0^2}{L_0^2} + 2\frac{Y_1^2}{L_1^2} \right]$$

$$\frac{\Pi}{\Pi_p} \simeq \frac{4a}{\omega}\left[\frac{Y_0}{L_0}\cos(f_0 - \delta_0) + 2\frac{Y_1}{L_1}\cos(f_1 - \delta_1) \right] \tag{4.11}$$

$$\frac{(\Pi_s)_{\varkappa_0=0}}{\Pi_p} = \frac{4a}{\omega}\left[\frac{Y_0^2}{L_0^2} + 2\frac{Y_1^2}{L_1^2} \right]_{\varkappa_0=0}$$

$$\frac{(\Pi)_{\varkappa_0=0}}{\Pi_p} \simeq \frac{4a}{\omega}\left[\frac{Y_0}{L_0}\cos(f_0 - \delta_0) + 2\frac{Y_1}{L_1}\cos(f_1 - \delta_1) \right]_{\varkappa_0=0}$$

В качестве примера рассмотрим проволоку диаметром в 0.05 *см* при следующих значениях параметров:

$$\lambda = 122\ \text{см},\quad t = 0,\quad \alpha T_0 = 1,\quad T_n = 0\quad (n > 0),\quad c = 3.32\cdot 10^4\ \text{см/сек}$$

$$\nu' = 0,\quad \nu = 0.132\ \text{см}^2/\text{сек},\quad \varkappa_0 = 0.33\ \text{см}^2/\text{сек},\quad \gamma = 1.4$$

$$\omega = 2.577\cdot 10^{-3},\qquad 2k_{11}'' = 3.105\cdot 10^{-5}$$

Если $r / a \ll 1.26\cdot 10^9$, то из формулы (4.11) с учетом (4.5) найдем

$$(\Pi_S)_{\varkappa_0=0} / \Pi_p \approx 6.63\cdot 10^{-8},\qquad (\Pi)_{\varkappa_0=0} / \Pi_p \simeq 4.048\cdot 10^{-4} \tag{4.12}$$

$$\Pi_S / \Pi_p \simeq 6.83\cdot 10^{-8},\qquad \Pi / \Pi_p \simeq 6.731\cdot 10^{-4}$$

Из формул (4.12) видно, что в вязкой среде проволока отражает только $6.63\cdot 10^{-6}\%$ падающей энергии. Этот результат точно совпадает с результатом, полученным Ламбом [3] при исследовании отраженных плоских волн от цилиндра в идеальной среде. Поток энергии первоначальных волн, теряющийся в единицу времени благодаря присутствию цилиндра в вязкой среде, оказывается равным $4.048\cdot 10^{-2}\%$ падающей энергии отраженной волны. Из (4.13) вытекает, что учет теплопроводности в вязкой среде имеет существенное значение. В вязкой и теплопроводной среде проволока отражает больше, чем в вязкой среде, и, наоборот, потери энергии в вязкой и теплопроводной среде еще больше, чем в вязкой среде.

Поступило 16 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ц о й П. И. К вопросу о дифракции цилиндрических и плоских стационарных волн в вязкой среде на цилиндре. Сб. докл. VI Всес. акуст. конф. М., 1968, А, IV, 3, 1—4.
2. Р э л е й. Теория звука, т. 2. М., Гостехиздат, 1955.
3. Л а м б Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947.
4. К о ч и н Н. Е., К и б е л ь И. А., Р о з е И. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2. М., Физматгиз, 1963.
5. С л е з к и н Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
6. В а т с о н Г. Теория бесселевых функций, т. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
7. М о р з Ф. Колебания и звук. М., Гостехиздат, 1949.
8. М о р с Ф., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики, т. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1960.