№ 3 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1972

УДК 533.951

О СЛАБЫХ ВОЛНАХ, ХАРАКТЕРИСТИКАХ И ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ В ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКЕ

В. В. ГОГОСОВ, В. А. ПОЛЯНСКИЙ

(*Москва*)

Исследуется распространение слабых волн в электрогидродинамике по неоднородному невозмущенному состоянию. Рассматриваются волны с длиной волны, меньшей размера неоднородностей. Изменением амплитуд волны на длинах, сравнимых с длиной волны, пренебрегается. Подробно анализируется дисперсионное уравнение в тех случаях, когда волна распространяется лишь по ионам, а нейтралы покоятся, когда течение изэнтропическое (коэффициент подвижности $b = 0$) и когда коэффициент подвижности $b \neq 0$. Показано, что в электрогидродинамической постановке существуют две фазовые скорости распространения малых возмущений в покоящейся в целом среде

$$u_0 = \pm a_0, \qquad u_1 = bE_0$$

Фазовая скорость u_0 — обычная скорость звука в газовой динамике, скорость u_1 совпадает со скоростью движения ионной компоненты. В волнах, распространяющихся со скоростью u_1, изменяются, вообще говоря, плотность заряда и электрическое поле, а в волнах, распространяющихся со скоростью u_0, изменяются еще и газодинамические параметры среды. Рассмотрено распространение высокочастотных волн, когда обычная система уравнений электрогидродинамики непригодна и нужно использовать полную систему уравнений Максвелла.

Исследуются характеристики уравнений электрогидродинамики; обсуждается задача об обтекании тонкого профиля электрогидродинамическим потоком. Показано, что при определенном направлении и интенсивности электрического поля возмущения от профиля могут распространяться вверх по сверхзвуковому потоку.

Одной из первых работ по изучению слабых волн электрогидродинамике была работа [1]. В этой работе при линеаризации системы и составлении дисперсионного уравнения были допущены ошибки. В результате фазовая скорость распространения слабых возмущений оказалась равной $E_x(4\pi\rho)^{-1/2}$, что давало возможность автору проводить несуществующую на самом деле аналогию с распространением альфвеновских волн в магнитной гидродинамике. В работе [2] утверждается, что рассматривается распространение слабых волн в электрогидродинамике, однако при составлении системы уравнений электрогидродинамики предполагалось наличие в среде магнитных зарядов. Так что дивергенция магнитного поля пропорциональна плотности магнитных зарядов, а ротор электрического поля — плотности тока магнитных зарядов. Сила, действующая со стороны электромагнитного поля на среду, выбиралась равной сумме векторного произведения плотности тока магнитных зарядов и электрического поля и произведения плотности магнитных зарядов и магнитного поля. Выписывался также закон Ома для тока магнитных зарядов; проводимость полагалась равной бесконечности, так что закон Ома заменялся соотношением

$$\mathbf{H} = \mathbf{v} / c \times \mathbf{D}$$

Исследовалось распространение волн в среде с таким законом Ома, которые назывались электрогидродинамическими волнами. Из структуры определяющих уравнений легко видеть, что в этом случае скорости распространения волн и связь величин в волнах будут теми же, что и в магнитной гидродинамике, если в соответствующих формулах магнитной гидродинамики магнитное поле заменить электрическим. В работе [3] также утверждается, что рассматриваются слабые волны в электрогидродинамике, но, по существу, проделывается та же процедура, что и в работе [2], хотя нигде не говорится о наличии магнитных зарядов. Однако ротор электрического поля полагается пропорциональным некоторому вектору, для которого берется соотношение, аналогичное закону Ома для магнитных зарядов, используемое в работе [2]. Далее в [3] утверждается, что такая запись уравнений Максвелла нужна лишь для симметрии, а в конечных формулах введенные параметры (плотность магнитных зарядов и т. д.) полагаются равными нулю. На самом же деле стремление к нулю делается так, что сохраняется приведенное выше соотношение между напряженностью магнитного поля и электрической индукцией, а потому результаты работ [3], так же как и результаты работы [2], описывают распространение волн не в электрогидродинамике, а в гидродинамике с магнитными зарядами.

1. Уравнения электрогидродинамики без учета вязкости и теплопроводности среды могут быть записаны в виде [4]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \qquad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = q\mathbf{E}, \qquad p = \rho R T \tag{1.1}$$

$$c_v \rho \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = (\mathbf{j} - q\mathbf{v})\mathbf{E} \tag{1.2}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi q \tag{1.3}$$

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v} + qb\mathbf{E}, \qquad q > 0$$

Здесь ρ — плотность, $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ — скорость, p — давление, T — температура, q — плотность заряда, $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{j}$ — плотность тока, b — коэффициент подвижности, R — газовая постоянная, c_v — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Линеаризуем систему уравнений (1.1) — (1.3). Будем обозначать значком нуль параметры невозмущенного состояния, значком штрих — малые изменения величин в волне

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \nabla \rho_0 + \rho' \operatorname{div} \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \nabla \rho' = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' + \rho_0 (\mathbf{v}' \nabla) \mathbf{v}_0 + \rho' (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \nabla p' = q_0 \mathbf{E}' + q' \mathbf{E}_0,$$

$$p' = R T_0 \rho' + R \rho_0 T' \tag{1.4}$$

$$c_v \rho_0 \left(\frac{\partial T'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \nabla T' + \mathbf{v}' \nabla T_0 \right) + c_v \rho' \mathbf{v}_0 \nabla T_0 + p_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' + p' \operatorname{div} \mathbf{v}_0 =$$

$$= (\mathbf{j}_0 - q_0 \mathbf{v}_0) \mathbf{E}' + (\mathbf{j}' - q' \mathbf{v}_0 - q_0 \mathbf{v}') \mathbf{E}_0 \tag{1.5}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}' = 0, \qquad \frac{\partial q'}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}' = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E}' = 4\pi q' \tag{1.6}$$

$$\mathbf{j}' = q_0 (\mathbf{v}' + b\mathbf{E}') + q (\mathbf{v}_0 + b\mathbf{E}_0)$$

Рассмотрим вначале распространение волны по ионам при условии, что среда покоится ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' = 0$). Тогда уравнения (1.6), описывающие поведение электромагнитных величин, отделяются от уравнений (1.4), (1.5) — на распространение волны по ионам нейтралы не оказывают влияния. Предположим, что параметры невозмущенной среды не зависят от времени. Тогда электрические параметры удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{j}_0 = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 4\pi q_0, \qquad \mathbf{j}_0 = q_0 b \mathbf{E}_0 \tag{1.7}$$

Будем искать решения уравнений (1.6), описывающие распространение волн с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$

$$q' = q^*(x, y, z)\exp i(\mathbf{kr} - \omega t), \qquad q^* = q_1 + iq_2$$
$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}^*(x, y, z)\exp i(\mathbf{kr} - \omega t), \qquad \mathbf{E}^* = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2$$
$$\mathbf{j}' = \mathbf{j}^*(x, y, z)\exp i(\mathbf{kr} - \omega t), \qquad \mathbf{j}^* = \mathbf{j}_1 + i\mathbf{j}_2$$

Здесь звездочками обозначаются комплексные амплитуды в волне. Пренебрегая производными от комплексных амплитуд по координатам и по времени, получим систему алгебраических уравнений для определения фазовой скорости волны, декремента затухания, связи амплитуд в волне и зависимости амплитуд от координат (следствие неоднородности невозмущенного состояния)

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}' = 0, \quad -\omega q' + \mathbf{kj}' = 0, \quad i\mathbf{E}'\mathbf{k} = 4\pi q'$$
$$\mathbf{j}' = q_0 b\mathbf{E}' + q' b\mathbf{E}_0 \tag{1.8}$$

Нетрудно видеть, что система (1.8) имеет частное решение: $\mathbf{k} = 0$, $q' = 0$, $\mathbf{E}'$ и ω — произвольные величины. Это решение соответствует волне, распространяющейся с бесконечной скоростью, в которой возмущаются только электрическое поле и плотность тока. В дальнейшем такие длинноволновые возмущения не рассматриваются.

Выберем направление волнового вектора совпадающим с направлением оси x. Тогда из первого уравнения (1.8) следует, что $E_y' = E_z' = 0$. Без ограничения общности можно считать $E_{0y} = E_{0z} = 0$, тогда $j_y' = j_z' = 0$. Предположим, что распространяется волна заданной частоты (ω — действительная величина), а волновой вектор $k = k_1 + ik_2$, где k_1 — величина обратная длине волны λ, k_2 — декремент затухания (инкремент нарастания) волны.

Система (1.8) может быть сведена к уравнениям

$$i(k_1 + ik_2)(E_1 + iE_2)[-\omega + bE_0(k_1 + ik_2)] + \\ + 4\pi q_0 b(E_1 + iE_2)(k_1 + ik_2) = 0 \tag{1.9}$$
$$4\pi(q_1 + iq_2) = i(k_1 + ik_2)(E_1 + iE_2)$$

Приравнивая друг другу действительные и мнимые части, получим однородную систему уравнений для определения E_1, E_2 и q_1, q_2. Условие совместности этих уравнений имеет вид

$$[(bE_0k_1 - \omega)k_2 + bE_0k_1k_2 - 4\pi q_0 bk_1]^2 + [(bE_0k_1 - \omega)k_1 - bE_0k_2^2 + \\ + 4\pi q_0 bk_2]^2 = 0$$

Приравнивая нулю оба слагаемых, получим выражения для фазовой скорости волны и декремента затухания

$$\frac{\omega}{k_1} = u_1 = bE_0, \qquad k_2 = \frac{4\pi q_0}{E_0}, \qquad |k_2| \sim L^{-1} \tag{1.10}$$

Нетрудно видеть, что длина L есть характерный размер неоднородности: на длине L поле E_0 изменяется на величину, равную по порядку величине самого поля. На этой длине амплитуда волны изменяется в e раз. Величины u_1 и k_2 имеют одинаковый знак, совпадающий со знаком электрического поля E_0, так как $q_0 > 0$. Следовательно, волна всегда затухает в направлении распространения. Из второй формулы (1.9) и (1.10) можно найти связь составляющих электрического поля E_1 и E_2, а также модуля электрического поля E с модулем плотности заряда q

$$E_1 = 4\pi(q_2k_1 - q_1k_2)k^{-2}, \qquad E_2 = -4\pi(q_1k_1 + q_2k_2)k^{-2}$$
$$E = 4\pi qk^{-1}, \qquad E = (E_1^2 + E_2^2)^{1/2}, \qquad q = (q_1^2 + q_2^2)^{1/2}$$
$$k = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2} \tag{1.11}$$

Из формул (1.10), (1.11) видно, что фазовая скорость (а при постоянной частоте и длина волны), декремент затухания, комплексная амплитуда электрического поля являются функциями координат, так как невозмущенное электрическое поле E_0 неоднородное.

Подставив полученное решение (1.10), (1.11) в исходные уравнения (1.6), можно получить условия, при которых справедливы упрощенные уравнения (1.8). Производя соответствующие оценки, нетрудно показать, что при выводе дисперсионного уравнения и определении фазовой скорости, декремента затухания и составляющей комплексной амплитуды E_2 можно пренебрегать производными от комплексных амплитуд и волнового вектора по координатам в уравнениях (1.6), если длина волны и расстояние, на котором изучается распространение волны, меньше характерного размера неоднородностей. Пусть для определенности $q_2 = 0$. Легко видеть, что отношение $E_1 / E_2 \approx \lambda / L$, составляющая комплексной амплитуды E_1 мала, когда $\lambda \ll L$. Из оценок следует, что при определении E_1 в уравнениях (1.6) нельзя выбрасывать производную от амплитуды E_2 по координатам, так как эта величина дает вклад в E_1, сравнимый с членами в правой части первой формулы (1.11). Модуль комплексной амплитуды $E \approx E_2$ и от точности определения E_1 не зависит.

Рассмотренная волна распространяется с фазовой скоростью, равной скорости движения ионной компоненты; в такой волне меняется плотность зарядов q и электрическое поле. Изменение электрического поля зависит от длины волны и при $\lambda = 0$ поле сохраняется постоянным при изменении плотности заряда.

2. Рассмотрим распространение волн в среде, когда коэффициент подвижности равен нулю. Будем считать, что параметры, описывающие поведение неоднородной среды, удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{v}_0 = 0, \qquad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0, \qquad \nabla p_0 = q_0\mathbf{E}_0, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}_0 = 0$$
$$\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = 4\pi q_0, \qquad \mathbf{j}_0 = q_0\mathbf{v}_0 = 0 \tag{2.1}$$

Вместо уравнения энергии (1.5) удобно в этом случае воспользоваться изэнтропичностью процесса. Вводя скорость звука $a_0^2 = \gamma p_0/\rho_0$, можно записать

$$\nabla p_0 = a_0^2\nabla\rho_0, \qquad \nabla p' = a_0^2\nabla\rho' + (\gamma - 1)a_0^2\rho_0^{-1}\rho'\nabla\rho_0, \qquad \gamma = c_pc_v^{-1} \tag{2.2}$$

Будем, как и прежде, искать решения уравнений (1.4), (1.6), (2.2) с использованием первого уравнения (2.1), имеющие вид $\exp i(\mathbf{kr} - \omega t)$ с комплексными амплитудами. Выберем направление волнового вектора, совпадающее с осью x, а оси координат расположим так, чтобы вектор поля лежал в плоскости $xy(E_{0z} = 0)$. Делая те же упрощения, что и в п. 1, получим систему алгебраических уравнений для комплексных амплитуд. Записывая условия совместности решения системы, получим дисперсионное соотношение

$$\omega^2[a_0^2k^2 - \omega^2 + \Omega_0^2 - (\gamma - 1)\Omega^2] + (\gamma - 1)\Omega_0^2\Omega_y^2 +$$
$$+ a_0^2\Omega_y^2k^2 - i(\gamma - 1)a_0\Omega_x\omega^2k = 0, \qquad \omega \neq 0 \tag{2.3}$$

$$\Omega_x^2 = \frac{a_0^2}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\right)^2, \qquad \Omega_y^2 = \frac{a_0^2}{\rho_0^2}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial y}\right)^2 \tag{2.4}$$
$$\Omega^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2, \qquad \Omega_0^2 = 4\pi q_0^2\rho_0^{-1}$$

Полагая $k = k_1 + ik_2$ для заданной действительной частоты ω из уравнения (2.3) можно найти величину k_2 и выражение для определения фазовой скорости

$$k_2 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{\Omega_x}{a_0} \left(1 + \frac{\Omega_y^2}{\omega^2}\right)^{-1} \tag{2.5}$$

$$a_0^2(k_1^2 - k_2^2) - \omega^2 + \Omega_0^2 - (\gamma - 1)\Omega^2 + (\gamma - 1)\Omega_0^2\Omega_y^2\omega^{-2} +$$
$$+ a_0^2\Omega_y^2(k_1^2 - k_2^2)\omega^{-2} + (\gamma - 1)a_0\Omega_x k_2 = 0 \tag{2.6}$$

Оценим порядки величин членов в уравнениях (2.5), (2.6). Пусть L — характерный размер неоднородностей — длина, на которой невозмущенные параметры меняются на величину порядка этих параметров, $t = L / a_0$ — характерное время изменения невозмущенных параметров. Справедливы следующие оценки:

$$\frac{\Omega_x^2}{\omega^2} \sim \frac{\Omega_y^2}{\omega^2} \sim \frac{1}{t^2\omega^2}, \qquad \frac{\Omega_x^2}{a_0^2k_1^2} \sim \frac{\Omega_y^2}{a_0^2k_1^2} \sim \frac{\Omega^2}{a_0^2k_1^2} \sim \frac{\lambda^2}{L^2}$$

Для возмущений, длина и период волны которых меньше размера неоднородностей и характерного времени задачи, из уравнений (2.5), (2.6) получим

$$\frac{\omega}{k_1} = u = \pm a_0, \qquad k_2 = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{q_0 E_{0x}}{\rho_0 a_0^2}, \qquad |k_2| \sim \frac{1}{L} \tag{2.7}$$

Скорость распространения малых возмущений равна скорости звука, а величина k_2^{-1} порядка размера неоднородностей. При распространении таких возмущений меняются скорость, плотность, температура, давление среды, плотность заряда и поле. Изменение поля мало

$$E' / E_0 \ll q' / q_0$$

Упрощения, приводящие к такому простому результату, могут быть сделаны сразу после написания линеаризованной системы уравнений (1.4) — (1.6). Предполагая, что на длине волны параметры невозмущенной среды меняются слабо, получим, что изменение электрического поля $\Delta E_0 \sim 4\pi q_0 \lambda \ll E_0$. С другой стороны, $\Delta E' \sim 4\pi q' \lambda \sim E'$. Из этих двух неравенств следует, что $E' / E_0 \ll q' / q_0$. Физический смысл полученного неравенства ясен. Считаем, что на длине волны изменение поля E_0 мало и не учитываем его. Это изменение пропорционально плотности заряда q_0. Изменение E' пропорционально $q' \ll q_0$, поэтому изменение E' и подавно можно не учитывать, полагая $E' = 0$. Таким образом, во втором уравнении (1.4) член $q_0\mathrm{E}'$ можно не учитывать по сравнению с членом $q'\mathrm{E}_0$. Можно показать, что отношение членов $q'\mathrm{E}_0$ и $(\gamma - 1)a_0^2\rho_0^{-1}\nabla\rho_0\rho'$ к члену $a_0^2\nabla\rho'$ (вторая формула (2.2)) порядка λ / L, если величины q' / q_0 и ρ' / ρ_0 одного порядка. При тех же предположениях в уравнении неразрывности можно опустить член $\mathrm{v}'\nabla\rho_0$. При этом уравнения (1.4) совпадают с соответствующими линеаризованными уравнениями газовой динамики и, естественно, фазовая скорость распространения малых возмущений совпадает со скоростью звука.

После аналогичных упрощений уравнение энергии (уравнение (1.5)) совпадает с линеаризованным уравнением энергии в газовой динамике.

Из (2.7) видно, что направление распространения коротковолновых высокочастотных возмущений в рассматриваемом приближении не зависит от направления электрического поля, а знак величины k_2 совпадает со знаком составляющей электрического поля E_{0x}. Следовательно, амплитуда волны уменьшается, если волна распространяется вдоль E_{0x} ($E_{0x}u > 0$), и растет, если волна распространяется против E_{0x} ($E_{0x}u < 0$). Этот процесс является обратимым.

Рассмотрим при сделанных предположениях ($\lambda \ll L$) распространение малых возмущений в электрогидродинамике, когда $b \neq 0$. Будем считать, что параметры невозмущенной среды описываются первыми пятью уравнениями (2.1) и уравнениями

$$\frac{\partial q_0}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}_0=0,\qquad c_v\rho_0\frac{\partial T_0}{\partial t}=\mathbf{j}_0\mathbf{E}_0,\qquad \mathbf{j}_0=q_0b\mathbf{E}_0$$

В качестве линеаризованной системы уравнений выберем уравнения (1.4), (1.5), в которых выброшены все электродинамические члены и члены, связанные с неоднородностью невозмущенного состояния, а также уравнения (1.6) с $\mathbf{v}_0=0$. В законе Ома опустим член $q_0b\mathbf{E}'$ по сравнению с членом $q'b\mathbf{E}_0$ в соответствии с оценками, приведенными выше.

Дисперсионное уравнение, описывающее распространение волн вдоль оси x, в этом случае запишется в виде

$$(\omega/k-bE_{0x})(\omega^2/k^2-a_0^2)=0,\qquad \omega\neq0 \tag{2.8}$$

Таким образом, малые возмущения могут распространяться с фазовыми скоростями

$$u_0=\pm a_0,\qquad u_1=bE_{0x}$$

Отметим, что если в законе Ома оставлен член $q_0b\mathbf{E}'$, то величина k — комплексная, фазовые скорости остаются теми же, а декремент затухания

$$k_2=4\pi q_0E_{0x}^{-1}$$

Нетрудно показать, что в волне, распространяющейся со скоростью u_1, равной скорости движения ионов, меняются только плотность заряда, электрическое поле и плотность тока. В волне, распространяющейся со скоростью звука a_0, меняются в рассматриваемом приближении все параметры.

Выпишем в явном виде решения уравнений (1.7) и (2.1), относительно которых исследуется распространение малых возмущений. Будем считать, что все величины зависят только от одной координаты x и электрическое поле $\mathbf{E}_0$ направлено вдоль x.

Решение уравнений (1.7) можно записать в виде

$$E_0=\pm\left(\frac{8\pi j_0x}{b}+c\right)^{1/2},\qquad q_0=\frac{j_0}{bE_0} \tag{2.9}$$

При этом C и j_0 — константы. Пусть электрический ток j_0 задан, константу C для простоты положим равной нулю (это всегда можно сделать соответствующим выбором начала координат). Тогда, если $j_0>0$, то решение существует только при $x>0$ и в первой формуле (2.9) нужно взять верхний знак перед корнем (так как всегда $q_0>0$). Если $j_0<0$, то решение существует при $x<0$, при этом электрическое поле $E_0<0$. При $x=0$ решение имеет особенность, так как q_0 обращается в бесконечность в этой точке.

Решение уравнений (2.1) нетрудно выписать, если воспользоваться тем, что при $b=0$ плотность заряда пропорциональна плотности жидкости ($q_0=\beta\rho_0$) [4]. При этом $q_0=E_0^2/8\pi a_0^2\beta\pm c_1^2$, где c_1 — положительная константа, а знак перед c_1^2 зависит от начальных условий. Если берется верхний знак, то решение (2.1) имеет вид

$$E_0=c_1\operatorname{tg}\frac{c_1(x+c_2)}{2a_0^2\beta},\qquad q_0=\frac{E_0^2}{8\pi a_0^2\beta}+c_1^2 \tag{2.10}$$

Решение для нижнего знака перед c_1^2 можно записать в виде

$$E_0=c_1\left[1+c_2\exp\left(\frac{c_1x}{a_0^2\beta}\right)\right]\left[1-c_2\exp\left(\frac{c_1x}{a_0^2\beta}\right)\right]^{-1},\qquad q_0=\frac{E_0^2}{8\pi a_0^2\beta}-c_1^2 \tag{2.11}$$

В формулах (2.10) и (2.11) c_2 — постоянная интегрирования.

Рассмотрим теперь распространение волн заданной длины (величина k действительна). Пусть величина $\omega=\omega_1+i\omega_2$. Из уравнений (1.8), нетрудно получить, что

$$\omega_1/k=bE_0,\qquad \omega_2=-4\pi q_0b \tag{2.12}$$

Величина $\omega_2<0$ всегда, характерное время затухания волны порядка времени, за которое волна проходит расстояние L.

Из дисперсионного уравнения (2.3) в предположении, что $\lambda / L \ll 1$, можно получить

$$\frac{\omega_1}{k} = u = \pm a_0, \qquad \omega_2 = -\frac{\gamma - 1}{2}\frac{q_0 E_{0x}}{\rho_0 u} \tag{2.13}$$

Из (2.13) видно, что знак величины ω_2 зависит от знака составляющей электрического поля E_{0x} и от знака фазовой скорости u. Амплитуда волны уменьшается со временем, если волна распространяется вдоль E_{0x} ($uE_{0x} > 0$), и растет, если волна распространяется против E_{0x} ($uE_{0x} < 0$).

3. Исследование распространения возмущений, проведенное выше, базировалось на уравнениях электрогидродинамики, полученных в предположении [4], что магнитное поле меняется медленно с характерным временем порядка $t \sim L / V$ (V — характерная скорость среды, в данном случае $V \sim a_0$). Для описания высокочастотных процессов нужно использовать систему уравнений (1.1) — (1.3), где вместо первого уравнения (1.3) нужно добавить полную систему уравнений Максвелла. Комбинируя уравнения Максвелла для напряженности электрического поля, можно выписать уравнение

$$\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 = c^2 (\Delta \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}) - 4\pi \partial \mathbf{j} / \partial t \tag{3.1}$$

Рассмотрим распространение малых возмущений в постановке предыдущего пункта (изэнтропический случай; невозмущенное состояние описывается уравнениями (2.1) с уравнением (3.1) для электрического поля).

Как показано в п. 2, линеаризованные уравнения неразрывности, импульса и энергии в электрогидродинамике для волн, длина которых меньше характерного размера неоднородностей, совпадают с соответствующими уравнениями газовой динамики. Рассматривая эти уравнения совместно с проекциями уравнения (3.1) на оси y и z, после соответствующей процедуры получим следующее дисперсионное уравнение:

$$(c^2 k^2 - \omega^2)(\omega^2 / k^2 - a_0^2) = 0, \qquad \omega \neq 0$$

В волне, распространяющейся с фазовой скоростью $u = \pm c$, изменяются y- и z-составляющие электрического и магнитного полей; в волне, распространяющейся с фазовой скоростью $u = \pm a_0$, изменяются гидродинамические величины, плотность заряда и x-составляющая электрического поля.

4. Рассмотрим характеристики системы уравнений (1.1) — (1.3), записанной для плоского стационарного течения. Как обычно, разрывы производных некоторой функции f на характеристиках связаны соотношением $\{\partial f / \partial x\} = -\zeta \{\partial f / \partial y\}$, где фигурные скобки означают разность производных по обе стороны от характеристики, а $\zeta(x, y) = dy / dx$ есть характеристическое направление исследуемой системы. Уравнения для разрывов производных имеют вид

$$(v_y - \zeta v_x)\left\{\frac{\partial \rho}{\partial y}\right\} - \rho\zeta\left\{\frac{\partial v_x}{\partial y}\right\} + \rho\left\{\frac{\partial v_y}{\partial y}\right\} = 0$$

$$\rho(v_y - \zeta v_x)\left\{\frac{\partial v_x}{\partial y}\right\} - \zeta\left\{\frac{\partial p}{\partial y}\right\} = 0$$

$$\rho(v_y - \zeta v_x)\left\{\frac{\partial v_y}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial p}{\partial y}\right\} = 0$$

$$a^2(v_y - \zeta v_x)\left\{\frac{\partial \rho}{\partial y}\right\} - (v_y - \zeta v_x)\left\{\frac{\partial p}{\partial y}\right\} = 0 \tag{4.1}$$

$$[(v_y + bE_y) - \zeta(v_x + bE_x)]\left\{\frac{\partial q}{\partial y}\right\} - \zeta q\left\{\frac{\partial v_x}{\partial y}\right\} +$$

$$+ q\left\{\frac{\partial v_y}{\partial y}\right\} = 0, \qquad \zeta\left\{\frac{\partial E_x}{\partial y}\right\} - \left\{\frac{\partial E_y}{\partial y}\right\} = 0$$

$$\zeta\left\{\frac{\partial E_y}{\partial y}\right\} + \left\{\frac{\partial E_x}{\partial y}\right\} = 0, \qquad a^2 = \gamma p/\rho$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим следующее характеристическое уравнение:

$$(v_y - \zeta v_x)^2[\zeta^2(v_x^2 - a^2) - 2v_xv_y\zeta + (v_y^2 - a^2)] \times$$
$$\times [v_y + bE_y - \zeta(v_x + bE_x)](\zeta^2 + 1) = 0 \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) имеет корни

$$\zeta_{1,2} = \frac{M_xM_y \pm \sqrt{M^2 - 1}}{M_x^2 - 1}, \qquad \zeta_3 = \frac{v_y + bE_y}{v_x + bE_x}$$
$$\zeta_{4,5} = \frac{v_y}{v_x}, \qquad \zeta_{6,7} = \pm i \tag{4.3}$$
$$(M_x = v_x / a, \quad M_y = v_y / a, \quad M^2 = M_x^2 + M_y^2)$$

Таким образом, характеристическое соотношение уравнений электрогидродинамики для плоского стационарного течения имеет при $M > 1$ пять действительных корней и два мнимых.

Характеристики, соответствующие корням $\zeta_{1,2}$, есть обычные звуковые характеристики, образующие углы Маха с линиями тока газа. На этих характеристиках могут терпеть разрыв производные от всех параметров течения. Корень ζ_3 дает семейство характеристик, являющихся линиями тока заряженных частиц, так как выражения $v_x + bE_x$, $v_y + bE_y$ представляют собой составляющие скорости заряженных частиц. Такие характеристики есть линии слабого разрыва только для плотности объемного заряда и плотности тока. При малом электрическом числе Рейнольдса наклон характеристик не зависит от скорости набегающего потока. Характеристики, соответствующие двукратно вырожденному корню $\zeta_{4,5}$, есть линии тока газа. Заметим, что на этих характеристиках имеется два независимых условия

$$^1/_2 d(v_x^2 + v_y^2) + 1 / \rho dp = q / \rho (v_xE_x + v_yE_y) d\xi \tag{4.4}$$
$$dp - a^2 d\rho = (\gamma - 1)[(j_x - qv_x)E_x + (j_y - qv_y)E_y] d\xi$$

Здесь ξ — координата вдоль линии тока, на линиях тока может нарушаться непрерывность производных плотности, составляющих скорости энтропии.

Рассмотрим электрогидродинамическое течение с малым безразмерным параметром $Q = 4\pi q_0 L / E_0$, характеризующим изменение электрического поля за счет объемного заряда (L, q_0, E_0 — характерные значения длины, плотности заряда и электрического поля). При $Q \ll 1$ электрическое поле можно считать постоянным. При этом в уравнениях (4.1)

$$\{\partial E_x / \partial y\} = \{\partial E_y / \partial y\} = 0$$

Характеристическое уравнение, соответствующее этому случаю, имеет при сверхзвуковом течении пять действительных корней ζ_k ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), которые определяют четыре семейства характеристик.

Таким образом, электрогидродинамическое сверхзвуковое течение в постоянном (или заданном) электрическом поле описывается системой уравнений гиперболического типа.

Рассмотрим задачу об обтекании расположенного под нулевым углом атаки тонкого симметричного профиля поступательным однородным потоком в постоянном внешнем поле E_0. Пусть при этом $v_{0y} = 0$, $q_0 = 0$. Это соответствует тому, что на профиль натекает поток нейтрального газа, а заряженные частицы вдуваются в поток с поверхности профиля. Проведем линеаризацию уравнений электрогидродинамики для плоского стационарного течения в предположении, что безразмерные параметры

$$S = qE_0Lp_0^{-1} \ll 1, \qquad Q = 4\pi qLE_0^{-1} \ll 1$$

Здесь q — плотность заряда, который вносится в поток с поверхности профиля, L — длина профиля. При выполнении этих условий вдув заряженных частиц слабо возмущает поступательный поток. Линеаризованная система уравнений для поправок v_x, v_y, p, ρ к невозмущенному состоянию имеет вид

$$v_{0x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0\frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho_0\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \qquad \rho_0 v_{0x}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = qE_{0x},$$

$$\rho_0 v_{0x}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = qE_{0y} \tag{4.5}$$

$$v_{0x}\frac{\partial p}{\partial x} - v_{0x}a_0^2\frac{\partial \rho}{\partial x} = (\gamma - 1)bE_0^2 q$$

$$(v_{0x} + bE_{0x})\frac{\partial q}{\partial x} + bE_{0y}\frac{\partial q}{\partial y} = 0$$

Интегрируя последнее уравнение системы (4.5), получим

$$q = F(x - \zeta y), \qquad \zeta = \frac{v_{0x} + bE_{0x}}{bE_{0y}} \tag{4.6}$$

Для определения вида функции F можно задать в качестве граничного условия распределение нормальной составляющей плотности тока $j^*(x)$ на поверхности профиля. Если форма тела задается выражением $y = y(x)$ и плотность тока непрерывна на поверхности тела, то

$$F(x - \zeta y(x)) = j^*(x) / bE_{0y} \tag{4.7}$$

Здесь учтено, что для тонкого профиля нормальная к профилю составляющая поля $E_{0n} \approx E_{0y}$. При помощи (4.6) и (4.7) можно найти распределение q в потоке и из первых четырех уравнений (4.5) при соответствующих граничных условиях определить параметры возмущенного течения.

Возникающие при обтекании профиля ударные волны слабой интенсивности и волны разрежения будут согласно линейной теории направлены вдоль характеристик невозмущенного потока.

Легко видеть, что в электрогидродинамике при соответствующем наравлении внешнего электрического поля $((v_{0x} + bE_{0x}) / E_{0y} < 0)$ возмущения от профиля распространяются вверх не только по дозвуковому, но и по сверхзвуковому потоку. Это связано с тем, что при соответствующем распределении электрического потенциала ионы могут перемещаться вверх по сверхзвуковому потоку. Такое движение наблюдалось экспериментально [5]. Распространение возмущений вверх по сверхзвуковому потоку в магнитной гидродинамике обсуждалось в работах [6–8].

Авторы благодарят А. А. Бармина, А. Г. Куликовского, С. А. Регирера и И. С. Шикина за обсуждение работы.

Поступило 19 X 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Stuetzer O. M. Magnetohydrodynamics and electrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 5.
2. Carstoiu J. Fundamental equations of electromagnetodynamics of fluid: various consequences. Proc. Nat. Acad. Sci., 1968, vol. 59, No. 2.
3. Бальчитис А. А. О некоторых новых электрогидрогазодинамических явлениях, аналогичных известным явлениям магнитной гидродинамики. Магнитная гидродинамика, 1968, № 3.
4. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
5. Cahn M. S., Andrew G. M. Electroaerodynamics in supersonic flow. AIAA 6-th Aero/Space Sci. Meeting, N. Y., 1968.
6. Коган М. Н. Магнитогидродинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, № 1.
7. Коган М. Н. О распространении возмущений в плоских магнитогидродинамических течениях. ПММ, 1960, № 3.
8. Mc Cune J. E., Resler L. Compressibility effects in magneto-aerodynamics flow past thin bodies. J. Aeronaut Sci., 1960, vol. 27, No. 7.