

УДК 533.6.011.1 : 51

## АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО И ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА ПРИ ВНЕЗАПНОМ ВЫДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ

В. П. ШИДЛОВСКИЙ

(Москва)

Задача о симметричном движении, возникающем при внезапном выделении энергии в газообразной среде, эквивалентна задаче о взрыве. При этом тип симметрии зависит от размерности области выделения энергии (плоскость, линия или точка).

В предельном случае сильного взрыва, когда начальные значения давления и внутренней энергии газа равны нулю, эта задача была впервые решена Л. И. Седовым [1, 2] для невязкого и нетеплопроводного газа с использованием свойства автомодельности движения. Как показал позднее Г. М. Бам-Зеликович [3], предполагая наличие степенного закона зависимости вязкости от температуры со специальным значением показателя степени, можно получить автомодельное решение и для вязкого, теплопроводного газа. На основе этого результата в работах [4-6] и в книге [7] были построены решения задач о сильном взрыве в теплопроводном газе, не имеющем вязкости. В работе И. О. Бежаева [6] дан пример численного решения автомодельной задачи с одновременным учетом вязкости и теплопроводности.

Все цитированные решения относились к взрыву в среде с постоянной начальной плотностью. Как показано Л. И. Седовым [8], автомодельные движения могут быть получены и при начальном распределении плотности по степенному закону. Этот результат используется ниже для построения и исследования расширенного класса автомодельных движений вязкого и теплопроводного газа при внезапном выделении энергии в пространстве со степенным законом распределения начальной плотности. Для случая осесимметричного движения проведены численные расчеты, обеспечивающие заданную точность решения.

1. Пусть имеется неограниченный объем вязкого теплопроводного газа, начальная плотность которого распределена по закону

$$\rho_1 = Br^{-\omega} \quad (B, \omega = \text{const}) \quad (1.1)$$

где  $r$  — пространственная координата, индекс 1 здесь и в дальнейшем относится к параметрам начального состояния. Предполагается также, что начальные значения давления  $p$  и внутренней энергии газа  $\varepsilon$  равны нулю.

В начальный момент времени на поверхности (на линии, в точке)  $r = 0$  выделяется конечная энергия  $E_0$ , и задача состоит в определении поведения газа в любой последующий момент  $t > 0$ . Это поведение описывается уравнениями Навье — Стокса для одномерного неустановившегося движения, дополняемыми уравнением состояния и законом зависимости вязкости  $\mu$  от внутренней энергии  $\varepsilon$ . Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями и с постоянным числом Прандтля  $\sigma$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v-1}{r} v \right) &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v-1}{2} \frac{v}{r} \right) \right] + \\ &+ 2(v-1) \frac{\mu}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + r^{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^{\nu-1} v \left( \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + p \right) \right] = \\ & = \frac{\kappa}{\sigma} r^{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{\nu-1} \mu \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{4}{3} r^{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu v \frac{\partial}{\partial r} (r^{\nu-1} v) \right] - \\ & \quad - 2(\nu - 1) r^{1-\nu} \frac{\partial}{\partial r} (\mu v^2 r^{\nu-2}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$p = (\kappa - 1) \rho \varepsilon, \quad \mu = A \varepsilon^n \quad (A, n = \text{const})$$

Здесь  $v$  — скорость,  $\kappa$  — отношение удельных теплоемкостей; безразмерный параметр  $\nu$  характеризует тип симметрии и принимает значения 1, 2, 3 для случаев плоскостной, осевой и центральной симметрии соответственно.

Начальные и граничные условия для решения поставленной задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \rho = Br^{-\omega}, \quad p = \varepsilon = v = 0 \quad \text{при } t = 0 \text{ и при } t > 0, \quad r = r_f \\ v = \mu \delta \varepsilon / \partial r = 0 \quad \text{при } t > 0, \quad r = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Одно из условий (1.3) ставится на поверхности  $r = r_f$ , ограничивающей возмущенную область. Обычно в вязкой среде область распространения возмущений неограничена. Однако наличие в принятой модели степенной зависимости вязкости от температуры (при  $n > 0$ ) и равенство нулю температуры невозмущенного газа приводят к тому, что связанное с понижением температуры затухание возмущений влечет за собой и уменьшение вязкости. Поэтому вдали от источника возмущений вязкость практически отсутствует, что и позволяет ограничить длину интервала возмущений.

Итак, задача сводится к решению системы уравнений (1.2) с условиями (1.3). Кроме этих условий имеет место также интегральное условие сохранения энергии внутри области, ограниченной фронтом возмущений, а именно

$$E_0 = \xi_v \int_0^{r_f} (\varepsilon + v^2/2) \rho r^{\nu-1} dr, \quad \xi_v = 2(\nu - 1)\pi + (\nu - 2)(\nu - 3)/2 \quad (1.4)$$

В процессе решения задачи условие (1.4) может не приниматься во внимание в своей явной форме, однако его выполнение обеспечивается впоследствии с помощью специального приема (см. [8]).

Анализ размерностей определяющих параметров для случая, аналогичного рассматриваемому, проведен в [7]. Автомодельное решение возможно, если (квадратные скобки символизируют размерность заключенной в них величины)

$$[A] = [B]^{(1+2n)/2} [E_0]^{(1-2n)/2} \quad (1.5)$$

Условие автомодельности сводится при этом к выполнению соотношения

$$\omega = \frac{2n - 1}{2n + 1} (\nu - 1) + 1 \quad (1.6)$$

В частном случае  $\omega = 0$ , т. е.  $\rho_1 = \text{const}$ , из (1.6) нетрудно получить значения  $n$ , указанные в работе [3].

2. Исходя из предположения о выполнении условия (1.5), а следовательно, и (1.6), проведем преобразование уравнений (1.2). Введем безразмерные переменные согласно формулам

$$\eta = (B/E)^{k(1+2n)/2} r t^{-k(1+2n)} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} v &= (r/t) \eta^{-1} V(\eta) = (E/B)^{k(1+2n)/2} t^{-k(v-1)} V(\eta) \\ \rho &= Br^{-\omega} \eta^{\omega} R(\eta) = B(B/E)^{k[v(2n-1)+2]/2} t^{-k[v(2n-1)+2]} R(\eta) \\ p &= Br^{-\omega} (r/t)^2 \eta^{\omega-2} P(\eta) = B(E/B)^{k[4n-v(2n-1)]/2} t^{-k v(2n+1)} P(\eta) \\ \varepsilon &= (\kappa - 1)^{-1} (r/t)^2 \eta^{-2} N^{1/n}(\eta) = (\kappa - 1)^{-1} (E/B)^{k(1+2n)} t^{-2k(v-1)} N^{1/n}(\eta) \\ \mu &= A(\kappa - 1)^{-n} (r/t)^{2n} \eta^{-2n} N(\eta) = \chi B(E/B)^{k[4n-v(2n-1)]/2} t^{-2kn(v-1)} N(\eta) \\ &\quad (k = (v + 2n)^{-1}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величина  $E$ , фигурирующая в формулах (2.1) и (2.2), пропорциональна выделяемой энергии  $E_0$ . Коэффициент пропорциональности определяется после решения задачи путем вычисления полной энергии по формуле (1.4), преобразованной к новым переменным. Последняя из формул (2.2) содержит также безразмерный параметр  $\chi$ , характеризующий влияние вязкости. Более подробное обсуждение смысла этого параметра будет проведено позднее.

В новых переменных уравнения (1.2) принимают вид (штрих — производная по  $\eta$ )

$$\begin{aligned} &-(k/m) \eta^{2m(v-1)} (\eta^{m[v(2n-1)+2]} R)' + (\eta^{v-1} R V)' = 0 \\ &R [V V' - (k/m) \eta^{m[2(1+n)-v]} (\eta^{m(v-1)} V)'] + P' = \\ &= {}^4/3 \chi [N \eta^{(v-1)/2} (\eta^{-(v-1)/2} V)']' + 2\chi(v-1) N (\eta^{-1} V)' \\ &\quad - k/m \left[ \eta^v R \left( \frac{1}{\kappa-1} N^{1/n} + {}^1/2 V^2 \right) \right]' + \\ &+ \left[ \eta^{v-1} V R \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} N^{1/n} + \frac{1}{2} V^2 \right) \right]' = \frac{\kappa}{\sigma(\kappa-1)n} \chi (\eta^{v-1} N^{1/n} N)' + \\ &\quad + {}^4/3 \chi [N V (\eta^{v-1} V)']' - 2\chi(v-1) (\eta^{v-2} N V^2)' \\ &\quad P = R N^{1/n} \\ &\quad (k = (v + 2n)^{-1}, m = (1 + 2n)^{-1}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Как видно из третьего уравнения, при любых  $n$  и  $v$  существует первый интеграл системы — интеграл энергии.

Вследствие автомодельности радиус фронта возмущений  $r_f$  должен изменяться во времени таким образом, чтобы соответствующее значение  $\eta_f$  оставалось постоянным. Полагая  $\eta_f = 1$ , получим из формулы (2.1) уравнение движения фронта

$$r_f = (E/B)^{k(1+2n)/2} t^{k(1+2n)} \quad (2.4)$$

Граничные условия для системы уравнений (2.3) получим из условий (1.3)

$$V(0) = N^{1/n}(0) N'(0) = 0, \quad V(1) = N(1) = 0, \quad R(1) = 1 \quad (2.5)$$

Таким образом, приходим к необходимости решения нелинейной двухточечной краевой задачи.

3. Проведем исследование асимптотического поведения искомых функций в окрестности фронта возмущений, т. е. при  $\eta \rightarrow 1$ , и в окрестности

нулевой точки (центра). Напомним, что в силу постановки задачи рассматриваются только движения газов, имеющих  $n > 0$ . В случае задачи с плоскостной симметрией ( $\nu = 1$ ) при всех  $n \neq -1/2$  условие автомодельности (1.6) дает  $\omega = 1$ ; но при  $\omega = 1$  начальная масса газа между плоскостями  $r = 0$  и  $r = r_k$  ( $r_k$  — произвольное конечное значение) бесконечно велика, так что ситуация становится физически бессмысленной и случай  $\nu = 1$  следует исключить из рассмотрения.

Интегрируя третье уравнение системы (2.3), получим

$$\begin{aligned} \eta^{\nu-1} VR \left( \frac{\kappa}{\kappa-1} N^{1/n} + \frac{1}{2} V^2 \right) - \frac{k}{m} \eta^\nu R \left( \frac{1}{\kappa-1} N^{1/n} + \frac{1}{2} V^2 \right) = \\ = \frac{\kappa}{(\kappa-1)\sigma n} \chi \eta^{\nu-1} N^{1/n} N' + \frac{4}{3} \chi NV (\eta^{\nu-1} V)' - 2\chi(\nu-1) \eta^{\nu-2} NV^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Постоянная интегрирования в уравнении (3.1) приравнена нулю на основании условий в центре взрыва. Граничное условие для  $N^{1/n}(0)N'(0)$  выполняется автоматически, если функция  $V(\eta)$  вблизи центра возрастает быстрее, чем  $\eta^{1/2}$ .

Анализируя поведение искомых функций в окрестности точки  $\eta = 1$ , будем исходить из предположения о том, что функции могут аппроксимироваться асимптотическими разложениями степенного типа

$$V = A_\nu z^\alpha + \dots, \quad N = A_N z^\beta + \dots, \quad R = 1 + A_R z^\gamma + \dots \quad (z = 1 - \eta) \quad (3.2)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, A_\nu, A_N$  — положительные действительные константы,  $A_R$  — действительная константа.

Подстановка разложений (3.2) в уравнения (2.3) с уравнением энергии в форме (3.1) позволяет определить или найти ограничительные условия для определения перечисленных выше констант. Следует иметь в виду, что влияние вязкости и теплопроводности должно быть учтено уже в главных членах разложений (3.2), так как в противном случае пришлось бы допустить сильный разрыв на фронте возмущений. Из рассмотрения необходимо исключить все варианты, противоречащие как исходным допущениям, так и предположениям, вводимым в ходе анализа. Наконец, одна из перечисленных констант должна оставаться произвольной — ею нужно распорядиться так, чтобы удовлетворить условию на другом конце интервала при  $\eta = 0$ .

С учетом сделанных замечаний нетрудно установить следующее распределение констант:

$$\begin{aligned} \beta = 1, \quad (2n)^{-1} < \alpha < n^{-1}, \quad \alpha = 3\kappa(4\sigma n)^{-1} \\ \gamma = 1 \quad (n < 1), \quad \gamma = \alpha \quad (n \geq 1) \\ A_N = 3(4\alpha\chi)^{-1}k/m, \quad A_R = m[\nu(2n-1) + 2] \quad (n < 1) \quad (3.3) \\ A_R = A_\nu m/k \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Постоянный коэффициент  $A_\nu$  остается неопределенным и при численном решении задачи варьируется с целью удовлетворения граничному условию в центре.

Как видно из (3.3), возможность применения асимптотических разложений (3.2) связана с некоторым ограничением, касающимся физических характеристик газа, а именно

$$1/2 < 3\kappa(4\sigma)^{-1} < 1 \quad (3.4)$$

Вообще говоря, ограничение (3.4) является довольно существенным. Например, полагая  $\sigma = 1$ , в силу (3.4) приходим к необходимости выполнения неравенства  $\kappa < 4/3$ , а при  $\sigma < 1$  верхний предел возможного значения  $\kappa$  будет еще ниже. Нужно учесть, однако, что при взрыве большая часть возмущенной области имеет весьма высокую температуру, и, следовательно, можно считать величину  $\kappa$  лежащей в интервале

$$1.2 \leq \kappa \leq 1.3$$

Из формул (3.2) и (3.3) видно также, что фронт возмущений является поверхностью слабого разрыва безразмерных эквивалентов основных физических переменных. При этом разрыв оказывается тем слабее, чем меньше значение показателя степени  $n$ . Например, при  $n < 1$  производная функция  $N(\eta)$  вообще не терпит разрыва, тогда как производные функций  $V(\eta)$  и  $R(\eta)$  получают конечные приращения; если же  $n \geq 1$ , то положение остается прежним только для  $V(\eta)$ , а производные функций  $N(\eta)$  и  $R(\eta)$  испытывают бесконечно большие приращения в точке  $\eta = 1$ .

Для построения разложений, пригодных в окрестности точки  $\eta = 0$ , нужно в дополнение к имеющемуся условию  $V(0) = 0$  ввести предположение о конечности значений  $R_0 \equiv R(0)$  и  $N_0 \equiv N(0)$ . Тогда из дифференциальных уравнений получается

$$V = a_v \eta + b_v \eta^3 + \dots, \quad R = R_0 + b_R \eta^2 + \dots, \quad N = N_0 + b_N \eta^2 + \dots \quad (3.5)$$

Коэффициент  $a_v$  находится немедленно

$$a_v = \frac{v(2n-1)+2}{v(v+2n)} \quad (3.6)$$

после чего коэффициенты  $b_v$ ,  $b_R$  и  $b_N$  достаточно просто выражаются через  $R_0$  и  $N_0$ . Нетрудно убедиться, что при любом конечном положительном  $n$  и при всех  $v \neq 1$  получается  $a_v < 1$ .

4. Проведем численное решение для случая осесимметричного движения с вязкостью, пропорциональной квадратному корню из температуры. Для этого во всех предыдущих формулах и уравнениях следует положить  $n = 1/2$ ,  $v = 2$ . В частности, формула (1.6) дает при этом  $\omega = 1$ .

Учитывая условие (3.4), положим  $\kappa = 1.23$ ,  $\sigma = 1$ ; тогда согласно (3.3)  $\alpha = 1.845$ .

С учетом характера краевой задачи, численное интегрирование системы уравнений (2.3) проводилось, начиная от точки, близкой к  $\eta = 1$ , по направлению к центру. В качестве начальной выбиралась точка  $z_0 \equiv 1 - \eta_0 = 10^{-8}$ , где значения  $V$ ,  $V'$ ,  $N$  и  $R$  вычислялись по асимптотическим формулам (3.2) с сохранением одних лишь главных членов. С помощью (3.3) определяются все нужные константы, за исключением коэффициента  $A_v$ , начальное значение которого приходилось задавать, используя грубую приближенную оценку.

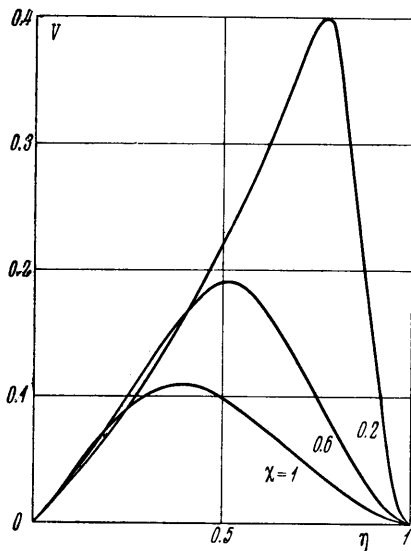
В процессе интегрирования методом Рунге — Кутты отрицательный шаг постепенно менялся по абсолютной величине от значения  $10^{-8}$  на начальном участке до  $10^{-4}$  на большей части интервала. По мере приближения к нулевой точке необходимо было проверить, обеспечивается ли нужное асимптотическое поведение искомых функций, в первую очередь  $V(\eta)$  (см. формулы (3.5)). В точке  $\eta = 0$  решение имеет особенность типа седла, а искомая интегральная кривая  $V(\eta)$  является сепаратрисой, отделяющей семейство интегральных кривых с производной  $V'(0) = -\infty$  (верхнее семейство) от семейства с  $V'(0) = +\infty$  (нижнее семейство). Попасть на эту сепаратрису путем варьирования величины  $A_v$  практически невозможно, поэтому применялся следующий прием. Процесс численного интегрирования заканчивался в точке  $\eta_k$ , достаточно близкой к нулю (обычно  $\eta_k = 10^{-3}$ ), где главные члены асимптотических разложений (3.5) должны давать приемлемую точность. Если в эту точку приходят две кривые, одна из которых принадлежит верхнему семейству ( $V'(\eta_k) < 1/3$ ), а другая — нижнему ( $V'(\eta_k) > 1/3$ ), причем соответствующие значения  $V(\eta_k)$  достаточно мало отличаются друг от друга, то задачу можно считать решенной, так как продолжение решения до центра обеспечивается формулами (3.5) с заданной степенью точности.

Помимо ошибки, обусловленной необходимостью попадания в особую точку при  $\eta = 0$ , решение содержит также систематическую ошибку, связанную с самим процессом численного интегрирования. Счет с удвоенным шагом давал результаты, совпадающие с первоначальными с точностью до четырех значащих цифр. В этих же пределах была и степень точности выполнения условия в центре, так что можно

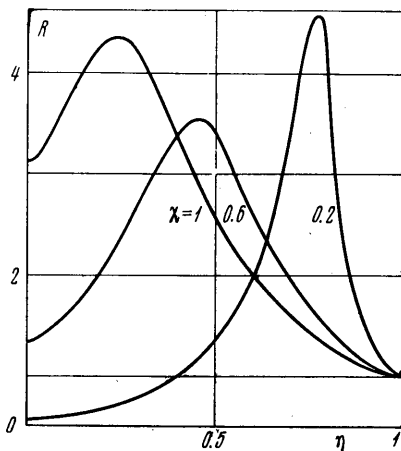
считать, что ошибка окончательных результатов также проявляется лишь в пятой значащей цифре; исключение составляет ошибка для функции  $V(\eta)$ , где можно говорить лишь об абсолютном отклонении от нуля (порядка  $10^{-5}$ ).

Полученные результаты представлены в виде графиков изменения безразмерных величин скорости, плотности, давления и температуры в зависимости от переменной  $\eta$  (соответственно фиг. 1—4). Последнюю с учетом принятой нормировки удобно представить в виде  $\eta = r/r_f$ .

Графики даны для трех значений параметра  $\chi$ , характеризующего одновременно влияние вязкости и теплопроводности. Можно видеть, что при



Фиг. 1



Фиг. 2

сравнительно малом значении  $\chi = 0.2$  получается картина, очень похожая на картину течения с несколько размытой ударной волной. Исключение составляет кривая изменения температуры, монотонно уменьшающейся от некоторого конечного значения в центре до нуля на фронте возмущения. С увеличением  $\chi$  точки максимума скорости, давления и плотности сдвигаются к центру. Максимальные значения скорости, давления и температуры тем меньше, чем больше  $\chi$ ; максимальная плотность меняется немонотонно. Отметим также, что при  $\chi = 0.2$  плотность газа в центре меньше, чем на фронте возмущения, тогда как при двух других заданных значениях  $\chi$  имеет место обратное.

Известный интерес представляет сравнение с предельным случаем  $\chi = 0$ , когда фронт возмущения превращается в ударную волну. Методика решения задачи в этом случае принципиально иная (см. [8]) и решение здесь не проводилось. Однако не представляет труда получение значений  $V_2$ ,  $R_2$ ,  $P_2$  и  $N_2^2$  непосредственно за ударной волной, если только предположить, что ударному фронту соответствует то же самое значение  $\eta = 1$

$$V_2 = \frac{4}{3}(\chi + 1)^{-1} = 0.5979, \quad R_2 = (\chi + 1)(\chi - 1)^{-1} = 9.696$$

$$P_2 = \frac{8}{9}(\chi + 1)^{-1} = 0.3986, \quad N_2^2 = \frac{8}{9}(\chi - 1)(\chi + 1)^{-2} = 0.04111$$

5. Безразмерный параметр  $\chi$  характеризует влияние вязкости и теплопроводности. При  $n = 1/2$  может быть дана и более четкая интерпретация смысла этого параметра. Согласно определению в этом случае

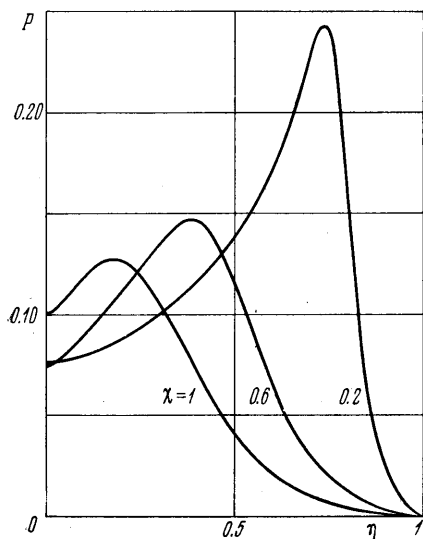
$$\chi = A / (B\sqrt{\kappa - 1}) \quad (5.4)$$

Подставляя значение  $A$  из формулы  $\mu = A\sqrt{\varepsilon}$  и  $B$  из формулы (4.1), получим

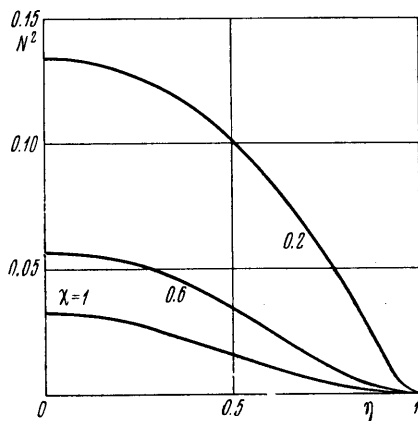
$$\chi = \mu(\rho_1 r \sqrt{(\kappa - 1)\varepsilon})^{-1} \quad (5.2)$$

Если же сделать дополнительное предположение о том, что в некоторой точке внутри возмущенной области ( $r_* \approx r_f/2$ ) имеет место соотношение  $\rho_* \approx \rho_1$ , то из определения средней длины свободного пробега  $l$  следует, что

$$\chi = Kl_* / r_*, \quad K = O(1) \quad (5.3)$$



Фиг. 3



Фиг. 4

Это означает, в свою очередь, что параметр  $\chi$  не будет пренебрежимо малым лишь в таких условиях, когда внутри возмущенной области проявляется молекулярная структура газа или, иначе говоря, когда взрыв происходит в достаточно разреженной среде. Интерпретация смысла параметра  $\chi$  при других значениях  $n$  более сложна, так как вместо (5.1) получим

$$\chi = (\kappa - 1)^{-n} (A/B) (E/B)^{(2n-1)/2} \quad (5.4)$$

и, таким образом, величина  $\chi$  должна быть связана не только с разреженностью среды, но и с интенсивностью взрыва.

Возвращаясь к случаю  $n = 1/2$  и к полученным численным результатам, можно отметить, что большинство из них дают представление о структуре нестационарной ударной волны. Как уже говорилось, из общего стиля несколько выпадают профили распределения температуры в возмущенной области, но они связаны в первую очередь не с вязкостью, а с влиянием теплопередачи за счет молекулярной теплопроводности.

Поступило 22 VII 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
2. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
3. Бам-Зеликович Г. М. К распространению сильных взрывных волн. Сб. статей «Теоретическая гидромеханика», № 4, М., Оборонгиз, 1949.
4. Коробейников В. П. О распространении сильной сферической волны в теплопроводном газе. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 5.
5. Неуважаев В. Е. Распространение сферической взрывной волны в теплопроводном газе. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
6. Бежаев И. О. О влиянии вязкости и теплопроводности газа на распространение сильного взрыва. Сб. статей «Теоретическая гидродинамика», № 11, М., Оборонгиз, 1953.
7. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
8. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике, Изд. 6. М., «Наука», 1967.