

УДК 532.5.013.4

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО СЛОЯ

Н. Г. КИКИНА, Д. Г. САННИКОВ

(Москва)

Исследуются бесконечно малые возмущения движущегося плоскопараллельного слоя. Показано, что слой в отличие от одиночного тангенциального разрыва неустойчив при любых значениях проекции скорости слоя на волновой вектор возмущения.

Неустойчивость одиночного тангенциального разрыва исследовалась подробно и неоднократно (см., например, [1-4]). Неустойчивость движущегося слоя почти не анализировалась. Представляет интерес провести такой анализ, тем более, что результаты для слоя качественно отличаются от результатов для одиночного тангенциального разрыва.

Будем искать возмущения исходного движения плоскопараллельного слоя в виде плоских монохроматических волн

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= A_1 \exp(-i\omega t + ikx + ik_1 z) \\ \Phi_2 &= [A_2 \exp(ik_2 z) + A_2' \exp(-ik_2 z)] \exp(-i\omega t + ikx) \\ \Phi_3 &= A_3 \exp(-i\omega t + ikx + ik_3 z)\end{aligned}\quad (1)$$

где Φ_n — потенциалы скоростей возмущения в покоящихся средах 1 ($z < 0$), 3 ($z > h$) и в движущейся среде 2 ($0 < z < h$). Для простоты все среды считаем одинаковыми. Проекцию вектора скорости слоя на плоскость xz обозначим через u . Введем безразмерные переменные

$$\beta = u/c, \quad \omega^* = \omega/kc, \quad k_{1,2,3}^* = k_{1,2,3}/k \quad (2)$$

Величину k всюду в дальнейшем полагаем действительной.

Из волнового уравнения для трех сред получим дисперсионные уравнения

$$\omega^{*2} = 1 + k_1^{*2}, \quad (\omega^* - \beta)^2 = 1 + k_2^{*2}, \quad \omega^{*2} = 1 + k_3^{*2} \quad (3)$$

Из (3) следует, в частности, что $k_3 = \pm k_1$, и, следовательно, возможны два разных случая. Рассмотрим сначала случай

$$k_3 = k_1 \quad (4)$$

Из граничных условий получим дисперсионное уравнение

$$Z = 1, \quad Z = \frac{k_2}{k_1} \frac{\omega^{*2}}{(\omega^* - \beta)^2} \quad (5)$$

и соотношения между амплитудами

$$A_2/A_1 = \omega^*(\omega^* - \beta)^{-1}, \quad A_2' = 0, \quad A_3/A_1 = \exp[i(k_2 - k_1)h] \quad (6)$$

Подчеркнем, что уравнение (5) совпадает с дисперсионным уравнением для одиночного тангенциального разрыва между средами 1 и 2. Система уравнений (5), (3) имеет шесть решений для ω (подробнее см. [3-5]). Три из них

$$\omega = ck_1 = ck_2, \quad k = 0; \quad 2\omega^* = \beta \pm (\beta^2 + 4 + 4\sqrt{\beta^2 + 1})^{1/2} \quad (7)$$

представляют собой волны, проходящие под определенными углами без отражения через слой из среды 1 в среду 3 (или аналогично из 3 в 1). Эти волны существуют при любых значениях β .

Три других решения

$$2\omega^* = \beta, \quad 2\omega^* = \beta \pm (\beta^2 + 4 - 4\sqrt{\beta^2 + 1})^{1/2} \quad (8)$$

формально также представляют собой волны, проходящие без отражения через слой из среды 1 в среду 3 (или аналогично из 3 в 1). Однако в отличие от решений (7) решения (8) существуют не во всем интервале значений β , а только при $\beta > \beta_c$. Для первого из решений (8) $\beta_c = 2$, для второго и третьего $\beta_c = 2\sqrt{2}$. При значениях β , меньших критических, k_1 и k_3 становятся комплексными и либо при $z = \infty$, либо при $z = -\infty$ амплитуды возмущений экспоненциально нарастают, и, следовательно, эти решения нефизические. Кроме того, решения (8) отличаются существенно от решений (7) тем, что в слое проекции на ось z групповой и фазовой скоростей волн (8) противоположны по знаку [4]. Это означает (поскольку k_2 одного знака с k_1 (5)), что один из тангенциальных разрывов излучает волну, а другой поглощает точно такую же волну. (О волнах, излучаемых и поглощаемых одиночным тангенциальным разрывом см. [4, 6]). Происходит как бы переизлучение волн в движущемся слое. Вне слоя решения (8) не отличаются от решений (7).

Помимо уравнения (5) в случае (4) возможно также дисперсионное уравнение

$$\exp(-2ik_2h) = 1 \quad (9)$$

Соотношения между амплитудами при этом имеют вид

$$A_2/A_1 = 1/2(1 + Z^{-1})\omega^*(\omega^* - \beta)^{-1}, \quad A_2'/A_1 = 1/2(1 - Z^{-1})\omega^*(\omega^* - \beta)^{-1} \quad (10)$$

$$A_3/A_1 = \exp[i(k_2 - k_1)h]$$

Случай (9), (10) соответствует волнам, проходящим через слой без отражения из-за того, что отраженные от двух тангенциальных разрывов волны взаимно гасят друг друга в первой среде. Подробнее на этом здесь останавливаться не будем (см. [5]).

Рассмотрим теперь случай

$$k_3 = -k_1 \quad (11)$$

Из граничных условий получим дисперсионное уравнение

$$(1 + Z)(1 - Z)^{-1} = \mp \exp(-ik_2h) \quad (12)$$

и соотношения между амплитудами

$$\begin{aligned} A_2/A_1 &= 1/2(1 + Z^{-1})\omega^*(\omega^* - \beta)^{-1} \\ A_2'/A_1 &= 1/2(1 - Z^{-1})\omega^*(\omega^* - \beta)^{-1} \\ A_3/A_1 &= \pm \exp(ik_1h) \end{aligned} \quad (13)$$

Как нетрудно видеть, одно из решений (12), (13) (верхний знак) симметрично по z относительно слоя, а другое (нижний знак) — антисимметрично.

Уравнение (12) совместно с (3) допускает два разных типа решений. Одни решения имеют действительные значения ω , k_2 и чисто мнимые значения k_1, k_3 (может быть также $k_1 = k_3 = 0$). Эти решения соответствуют волнам, испытывающим полное внутреннее отражение в слое. Подробнее на них здесь останавливаться не будем.

Другие решения уравнений (12), (3) имеют комплексные значения ω, k_2, k_1, k_3 . Эти решения соответствуют неустойчивым обобщенно-поверхностным волнам. Одна из волн (с $\text{Im } \omega > 0$) экспоненциально нарастает во времени. Она определяет неустойчивость движущегося слоя. В отличие от одиночного тангенциального разрыва [2] слой неустойчив, т. е. рассматриваемые комплексные решения существуют, при любых значениях β .

Других решений вида (1) с действительными значениями k в случае (11) не существует. Не будет, в частности, решений с действительными значениями ω, k_1, k_3 , которые соответствовали бы волнам, излучаемым или поглощаемым движущимся слоем.

Исследование неустойчивых решений для слоя в общем случае затруднительно. Представляет интерес рассмотреть предельные случаи толстого слоя, или малых длин волн ($kh \gg 1$), и тонкого слоя, или больших длин волн ($kh \ll 1$).

В случае толстого слоя, или малых длин волн ($kh \gg 1$), решения дисперсионных уравнений (12) и (3) для ω, k_2, k_1, k_3 экспоненциально слабо отличаются (на величину $\sim \exp(-kh)$) от неустойчивых решений (8) для одиночного тангенциального разрыва. Однако это отличие существенно при значениях $\beta > \beta_c = 2\sqrt{2}$, когда для одиночного тангенциального разрыва $\text{Im } \omega$ строго равно нулю. Теперь в случае слоя при $\beta > \beta_c$ возмущение неустойчиво, хотя и очень слабо ($\text{Im } \omega \sim \exp(-kh)$).

Остановимся подробнее на анализе случая тонкого слоя, или больших длин волн ($kh \ll 1$). Решения системы уравнений (12), (13) будем искать в виде рядов по возрастающим степеням (полуцелым) малой величины $kh/2 \equiv \alpha$.

$$\begin{aligned} \omega^* &= B_0 + B_1\sqrt{\alpha} + B_2\alpha + \dots \\ k_1^* &= C_0 + C_1\sqrt{\alpha} + C_2\alpha + \dots \\ k_2^* &= D_0 + D_1\sqrt{\alpha} + D_2\alpha + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

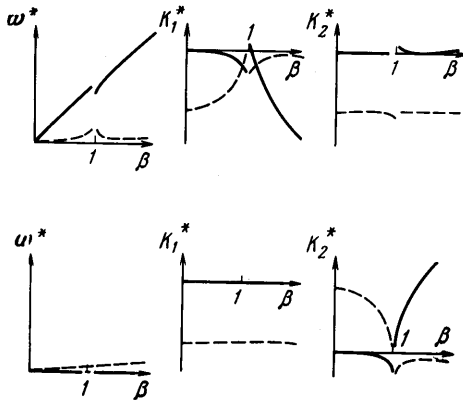
Результаты можно представить для симметричного решения в виде

$$\begin{aligned} B_0 &= \beta, \quad B_1 = (-1 + i)\beta(2\gamma)^{-1/2}, \quad C_0 = -\gamma, \quad C_1 = (1 - i)\beta^2(2\gamma^3)^{-1/2} \\ D_0 &= -i, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = \beta^2(2\gamma)^{-1}. \quad \gamma \equiv \sqrt{\beta^2 - 1} \end{aligned} \quad (15)$$

и для антисимметричного решения в виде

$$\begin{aligned} B_0 = 0, \quad B_1 = i\beta, \quad C_0 = -i, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = -i\beta^2/2 \\ D_0 = \gamma, \quad D_1 = -i\beta^2\gamma^{-1}, \quad \gamma \equiv \sqrt{\beta^2 - 1} \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь приводятся только решения физические с $\text{Im } k_1 < 0$ и только



ростающие во времени с $\text{Im } \omega > 0$. Как видно из (15), (16), некоторые коэффициенты при значении $\beta = 1$ обращаются в бесконечность и, следовательно, разложение (14) в непосредственной окрестности $\beta = 1$ несправедливо. Если исключить эту окрестность, то при любых β решения (14) — (16) оказываются неустойчивыми и $\text{Im } \omega \sim \gamma kh$. Решения (14) — (16) схематически изображены на фигуре. Сплошные линии представляют собой действительные значения величин, пунктирные — мнимые.

Проведенное рассмотрение приводит, таким образом, к следующим результатам. В отличие от одиночного тангенциального разрыва плоскопараллельный движущийся слой неустойчив при любых значениях β . Волн, излучаемых или поглощаемых слоем, не существует. Волны, которые излучаются и поглощаются одиночным тангенциальным разрывом, в случае слоя объединяются так, что происходит как бы переизлучение от одного тангенциального разрыва к другому. Вне слоя эти волны формально не отличаются от волн, прошедших через слой без отражения.

Авторы благодарны К. А. Наугольных за советы и обсуждение результатов работы.

Поступило 9 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Об устойчивости тангенциальных разрывов в сжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 4, стр. 151—153.
2. Сыроватский С. И. Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде. ЖЭТФ, 1954, т. 27, вып. 1, стр. 121—123.
3. Кикина Н. Г., Санников Д. Г. О неустойчивости плоского тангенциального разрыва. Ж. прикл. матем. и механ., 1969, т. 33, вып. 3, стр. 580—581.
4. Кикина Н. Г., Санников Д. Г. О неустойчивости тангенциального разрыва в сжимаемой среде. Акуст. ж., 1971, т. 17, вып. 4.
5. Кикина Н. Г., Санников Д. Г. Отражение звуковых волн от движущегося плоскопараллельного слоя. Акуст. ж., 1969, т. 15, вып. 4, стр. 543—546.
6. Ribner H. S. Reflection, transmission, and amplification of sound by a moving medium. J. Acoust. Soc. America, 1957, vol. 29, No. 4, pp. 435—441.