

УДК 533.011.35

**ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ КРЫЛЬЕВ С МАХОВСКОЙ СИСТЕМОЙ УДАРНЫХ ВОЛН**

А. Л. ГОНОР, Н. А. ОСТАПЕНКО

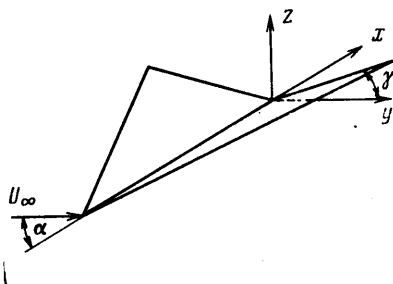
(Москва)

Предлагается метод расчета гиперзвукового обтекания V-образного крыла с конфигурацией скачков маховского типа, основанный на использовании теории двух приближений, которая развита в работах [1, 2].

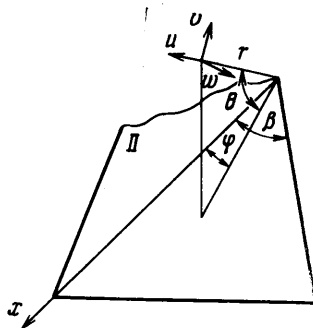
**1. Постановка задачи и основные уравнения.** Рассмотрим симметричное обтекание V-образного крыла (фиг. 1) под углом атаки  $\alpha$ . В системе координат, связанной с одной из граней крыла (фиг. 2), система уравнений конического течения запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 - w^2 &= 0, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) &= 0 \\ \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + uv + w^2 \operatorname{tg} \theta &= - \frac{1}{\rho \theta_\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} &= C, & w \theta_\varphi &= v \cos \theta \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln(\rho w \theta_\varphi) + 2 \frac{u}{w} \cos \theta &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь переменные безразмерные и отнесены соответственно к скорости набегающего потока  $U_\infty$ , скоростному напору  $\rho_\infty U_\infty^2$  и плотности  $\rho_\infty$ . Уравнения записаны в переменных  $(\psi, \varphi)$  причем переменная  $\psi$  удовлетворяет



Фиг. 1



Фиг. 2

соотношению  $v\psi_\theta + w\psi_\varphi \sec \theta = 0$  и является поверхностью тока в коническом течении [1]. Предполагая, что область возмущенного течения газа — тонкий сильно сжатый слой, произведем преобразование переменных

$$\theta = \varepsilon \bar{\theta}, \quad v = \varepsilon \bar{v}; \quad \rho = \varepsilon^{-1} \bar{\rho}$$

где  $\varepsilon$  есть малый параметр, представляющий собой отношение плотности в характерной точке за ударной волной к плотности набегающего потока при  $M_\infty = \infty$  (для совершенного газа  $\varepsilon = (k - 1) / (k + 1)$ ,  $k$  — показатель адиабаты). Вводя в уравнения (1.1) новые переменные (черта ниже опущена) и отбрасывая члены, порядок которых заведомо выше первого, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = w, \quad \varepsilon \left( w \frac{\partial v}{\partial \varphi} + uv + w^2 \theta \right) = - \frac{1}{\rho \theta_\varphi} \frac{\partial p}{\partial \psi}, \quad u^2 + w^2 = \Delta^2(\psi)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \ln(\rho w \theta_\varphi) + 2 \frac{u}{w} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) = 0, \quad w \theta_\varphi = v \quad (1.2)$$

Условия на головной ударной волне  $\theta = \theta^*(\varphi)$  (I на фиг. 3) в этом же приближении имеют вид

$$u^* = \cos \alpha [\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \sin \varphi - \varepsilon \theta^* \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi]$$

$$v^* = -\theta_\varphi^* [\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \sin \gamma \cos \varphi] - (1 + m_0) \sin \alpha \cos \gamma +$$

$$+ \varepsilon (1 + m_0) \cos \alpha [\theta_\varphi^* \sin \varphi - \theta^* \cos \varphi] +$$

$$+ \varepsilon (1 + m_0) \sin \alpha \cos \gamma [\theta^* \sin \varphi + \theta_\varphi^* \cos \varphi] - \varepsilon \theta_\varphi^{*2} \sin \alpha \cos \gamma \quad (1.3)$$

$$w^* = -\cos \alpha [\sin \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \cos \varphi + \varepsilon \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma \theta_\varphi^*]$$

$$p^* = \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma + \varepsilon p_1^*$$

$$p_1^* = \sin 2\alpha \cos \gamma [\theta^* \cos \varphi - \theta_\varphi^* \sin \varphi] -$$

$$- \sin^2 \alpha \sin 2\gamma [\theta^* \sin \varphi + \theta_\varphi^* \cos \varphi] - \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma - M_\infty^{-2}$$

$$\rho^* = (1 + m_0)^{-1}, \quad m_0 = \varepsilon^{-1} (1 - \varepsilon) \operatorname{csc}^2 \alpha \operatorname{sc}^2 \gamma M_\infty^{-2}$$

смысл угла  $\gamma$  ясен на фиг. 1.

Чтобы поперечная скорость  $\varepsilon v^*$  за ударной волной имела величину порядка  $\varepsilon$ , наклон ударной волны не должен превышать величины порядка

$$\varepsilon^{1/2+n} \quad (n > 0)$$

Это накладывает ограничение на пределы возможного изменения угла  $\gamma$ , а именно должно быть  $\gamma \sim \varepsilon^{1/2+n}$ , так как в возмущенной области в окрестности плоскости симметрии наклон волны  $\varepsilon \theta_\varphi^* \sim \gamma$ .

Граничное условие на поверхности крыла в случае плоских граней<sup>1</sup> запишется в виде  $v = 0$ .

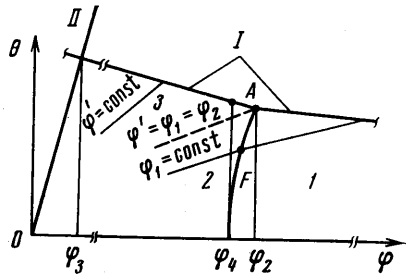
Согласно второму уравнению системы (1.2) давление удобно представлять в форме

$$p = p^*(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon p_2(\varphi, \psi, \varepsilon) \quad (1.4)$$

Здесь главный член в силу (1.3) — постоянная величина.

**2. Решение краевой задачи.** Введем новые переменные  $\Delta(\psi)$  и  $\tau(\varphi, \psi)$  по формулам

$$u = \Delta \cos \tau, \quad w = \Delta \sin \tau \quad (2.1)$$



Фиг. 3

<sup>1</sup> Рассуждения не изменятся, если ввести малое отличие формы крыла от плоскости, как это было сделано в работах [1, 2].

Тогда, используя первое и третье уравнения системы (1.2) и условия (1.3), найдем, что

$$\Delta^2(\varphi') = \cos^2 \alpha [1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \gamma + 2\varepsilon \operatorname{tg} \alpha \cos \gamma (\theta_{\varphi}^{*'} \sin \varphi' - \theta^{*'} \cos \varphi')] + \varepsilon \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \gamma (\theta_{\varphi}^{*'} \cos \varphi' - \theta^{*'} \sin \varphi') \quad (2.2)$$

$$\tau = -[\varphi + f(\varphi')], \quad f(\varphi') = a_1 + \varepsilon b_1(\varphi')$$

$$a_1 = \operatorname{arc} \sin \frac{\operatorname{tg} \alpha \sin \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \gamma}}$$

$$b_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \gamma} [(\theta_{\varphi}^{*'} \cos \varphi' + \theta^{*'} \sin \varphi') - \sin \gamma \operatorname{tg} \alpha (\theta_{\varphi}^{*'} \sin \varphi' - \theta^{*'} \cos \varphi')]$$

Штрихи означают, что соответствующие величины вычислены в точке пересечения ударной волны с линией тока  $\varphi' = \operatorname{const}$ . (Здесь и ниже везде полагается  $\psi \equiv \varphi'$  и в указанной точке  $\varphi' = \varphi$ .) Выписанные формулы справедливы для всех линий тока, прошедших через головную ударную волну. В области 1 (фиг. 3) имеется однородный поток за плоской волной, присоединенной к передней кромке. Решение для него в выбранных переменных определяется следующими соотношениями:

$$\Delta_1^2 = K^2(1 - 2a_2L), \quad f_1(\varphi') \equiv \sigma = a_1 + Ma_2$$

$$p_1^* = \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma (1 + 2a_2N - \varepsilon) - \varepsilon M_{\infty}^{-2}$$

$$\rho_1^* = (1 + m_0)^{-1}$$

$$\theta_1 = (1 + m_0) \frac{\sin \alpha \cos \gamma R_1}{\Delta_1} \frac{\sin(\varphi + \sigma) \sin(\beta - \varphi')}{\sin(\beta + \sigma) \sin(\varphi' + \sigma)}$$

$$v_1 = -(1 + m_0) \sin \alpha \cos \gamma R_1 \frac{\sin 2(\varphi + \sigma) \sin(\beta - \varphi')}{2 \sin(\beta + \sigma) \sin(\varphi' + \sigma)} \equiv -u_1 \theta_1$$

$$K^2 = \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \gamma)$$

$$a_2 = \delta \frac{1 + \delta(N + L)K^{-1} \sin^{-1}(\beta + a_1)}{K \sin[\beta + a_1 + M\delta(K^{-1} \sin^{-1}(\beta + a_1))]}$$

$$N = \sin \beta + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \cos \beta$$

$$L = \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \gamma (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \gamma)^{-1} N$$

$$R_1 = 1 + a_2N, \quad M = (\operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \sin \beta - \cos \beta) L / N$$

$$\delta = \varepsilon(1 + m_0) \cos \alpha$$

Проведем теперь анализ взаимодействия падающего с передней кромки плоского скачка с плоскостью симметрии течения. Расчет поперечного потока за плоской ударной волной для больших чисел Маха ( $M_{\infty} = \infty$ ) приводит к следующему выводу.

При малых значениях  $\varepsilon$  обтекание V-образного крыла с регулярным отражением от плоскости симметрии возможно только при условии  $\operatorname{tg} \gamma > \sqrt{\varepsilon}$ .

С другой стороны, как было указано выше,  $\gamma \lesssim \sqrt{\varepsilon}$ . Таким образом, в диапазоне больших углов раскрытия крыла следует ожидать режим обтекания с маховским отражением ударной волны.

Введем внутренний скачок  $\theta = F(\varphi)$ . Граничные условия для области 2 (фиг. 3), ограниченной контактными разрывом (штриховая линия) и ударной волной  $F$ , на разрыве  $F$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} v_2^* &= -\Delta_1 \varepsilon^{-1} \{ \sin(\varphi + \sigma) F_\varphi (1 - \varepsilon) (1 - M_{1n}^{-2}) + \\ &+ \cos(\varphi + \sigma) F [1 - (1 - \varepsilon) (1 - M_{1n}^{-2}) + F_\varphi^2] \} (1 + F^2 + F_\varphi^2)^{-1} \\ w_2^* &= -\Delta_1 \{ \sin(\varphi + \sigma) (1 + F_\varphi^2 [1 - (1 - \varepsilon) (1 - M_{1n}^{-2})]) + \\ &+ F F_\varphi \cos(\varphi + \sigma) (1 - \varepsilon) (1 - M_{1n}^{-2}) \} (1 + F^2 + F_\varphi^2)^{-1}, u_2^* = u_1, \\ p_2^* &= p_1^* [(1 + \varepsilon) M_{1n}^2 - \varepsilon] \\ \rho_2^* &= (1 + m_0)^{-1} [1 - (1 - \varepsilon) (1 - M_{1n}^{-2})]^{-1} \quad (2.3) \\ M_{1n}^2 &= \Delta_1^2 (a_1^*)^{-2} [F_\varphi \sin(\varphi + \sigma) - F \cos(\varphi + \sigma)]^2 (1 + F^2 + F_\varphi^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Здесь  $M_{1n}$  — проекция числа Маха равномерного потока на нормаль к скачку  $F$ ,  $a_1^*$  — скорость звука в области 1.

Переменные  $\Delta$  и  $\tau$  в области 2 запишутся в форме

$$\begin{aligned} \Delta_2^2 &= \Delta_1^2 \{ 1 + (1 - \varepsilon) (1 - M_{1n}^{-2}) [\sin(\varphi + \sigma) F_\varphi - \cos(\varphi + \\ &+ \sigma) F]^2 [(1 - \varepsilon) (1 - M_{1n}^{-2}) - 2] (1 + F^2 + F_\varphi^2)^{-1} \} \\ \tau_2 &= -\{ \varphi + \sigma - (1 - \varepsilon) (1 - M_{1n}^{-2}) [\sin(\varphi + \sigma) F_\varphi - \cos(\varphi + \\ &+ \sigma) F] [F \sin \varphi + F_\varphi \cos \varphi + [\sin(\varphi + \sigma) F_\varphi - \cos(\varphi + \sigma) F] [1 - \\ &- 1/2 (1 - \varepsilon) (1 - M_{1n}^{-2})]] / \cos \sigma (1 + F^2 + F_\varphi^2) \} \end{aligned}$$

Изучим возможные положения внутреннего скачка  $F$  в ударном слое.

В результате исследования «тройной» точки  $A$  (фиг. 3) для  $M_\infty = \infty$  была выбрана схема течения, в которой  $F_\varphi(\varphi_2) > 0^{1)}$ . В этом случае возможны следующие виды взаимодействия со стенкой падающего скачка  $F$ :

1) маховское отражение и как частный случай регулярное;

2) падение без отражения (фиг. 3). Если пренебречь вторично отраженными скачками, то остается только вторая возможность. В действительности, если даже и возникают отраженные скачки, то при небольших углах  $\gamma$  они настолько слабы, что не обнаруживаются в эксперименте [3].

Таким образом, в рамках схемы ударных волн, изображенной на фиг. 3, предлагается найти решение краевой задачи обтекания  $V$ -образного крыла, или течение в угле с плоскими стенками.

В дальнейшем каждой линии тока ( $\varphi' = \text{const}$ ), пересекающей плоский скачок и скачок  $F$  и проходящей в область 2, будем ставить в соответствие некоторую координату  $\varphi_1 = \varphi$  точки, в которой эта линия тока пересекает скачок  $F$ , причем  $\varphi_1 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2$  (фиг. 3). Такой подход удобен для интегрирования системы (1.2). Тот факт, что во внутренних областях (2 и 3) линии тока  $\varphi'$  и  $\varphi_1$  пробегают в интервале  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  одни и те же значения, не мешает определению решения, так как интегрирование в областях 2 и 3 проводится независимо.

Выражения (2.1) позволяют найти интеграл четвертого уравнения системы (1.2)

$$\frac{\rho \theta_\varphi}{w} = \frac{\rho^* \theta_\varphi^*}{w^*}$$

Здесь звездочка означает, что соответствующие величины вычислены либо на головной ударной волне области 3, либо на скачке  $F$ . Интегрируя

<sup>1</sup> Случай, когда  $F_\varphi < 0$ , возможен при значениях определяющих параметров, близких к режиму с одной плоской волной, лежащей на передних кромках. В данной работе подобная схема течения не исследуется.

это уравнение по  $\psi$  в интервале  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  от скачка  $F$  вдоль линии  $\varphi = \text{const}$ , получим следующее выражение для линий тока в области  $\mathcal{Z}$  ( $\theta_1 = \varepsilon^{-1}F$ ):

$$\theta_2 = \theta_1 + \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{\rho_2^1 w_2}{\rho_2 w_2^1} \theta_{2\psi^1} \psi_{\varphi_1} d\varphi_1$$

Учитывая, следующие соотношения, найдем  $\theta_{2\psi^1} \psi_{\varphi_1}$

$$\begin{aligned} \theta_{2\psi^1} \psi_{\varphi_1} &= \frac{d\theta_2^1}{d\varphi_1} - \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial \varphi} \right)^1, & \frac{d\theta_2^1}{d\varphi_1} &= \theta_{1\varphi^1} \\ \theta_{2\psi^1} \psi_{\varphi_1} &= -\Delta_1 [1 - (1 - \varepsilon)(1 - M_{1n}^{-2}(\varphi_1))] [\sin(\varphi_1 + \sigma)\theta_{1\varphi^1} - \\ & \quad - \cos(\varphi_1 + \sigma)\theta_{1^1}] / w_2^1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (1.2) и (1.4) следует, что выражение для давления в области  $\mathcal{Z}$  имеет вид

$$p_2 = p_3^*(\varphi) + \varepsilon p_{32}(\varphi, \varphi_2) + \varepsilon p_{22}(\varphi, \varphi_1) \quad (2.5)$$

Здесь первый индекс обозначает номер области, второй обозначает, что давление определяется из второго уравнения системы (1.2). Сумма первых двух слагаемых есть давление на конкретном разрыве.

Используя пятое уравнение системы (1.2), (2.3) и (2.5), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2^1}{\rho_2} &= [(1 + \varepsilon)M_{1n}^{-2}(\varphi_1) - \varepsilon] \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha \cos^2 \gamma} (p_1^* - p_3^*(\varphi) - \right. \\ & \quad \left. - p_{32}(\varphi, \varphi_2) - p_{22}(\varphi, \varphi_1)) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) и (2.6) в выражение для  $\theta_2$ , получим

$$\begin{aligned} \theta_2(\varphi, \varphi_1) &= \theta_1(\varphi) - \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{w_2}{w_2^1} F_1 R_2 d\varphi_1 \\ F_1 &= \Delta_1 [1 + \varepsilon(M_{1n}^{-2}(\varphi_1) - 1) + \varepsilon(1 - M_{1n}^{-2}(\varphi_1))] \times \\ & \quad \times [\sin(\varphi_1 + \sigma)\theta_{1\varphi^1} - \cos(\varphi_1 + \sigma)\theta_{1^1}] \\ R_2 &= 1 + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha \cos^2 \gamma} [p_1^* - p_3^*(\varphi) - p_{32}(\varphi, \varphi_2) - p_{22}(\varphi, \varphi_1)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Выражение для линий тока в области  $\mathcal{Z}$  запишется в виде

$$\theta_3(\varphi, \varphi') = \theta_2(\varphi, \varphi_2) + \int_{\varphi_2}^{\varphi'} \frac{\rho_3' w_3}{\rho_3 w_3'} \theta_{3\psi'} \psi_{\varphi'} d\varphi'$$

Учитывая следующие соотношения, получим выражения для  $\theta_3(\varphi', \varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_3'}{\rho_3} &= 1 + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha \cos^2 \gamma} (p_3^{*'} - p_3^* - p_{32}) \\ \theta_{3\psi'} \psi_{\varphi'} &= (1 + m_0) \sin \alpha \cos \gamma \left\{ 1 + \varepsilon \left[ \frac{\text{ctg } \alpha}{\cos \gamma} (\theta_{\varphi^{*'}} \sin \varphi' - \theta^{*'} \cos \varphi') + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \text{tg } \gamma (\theta^{*'} \sin \varphi' + \theta_{\varphi^{*'}} \cos \varphi') \right] \right\} / w_3' \\ \theta_3(\varphi, \varphi') &= \theta_2(\varphi, \varphi_2) + (1 + m_0) \sin \alpha \cos \gamma \int_{\varphi_2}^{\varphi'} \frac{w_3}{w_3'} R_3 d\varphi' \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$R_3 = 1 - \varepsilon \left[ \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \gamma} (\theta_{\varphi}^{*'} \sin \varphi' - \theta^{*'} \cos \varphi') + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \gamma (\theta^{*'} \sin \varphi' + \theta_{\varphi}^{*'} \cos \varphi') - \frac{p_3^{*'} - p_3^* - p_{32}}{\sin^2 \alpha \cos^2 \gamma} \right]$$

Интегрируя второе уравнение системы (1.2) от головной ударной волны в области  $\mathcal{Z}$ , где  $p_{32} = 0$ , вдоль линии  $\varphi = \operatorname{const}$  и сохраняя главные члены, получим

$$p_{32} = \sin \alpha \cos \gamma \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{w_3^3}{w_3'^2} (\theta_{3\varphi\varphi} + \theta_3) d\varphi' \quad (2.9)$$

Интегрируя то же уравнение в области  $\mathcal{Z}$  от  $\varphi_1 = \varphi_2$ , где  $p_{22} = 0$ , получим

$$p_{22} = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{w_2^3}{w_2'^2} (\theta_{2\varphi\varphi} + \theta_2) F_2 d\varphi_1 \quad (2.10)$$

$$F_2 = \Delta_1 (1 + m_0)^{-1} [\sin(\varphi_1 + \sigma) \theta_{1\varphi} - \cos(\varphi_1 + \sigma) \theta_1]$$

Дифференцируя два раза (2.8) и (2.7) и подставляя в (2.9) и (2.10) соответственно, получим

$$p_{32} = \eta \sin \alpha \cos \gamma (\theta_{1\varphi\varphi} + \theta_1) \Phi(\varphi) \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{w_3^3}{w_3'^2} d\varphi' + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma \times \\ \times \left\{ [(\sin \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \cos \varphi)(z' + z'') + (\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \sin \varphi)(z + z'')] \times \right. \\ \left. \times \left[ (1 + m_0) \int_{\varphi}^{\varphi_2} \left[ \frac{w_3^3}{w_3'^2} \int_{\varphi_2}^{\varphi'} \frac{w_3}{w_3'} d\varphi' \right] d\varphi' - \right. \right. \quad (2.11)$$

$$\left. - \int_{\xi}^{\varphi_2} \frac{w_2}{w_2'^2} F_{11} d\varphi_1 \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{w_3^3}{w_3'^2} d\varphi' \right] - 2(\sin \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \cos \varphi) \times \\ \times (z + z'') \int_{\varphi}^{\varphi_2} \left[ \frac{w_3^3}{w_3'^2} \int_{\varphi_2}^{\varphi'} \frac{u_3}{w_3'} d\varphi' \right] d\varphi' - \int_{\xi}^{\varphi_2} \frac{u_2}{w_2'^2} F_{11} d\varphi_1 \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{w_3^3}{w_3'^2} d\varphi' \left. \right\}$$

$$p_{22} = - \eta \sin \alpha \cos \gamma (\theta_{1\varphi\varphi} + \theta_1) \Phi(\varphi) \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{w_2^3}{w_2'^2} F_{21} d\varphi_1 + \\ + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \gamma \left\{ [(\sin \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \cos \varphi)(z' + z'') + \right. \\ \left. + (\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \sin \varphi)(z + z'')] \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \frac{w_2^3}{w_2'^2} F_{21} \int_{\xi}^{\varphi_1} \frac{w_2}{w_2'} F_{11} d\varphi_1 \right] d\varphi_1 - \right. \\ \left. - 2(\sin \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \cos \varphi)(z + z'') \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \frac{w_2^3}{w_2'^2} F_{21} \int_{\xi}^{\varphi_1} \frac{u_2}{w_2'} F_{11} d\varphi_1 \right] d\varphi_1 \right\}$$

В выражениях (2.11), (2.12) отброшены члены, содержащие множители  $\varepsilon p_{32\varphi}$ ,  $\varepsilon p_{32\varphi\varphi}$ ,  $\varepsilon p_{22\varphi}$ ,  $\varepsilon p_{22\varphi\varphi}$ , которые имеют более высокий порядок малости по сравнению с оставленными членами [1]. Здесь  $\eta = 1$ ,  $\xi = \varphi$  в ин-

тервале изменения  $\varphi[\varphi_1, \varphi_2]$ ;  $\eta = 0$ ,  $\zeta = \varphi_1$  в интервале  $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ .

$$F_{11} = \varepsilon^{-1} [1 + \varepsilon (M_{1n}^2(\varphi_1) - 1) + \varepsilon (1 - M_{1n}^{-2}(\varphi_1))] \times \\ \times [\sin(\varphi_1 + \sigma) z_{1\varphi} - \cos(\varphi_1 + \sigma) z_1^1] \\ F_{21} = \varepsilon^{-1} (1 + m_0)^{-1} [\sin(\varphi_1 + \sigma) z_{1\varphi} - \cos(\varphi_1 + \sigma) z_1^1] \\ z = \varepsilon \theta^* \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{sc} \gamma, \quad z_1 = \varepsilon \theta_1 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{sc} \gamma \quad (2.13)$$

$$\Phi(\varphi) = 1 + \frac{\Delta_1 [1 - (1 - \varepsilon)(1 - M_{1n}^{-2})] [\sin(\varphi + \sigma) F_\varphi - \cos(\varphi + \sigma) F]}{\Delta_2(\varphi) \sin[\varphi + \sigma + f_2(\varphi)] (F_\varphi + F)} \times \\ \times \left\{ \operatorname{ctg}[\varphi + \sigma + f_2(\varphi)] f_{2\varphi} + \frac{\Delta_{2\varphi}}{\Delta_2} + \frac{(1 - \varepsilon)(1 - M_{1n}^{-2})_\varphi}{1 - (1 - \varepsilon)(1 - M_{1n}^{-2})} + \right. \\ \left. + \frac{[(1 + \varepsilon)M_{1n}^2 - \varepsilon]_\varphi}{(1 + \varepsilon)M_{1n}^2 - \varepsilon} - \frac{\sin(\varphi + \sigma)(F_\varphi + F)}{\sin(\varphi + \sigma)F_\varphi - \cos(\varphi + \sigma)F} \right\}$$

$z'$ ,  $z''$ ,  $z'''$  являются производными функции  $z$  по  $\varphi$ . Подставив (2.11) и (2.12) в (2.7) и (2.8) и положив в (2.8)  $\varphi' = \varphi$ , получим следующее интегро-дифференциальное уравнение для формы ударной волны:

$$z + \delta \{ (1 + m_0)^{-1} (1 + 2a_2 N) L_1 + 2 [ (z \cos \varphi - z' \sin \varphi) - \\ - \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma (z \sin \varphi + z' \cos \varphi) ] L_2 - L_3 \} - 2\varepsilon \delta \{ [ (\sin \varphi + \\ + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \cos \varphi) (z''' + z') + (\cos \varphi - \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \sin \varphi) (z'' + z) ] L_4 - \\ - 2(\sin \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma \cos \varphi) (z'' + z) L_5 \} = \eta z_1 + \eta \varepsilon (z_1'' + z_1) \Phi(\varphi) L_6$$

$$L_1 = \int_{\zeta}^{\varphi_2} \frac{w_2}{w_2^{1/2}} F_{11} d\varphi_1, \quad L_2 = \int_{\varphi_2}^{\varphi} \frac{w_3}{w_3^{1/2}} d\varphi' - (1 + m_0)^{-1} \int_{\zeta}^{\varphi_2} \frac{w_2}{w_2^{1/2}} F_{11} d\varphi_1 \quad (2.14)$$

$$L_3 = \int_{\varphi_2}^{\varphi} \frac{w_3}{w_3^{1/2}} \{ 1 + 3 [ (z(\varphi') \cos \varphi' - z'(\varphi') \sin \varphi') - \\ - \operatorname{tg} \alpha \sin \gamma (z(\varphi') \sin \varphi' + z'(\varphi') \cos \varphi') ] \} d\varphi'$$

$$L_4 = \int_{\zeta}^{\varphi_1} \frac{w_2}{w_2^{1/2}} F_{11} d\varphi_1 \int_{\varphi_2}^{\varphi} \left[ \frac{w_3^3}{w_3^{1/2}} \int_{\varphi_2}^{\varphi'} \frac{w_3}{w_3^{1/2}} d\varphi' \right] d\varphi' -$$

$$- (1 + m_0)^{-1} \left( \int_{\zeta}^{\varphi_2} \frac{w_2}{w_2^{1/2}} F_{11} d\varphi_1 \right)^2 \int_{\varphi_2}^{\varphi} \frac{w_3}{w_3^{1/2}} d\varphi' +$$

$$+ (1 + m_0)^{-1} \int_{\zeta}^{\varphi_2} \left[ \frac{w_2}{w_2^{1/2}} F_{11} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \frac{w_2^3}{w_2^{1/2}} F_{21} \int_{\zeta}^{\varphi_1} \frac{w_2}{w_2^{1/2}} F_{11} d\varphi_1 \right] d\varphi_1 \right] d\varphi_1 -$$

$$- (1 + m_0) \int_{\varphi_2}^{\varphi} \left[ \frac{w_3}{w_3^{1/2}} \int_{\varphi'}^{\varphi} \left[ \frac{w_3^3}{w_3^{1/2}} \int_{\varphi_2}^{\varphi'} \frac{w_3}{w_3^{1/2}} d\varphi' \right] d\varphi' \right] d\varphi' +$$

$$+ \int_{\zeta}^{\varphi_2} \frac{w_2}{w_2^{1/2}} F_{11} d\varphi_1 \int_{\varphi_2}^{\varphi} \left[ \frac{w_3}{w_3^{1/2}} \int_{\varphi'}^{\varphi} \frac{w_3^3}{w_3^{1/2}} d\varphi' \right] d\varphi'$$

$$L_5 = \int_{\zeta}^{\varphi_2} \frac{w_2}{w_2^{1/2}} F_{11} d\varphi_1 \int_{\varphi_2}^{\varphi} \left[ \frac{w_3^3}{w_3^{1/2}} \int_{\varphi_2}^{\varphi'} \frac{u_3}{w_3^{1/2}} d\varphi' \right] d\varphi' -$$

$$\begin{aligned}
 & - (1 + m_0)^{-1} \int_{\zeta}^{\varphi_2} \frac{w_2}{w_2'^2} F_{11} d\varphi_1 \int_{\zeta}^{\varphi_2} \frac{u_2}{w_2'^2} F_{11} d\varphi_1 \int_{\varphi_2}^{\varphi} \frac{w_3^3}{w_3'^2} d\varphi' + \\
 & + (1 + m_0)^{-1} \int_{\zeta}^{\varphi_2} \left[ \frac{w_2}{w_2'^2} F_{11} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[ \frac{w_2^3}{w_2'^2} F_{21} \int_{\zeta}^{\varphi_1} \frac{u_2}{w_2'^2} F_{11} d\varphi_1 \right] d\varphi_1 \right] d\varphi_1 - \\
 & - (1 + m_0) \int_{\varphi_2}^{\varphi} \left[ \frac{w_3}{w_3'^2} \int_{\varphi}^{\varphi} \left[ \frac{w_3^3}{w_3'^2} \int_{\varphi_2}^{\varphi'} \frac{u_3}{w_3'^2} d\varphi' \right] d\varphi' \right] d\varphi' + \\
 & + \int_{\zeta}^{\varphi_2} \frac{u_2}{w_2'^2} F_{11} d\varphi_1 \int_{\varphi_2}^{\varphi} \left[ \frac{w_2}{w_2'^2} \int_{\varphi}^{\varphi} \frac{w_3^3}{w_3'^2} d\varphi' \right] d\varphi' \\
 L_6 = & \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{w_2}{w_2'^2} F_{11} d\varphi_1 \int_{\varphi_2}^{\varphi} \frac{w_3^3}{w_3'^2} d\varphi' - \int_{\varphi}^{\varphi_2} \left[ \frac{w_2}{w_2'^2} F_{11} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{w_2}{w_2'^2} F_{21} d\varphi_1 \right] d\varphi_1 - \\
 & - (1 + m_0) \int_{\varphi_2}^{\varphi} \left[ \frac{w_3}{w_3'^2} \int_{\varphi}^{\varphi} \frac{w_3^3}{w_3'^2} d\varphi' \right] d\varphi'
 \end{aligned}$$

Уравнение (2.14) в силу принятого способа интегрирования системы (1.2) содержит условие тангенциального разрыва по линии тока  $\varphi_2$ , выходящей из «тройной» точки  $A$  (фиг. 3). Вторым необходимым условием в интервале  $[\varphi_1, \varphi_2]$  является равенство давления  $p_2^*$ , рассчитанного при переходе через скачок  $F$  из области 1 в область 2, давлению  $p_2(\varphi, \varphi_1)|_{\varphi_1=\varphi}$ , вычисленному по (2.5)

$$p_2^* + \varepsilon p_{32}(\varphi, \varphi_2) + \varepsilon p_{22}(\varphi, \varphi) = p_1^* [(1 + \varepsilon) M_{1n}^2 - \varepsilon] \quad (2.15)$$

Форма ударной волны в интервале  $[\varphi_3, \varphi_4]$  определяется уравнением (2.14) при  $\eta = 0, \zeta = \varphi_4$ . Уравнение (2.14) при  $\eta = 1$  и  $\zeta = \varphi$  и соотношение (2.15) позволяют найти головную ударную волну и внутренний скачок  $F$  в интервале  $[\varphi_1, \varphi_2]$ .

Исследование выражений (2.11) и (2.12) показывает, что вторые члены в выражениях  $p_{32}$  и  $p_{22}$  справа и слева от точки  $\varphi = \varphi_4$  тождественно равны, тогда как первый член в указанных добавках давления слева от точки  $\varphi = \varphi_4$  отсутствует вовсе. Отсюда следует, что множитель  $(z_1'' + z_1)\Phi(\varphi)$  в точке  $\varphi = \varphi_4$  должен обратиться в нуль.

Из выражения (2.13) находим, что главный член функции  $\Phi(\varphi)$  ( $\Phi(\varphi) \approx 1 - M_{1n}^2$ ) в нуль не обращается. Отсюда следует равенство нулю кривизны скачка  $F$  в точке  $\varphi_4$ , т. е.

$$z_1''(\varphi_4) + z_1(\varphi_4) = 0$$

Располагая дифференциальным оператором третьего порядка для функции  $z$  в уравнении (2.14) в интервале  $[\varphi_3, \varphi_4]$  и третьего и второго порядков соответственно для функций  $z$  и  $z_1$ , в системе уравнений (2.14), (2.15) в интервале  $[\varphi_1, \varphi_2]$  на искомые функции можно наложить в целом восемь условий. Из условия «привязки» к оси симметрии ( $II$  на фиг. 3) функции  $z$  в интервале  $[\varphi_3, \varphi_4]$  и условия привязки тройной точки  $A$  к плоскому скачку  $z_2 = a_2 \sin(\beta - \varphi)$ , присоединенному к передней кромке, находим для определения неизвестных границ  $\varphi = \varphi_3$  и  $\varphi = \varphi_2$  два соотношения

$$z(\varphi_3) = \text{ctg } \alpha \csc \gamma \sin \varphi_3$$

$$z(\varphi_2) \equiv z_1(\varphi_2) = a_2 \sin(\beta - \varphi_2)$$



В первом функция  $z$  определена из (2.14), во втором — из системы уравнений (2.14), (2.15) в интервале  $[\varphi_1, \varphi_2]$ . Кроме того, известны два условия для функции  $z_1$  в точке  $\varphi = \varphi_1$  и условие симметрии для функции  $z$  в точке  $\varphi_3$

$$z_1'(\varphi_1) = \infty, \quad z_1''(\varphi_1) + z_1(\varphi_1) = 0 \quad (2.16)$$

$$z'(\varphi_3) = -\operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{sc} \gamma + O(\varepsilon \gamma^2) \quad (2.17)$$

Таким образом, остаются пять произволов, которые могут быть использованы для «стыковки»  $z^{(n)}(\varphi_1)$  при  $n = 0, 1, \dots, 4$ . Это свидетельствует о том, что на линии  $\varphi = \varphi_1$  непрерывны как  $\theta$  и  $p$ , так и их производные<sup>1</sup>.

**3. Приближенное решение.** Система уравнений (2.14), (2.15) представляет собой нелинейные интегро-дифференциальные уравнения. Для определения приближенного решения введем некоторые допущения. Функции от  $z_1(\varphi_1)$  в подынтегральных выражениях будем считать константами (это функции, зависящие от  $M_{1n}^2(\varphi_1)$  и меняющиеся слабо). Интегрирование функционалов проводим, перейдя от переменной интегрирования  $\varphi_1$  к  $\varphi'$  ( $\varphi_2 \leq \varphi' \leq \beta$ ). Особенности в функциях  $F_{11}$  и  $F_{21}$  в точке  $\varphi_1 = \varphi_1$  при такой замене переменных ликвидируются. В функциях  $w_i$  оставляем главные члены, предположив, что скачок  $F$  слабой интенсивности. После вычисления функционалов и соответствующих преобразований, сохраняя главные члены в коэффициентах при функциях и их производных, получим следующее дифференциальное уравнение для функции  $z$  в интервале  $[\varphi_3, \varphi_4]$ :

$$\begin{aligned} & 2/3 \varepsilon^2 r_1^3 (1 + m_0)^{-1} [\sin^3(\varphi + \sigma) z''' + 3 \sin^2(\varphi + \sigma) z''] - \\ & - 2 \varepsilon r_1 \sin(\varphi + \sigma) z' + z = A_1 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Так как  $r_1$  и  $A_1$  — слабо меняющиеся функции  $\varphi$ , вычислим их в точке  $\varphi_4$ , для того чтобы обеспечить совпадение при  $\varphi = \varphi_4$  уравнений, полученных из уравнения (2.14), записанного справа и слева от точки  $\varphi_4$ .

$$r_1 = \varepsilon^{-1} z(\varphi_2) [(1 + \varepsilon) M_{1n}^2(\varphi_2) - \varepsilon] + (1 + m_0) \sin(\varphi_2 - \varphi_4) / \sin(\varphi_3 + \sigma)$$

$$\begin{aligned} A_1 = & \varepsilon (1 + 2a_2 N) \{ \varepsilon^{-1} z(\varphi_2) [(1 + \varepsilon) M_{1n}^2(\varphi_2) - \varepsilon] + \\ & + (1 + m_0) [R_1 - 3z'(\varphi_2) \sin(\varphi_2 + a_1)] \sin(\varphi_2 - \varphi_4) / \sin(\varphi_4 + \sigma) \} \end{aligned}$$

Уравнение (3.1) становится уравнением типа Эйлера, если синусы заменить их аргументами. Его общее решение записывается в форме

$$\begin{aligned} z = & A_1 + C_1 (\varphi + \sigma)^{q_1} + (\varphi + \sigma)^{(q_2+q_3)/2} \left\{ C_2 \sin \left[ \frac{q_2 - q_3}{2i} \ln(\varphi + \sigma) \right] + \right. \\ & \left. + C_3 \cos \left[ \frac{q_2 - q_3}{2i} \ln(\varphi + \sigma) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$q_1 = -2r \operatorname{ch}(\xi/3), \quad q_2 = r \operatorname{ch}(\xi/3) + i\sqrt{3}r \operatorname{sh}(\xi/3)$$

$$q_3 = r \operatorname{ch}(\xi/3) - i\sqrt{3}r \operatorname{sh}(\xi/3)$$

$$\operatorname{ch} \xi = 3(1 + m_0) / 4\sqrt{\varepsilon}, \quad r = (r_1 \sqrt{\varepsilon})^{-1}$$

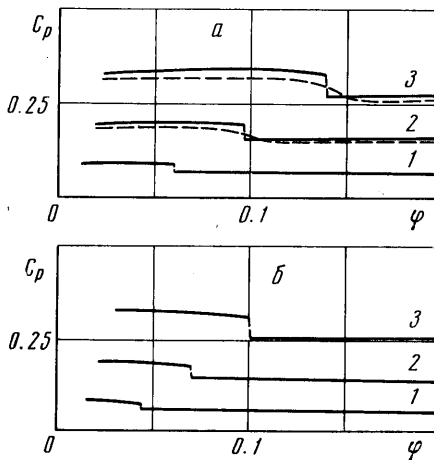
Здесь  $c_j$  — произвольные константы ( $j = 1, 2, 3$ ).

<sup>1</sup> Следует отметить, что интегрирование уравнения для линий тока можно было бы проводить от головной ударной волны. При этом порядок старшей производной функции  $z_1$  в уравнениях (2.14), (2.15) понизился бы до первого. Тем не менее в точке  $\varphi = \varphi_1$  стыковались бы  $z^{(n)}$  для  $n = 0, 1, \dots, 4$ , что привело бы к тем же результатам.

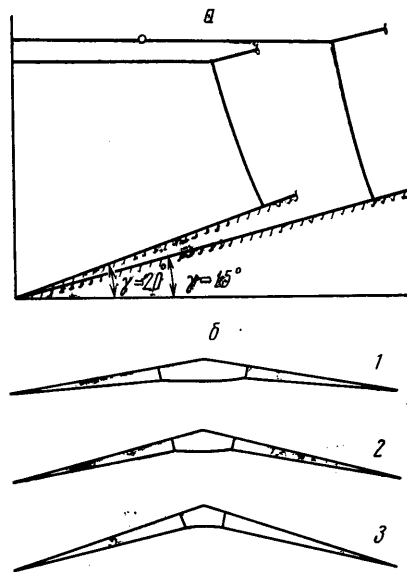
Уравнения (2.14), (2.15) для функций  $z$  и  $z_1$  в интервале  $[\varphi_4, \varphi_2]$  после аналогичных преобразований имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}\varepsilon^2(1+m_0)^{-1}r_2^3 \sin^3(\varphi_2-\varphi) [z''' + 3z''/\sin(\varphi_4+\sigma)] - 2\varepsilon r_2 \sin(\varphi_2-\varphi) \times \\ & \times z' + z = A_1 \sin(\varphi_2-\varphi) / \sin(\varphi_2-\varphi_4) + z_1 - \frac{1}{2}\varepsilon(1+m_0)^{-1} \times \\ & \times r_2^2 \sin^2(\varphi_2-\varphi) z_1'' \Phi(\varphi) \\ & \varepsilon(1+m_0)^{-1}r_2^2 \sin^2(\varphi_2-\varphi) [z''' \sin(\varphi_4+\sigma) + 3z''] - 2z' \sin(\varphi_4+\sigma) + \\ & + (1+m_0)^{-1}r_2 \sin(\varphi_2-\varphi) z_1'' \Phi(\varphi) = \{1 - \varepsilon[1 + (M_\infty \sin \alpha \cos \gamma)^{-2}]\} \times \\ & \times (1+\varepsilon)(M_{1n}^2 - 1) + 2a_2 N[(1+\varepsilon)M_{1n}^2 - \varepsilon] \\ & r_2 = \varepsilon^{-1}z(\varphi_2)[(1+\varepsilon)M_{1n}^2(\varphi_2) - \varepsilon] \sin(\varphi_4+\sigma) \sin^{-1}(\varphi_2-\varphi_4) + (1+m_0) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Система (3.3) существенно нелинейна, поэтому найти простое решение не удается. Для расчета в интервале  $[\varphi_4, \varphi_2]$  функция  $z$  разлагалась в ряд Тейлора в точке  $\varphi = \varphi_2$ , а функция  $z_1$  заменялась обратной  $\varphi = \varphi(z_1)$ , которая тоже разлагалась в ряд Тейлора. В обоих рядах удерживалось четыре члена. При заданном угле наклона скачка  $F$  в точке  $\varphi_2$  с помощью условий на контактном разрыве в точке  $A$  определяются координаты  $\varphi_2$  и наклон головной волны  $z'(\varphi_2)$  в точке  $A$ . Используя условия (2.16) для функции  $\varphi(z_1)$ , находим оставшиеся два члена разложения для  $\varphi(z_1)$ , а затем и точку  $\varphi_4$ . Вторая и третья производные функции  $z$  в точке  $\varphi_3$



Фиг. 4



Фиг. 5

определяются из системы (3.3), взятой в точке  $\varphi_4$ . Одна из констант  $C_j$  решения (3.2) определяется из условия симметрии (2.17), две другие константы и неизвестный наклон скачка  $F$  в точке  $\varphi_2$  определяются из стыковки функций  $z$  и их первых и вторых производных в точке  $\varphi_4$ . Указанный подход в интервале  $[\varphi_4, \varphi_2]$  не позволил стыковать в точке  $\varphi_4$  производные функций  $z$  до четвертого порядка включительно.

**4. Результаты расчета.** На фиг. 4, а, б представлены результаты расчета давления за головной ударной волной (сплошные линии) для  $M_\infty = \infty$ ,  $\beta = 45^\circ$  — а)  $\gamma = 15^\circ$ , б)  $\gamma = 20^\circ$  кривые 1, 2, 3 соответствуют углам атаки  $\alpha$ , равным 10, 15 и  $20^\circ$ . На фиг. 4, а штриховой линией нанесено

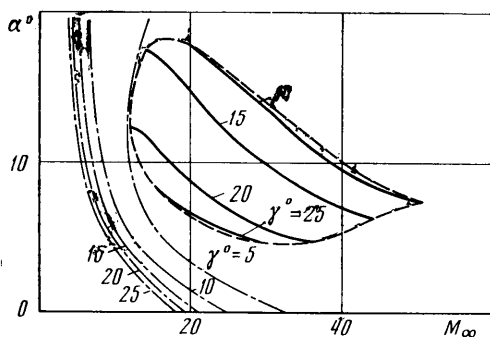
среднее распределение давления за ударной волной, сосчитанное методом установления [4]. Наблюдается хорошее совпадение положений скачков. Некоторое расхождение величины давления можно объяснить заниженными значениями давления, полученными методом установления. Расчеты показывают, что ударная волна в интервале  $[\varphi_3, \varphi_2]$  имеет точку перегиба, которая с увеличением  $\gamma$  приближается к плоскости симметрии, а затем исчезает. При этом ударная волна становится вогнутой к поверхности крыла (например, фиг. 4, б).

На фиг. 5, а представлены картины ударных волн в окрестности плоскости симметрии для двух углов  $\gamma$ ,  $M_\infty = \infty$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ . Кружком обозначена точка перегиба.

На фиг. 5, б представлена общая картина обтекания крыла с полууглом при вершине  $\beta = 45^\circ$  для  $M_\infty = \infty$ ,  $\alpha = 20^\circ$ . Случаи 1, 2 и 3 соответствуют углу  $\gamma = 10, 15$  и  $20^\circ$ . Следует отметить, что для указанных определяющих параметров задачи наклон скачка  $F(\varphi_2)$  меняется мало. При этом скачок  $F(\varphi_2)$  слабый. На контактной поверхности разрыв плотностей достигает 20%. Так как  $F' > 0$ , давление вдоль скачка  $F$  от головной волны к поверхности крыла растет. Величину этого роста определяет добавок давления  $\epsilon p_{22}$ , который составляет до 10—15% перепада давления на скачке  $F$ . В рамках приближенного решения (п. 3) добавок давления  $\epsilon p_2$  не может быть точно вычислен в интервале  $[\varphi_3, \varphi_4]$ , так как он определяется значениями третьей производной от формы ударной волны, которая в точке  $\varphi_4$  имеет разрыв, и поэтому можно сказать лишь о качественном поведении добавки давления  $\epsilon p_2$ . На теле эта величина меняется слабо и может быть как положительной в интервале  $[\varphi_3, \varphi_4]$ , так и принимать отрицательное значение в окрестности плоскости симметрии.

Изложенная теория позволяет произвести расчет обтекания V-образного крыла потоком с конечным числом Маха, если последнее достаточно велико.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что при фиксированных углах  $\alpha$  и  $\gamma$  и с уменьшением числа Маха схема течения в ударном слое меняется. При достаточно больших числах Маха реализуется режим течения со скачком  $F$ , выпуклым внутрь возмущенной области, затем при некотором числе Маха осуществляется обтекание с плоскими скачками. При дальнейшем уменьшении числа Маха набегающего потока естественно предположить, что скачок  $F$  будет обращен выпуклостью в сторону



Фиг. 6

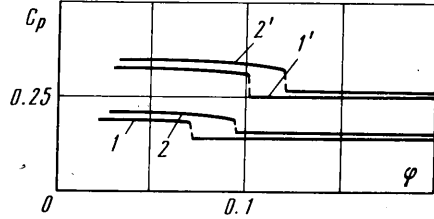
передней кромки. Кроме того, исследование показало, что при  $M_\infty = \infty$  обтекание с плоскими скачками не реализуется. Однако для  $M_\infty \neq \infty$  такие решения имеют место. Область их существования показана на фиг. 6 штриховой линией. Кривые на фиг. 6 построены для угла  $\beta = 45^\circ$ . Сплошные линии соответствуют обтеканию V-образных крыльев с указанным режимом для различных  $\gamma$ . Штрихпунктирными линиями указаны режимы обтекания с плоским скачком, лежащим на передних кромках [5]. Переход от одного режима обтекания к другому, как видно из фиг. 6, не всегда происходит через структуру плоских скачков. Области существования этих простых решений для фиксированных углов  $\gamma$  представляют собой отрезки кривых. Кроме

того, для V-образных крыльев с углами  $\gamma \geq 25^\circ$  и  $\gamma \lesssim 14^\circ$  вообще не существует режимов обтекания с плоскими волнами для случая маховского отражения от плоскости симметрии волны, падающей с передней кромки.

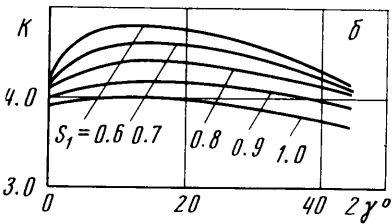
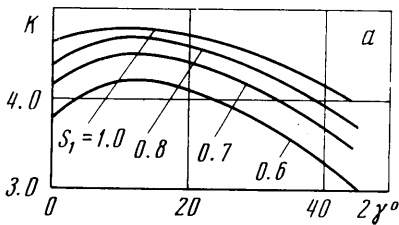
Для того чтобы могли осуществляться режимы обтекания с выпуклой и вогнутой головной ударной волной, необходимо существование точки перегиба головной ударной волны в интервале  $[\varphi_3, \varphi_4]$ . Действительно, если предположить монотонность производной по  $\varphi$  функции  $z$ , описывающей ударную волну в интервале  $[\varphi_3, \varphi_2]$ , то отсюда следует, что переход от режима обтекания с выпуклой ударной волной к режиму обтекания с вогнутой волной может быть осуществлен только через систему плоских скачков. Однако, как было отмечено выше, таких решений при  $M_\infty = \infty$  не существует. Следовательно, чтобы был возможен такой переход, головная ударная волна в интервале  $[\varphi_3, \varphi_2]$  должна иметь точку перегиба.

На фиг. 7 приведены примеры распределения давления за головной ударной волной для  $M_\infty = \infty$  и 20 при  $\gamma = 20^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\alpha = 15^\circ$  (кривые 1 и 2),  $\alpha = 20^\circ$  (кривые 1' и 2'). Как видно, давление с уменьшением числа  $M_\infty$  растет и возмущенная область расширяется.

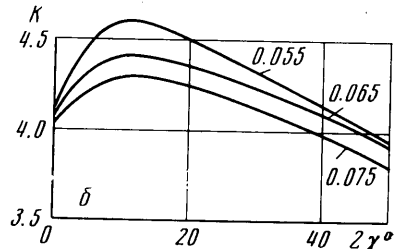
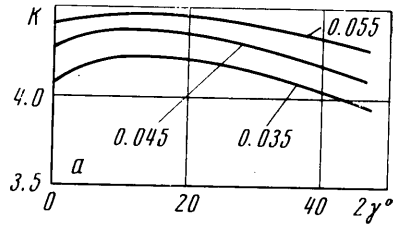
**5. Аэродинамическое качество V-образного крыла.** Представляет интерес определить зависимость аэродинамического качества от угла раскрытия крыла, в частности в классе эквивалентных крыльев найти оптимальное значение аэродинамического качества. Расчет проводился в предпо-



Фиг. 7



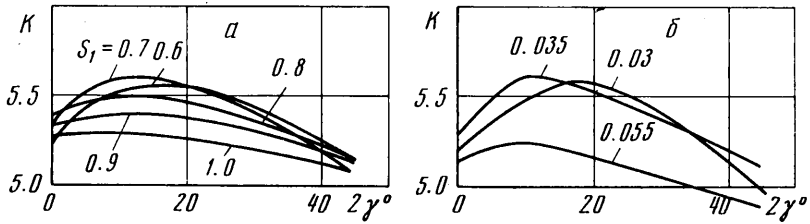
Фиг. 8



Фиг. 9

ложении, что локальный коэффициент трения  $C_\tau = \text{const}$  и фиксированы параметр  $\tau = V/S^{3/2}$  ( $V$  — объем крыла,  $S$  — площадь в плане) и площадь  $S_1$  крыла, а затем результаты расчета обрабатывались для разных величин коэффициента подъемной силы  $C_v$ . На фиг. 8, а, б представлены кривые зависимости аэродинамического качества от угла  $\gamma$  соответственно для  $\tau = 0.05, 0.07$  для разных площадей крыла  $S_1$ . На фиг. 9, а, б нане-

сены аналогичные зависимости для тех же  $\tau$ , но уже для различных фиксированных коэффициентов подъемной силы  $C_y$ . Все указанные кривые строились при  $C_x = 2 \cdot 10^{-3}$ .



Фиг. 10

На фиг. 10, *a*, *b* представлен расчет аэродинамического качества для  $C_x = 10^{-3}$ ,  $\tau = 0.05$  и при различных фиксированных  $S_i$  и  $C_y$  соответственно. Приведенные зависимости определенно указывают на преимущества V-образного крыла в классе эквивалентных крыльев в смысле оптимального аэродинамического качества. Кривые на фиг. 9, *a*, *b* для двух равных коэффициентов подъемной силы  $C_y = 0.055$  указывают на то, что с увеличением  $\tau$  выигрыш в аэродинамическом качестве V-образного крыла по сравнению с эквивалентным плоским треугольным крылом увеличивается.

Поступило 24 V 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гонор А. Л. Обтекание треугольного крыла гиперзвуковым потоком. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
2. Гонор А. Л., Остапенко Н. А. Гиперзвуковое обтекание треугольного крыла конечной толщины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
3. Гонор А. Л., Швец А. И. Исследование системы скачков уплотнения при обтекании звездообразных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. Гонор А. Л., Ларугин В. И., Остапенко Н. А. The conical wing in hypersonic flow. The second conference on numerical methods in fluid dynamics, Univ. California, Berkly, USA, 1970. (Рус. перев.: Расчет сверхзвукового обтекания V-образных крыльев методом установления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.)
5. Майкапар Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.