УДК 533.6.011.8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ СКОЛЬЖЕНИЯ ДЛЯ БИНАРНОЙ СМЕСИ ГАЗОВ

В. А. ЖАРОВ

(*Москва*)

Задача об определении скорости скольжения для бинарной смеси газов рассматривается на основе линеаризованных модельных уравнений Гамеля. Показано, что в некотором случае уравнения могут быть сведены к уравнениям аналогичной задачи для однокомпонентного газа.

Рассмотрим течение газовой смеси возле плоской стенки в отсутствие внешних сил. На расстояниях от стенки, превышающих длину свободного пробега молекул, справедливы уравнения Навье — Стокса для смеси. В пристеночном слое, толщина которого имеет порядок длины свободного пробега молекул, необходимо решать уравнения Больцмана и сращивать решения на границе внешней и внутренней областей. В результате получим описание течения в слое Кнудсена и граничные условия для уравнений Навье — Стокса. Впервые эта задача для однокомпонентного газа была поставлена Веландером [1]; Ю. И. Яламов, И. Н. Ивченко и Б. В. Дерягин [2] [1] определили скорость скольжения для бинарной смеси в случае, когда плотность одного газа значительно меньше плотности другого. Температура смеси принималась постоянной во всей области течения. В качестве исходных кинетических уравнений использовались модельные уравнения круковского типа. Дарозе [3] рассмотрел задачу об определении скорости скольжения для бинарной смеси с точки зрения последовательного применения метода асимптотических разложений для уравнений Больцмана, но не довел ее до конца.

При решении задачи исходим из модели Гамеля [4] кинетических уравнений Больцмана для бинарной газовой смеси

$$df_i / dt = K_{ii}n_i(F_{ii} - f_i) + K_{ij}n_j(F_{ij} - f_i)$$
$$F_{ii} = n_i(m_i / 2\pi kT_i)^{3/2}\exp\{-m_i[\mathbf{v} - \mathbf{V}_i]^2 / 2kT_i\}$$
$$F_{ij} = n_i(m_i / 2\pi kT_{ij})^{3/2}\exp\{-m_i[\mathbf{v} - \mathbf{V}_{ij}]^2 / rkT_{ij}\}$$

Здесь f_i, n_i, $\mathbf{V}_i$, T_i — соответственно функция распределения, плотность частиц, средняя скорость, средняя температура i-й компоненты газа, k — постоянная Больцмана, m_i — масса частицы i-го сорта, K_{11}, $K_{12} = K_{21}$, K_{22} — величины, определяющие сечения столкновения частиц

$$\mathbf{V}_{ij} = \mu_i\mathbf{V}_i + \mu_i\mathbf{V}_j, \quad T_{ij} = T_i + \mu_i\mu_j[2(T_j - T_i) + (V_i - V_j)^2\mu_j m_0 / 3k$$
$$\mu_i = m_i / m_0, \qquad m_0 = m_1 + m_2$$

Ниже предполагается, что величины K_{11}, K_{12} и K_{22} имеют один порядок. Выберем систему координат следующим образом: ось x параллельна стенке, ось y направлена по нормали к ней

Тогда исходные уравнения запишутся в виде

$$v_x\frac{\partial f_i}{\partial x} + v_y\frac{\partial f_i}{\partial y} = K_{ii}n_i(F_{ii} - f_i) + K_{ij}n_j(F_{ij} - f_j) \qquad (i, j = 1, 2) \qquad (1)$$

---

[1] Во время подготовки статьи в печать появились работы [5–7], в которых аналогичные задачи решаются приближенно. При этом используются те же уравнения, что и в работе [2].

Решая эти уравнения методом Энскога — Чепмена во внешней области с точностью до ε^2, получим навье-стоксовскую функцию распределения, которую ниже примем за условие на внешней границе слоя Кнудсена ($\varepsilon = \lambda / L$, λ — длина свободного пробега молекул)

$$F_i = F_{i0} - \frac{F_{i0}}{\gamma_i}\left[\frac{m_0 n_0 \gamma_i}{\rho n_i K_{12}} \mathbf{d}_i\mathbf{c} + \frac{m_i}{kT}\left(c_l c_r - \frac{1}{3}\delta_{lr}\mathbf{c}^2\right)\frac{\partial V_l}{\partial x_r} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{m_i}{2kT}\mathbf{c}^2 - \frac{5}{2}\right) c_r \frac{\partial \ln T}{\partial x_r}\right] = F_i^{(0)} + F_i^{(1)}$$
$$F_{i0} = F_i^{(0)} = n_i\left(\frac{m_i}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m_i}{2kT}(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2\right\} \tag{2}$$
$$n_0 = n_1 + n_2, \qquad \gamma_i = K_{ii}n_i + K_{ii}n_j, \qquad \rho = m_1 n_1 + m_2 n_2$$
$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{V}, \quad \mathbf{d}^i = \nabla\left(\frac{n_i}{n_0}\right) + \left(\frac{n_i}{n_0} - \frac{m_i n_i}{\rho}\right)\nabla \ln p$$

где $\mathbf{V}$, T — соответственно среднемассовая скорость и температура смеси; p — давление смеси.

На стенке примем условие диффузного отражения молекул

$$f_{ri}|_{y=0} = n_{ri}\left(\frac{m_i}{2\pi kT_{ri}}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m_i}{2kT_{ri}}\mathbf{v}^2\right\} = f_r \tag{3}$$

где n_{ri} и T_{ri} определяются из условий непротекания для каждой компоненты, условия постоянства потока тепла поперек слоя Кнудсена и соотношений аккомодации энергии падающих и отраженных молекул $\alpha_e^i = (E_i^- - E_i^+) / (E_i^- - E_w^i)$, α_e^i — коэффициент аккомодации молекул i-го сорта: E_i^+, E_i^- — соответственно потоки энергии, переносимые отраженными и падающими молекулами i-го сорта; E_w^i — поток энергии, переносимой отраженными молекулами i-го сорта, когда температура отраженных молекул совпадает с температурой стенки.

Следуя [8], ищем решение уравнения (1) в виде

$$f_i = f_{i0}(1 + \varphi_i), \quad \varphi_i = O(\varepsilon)$$
$$f_{i0} = n_i(x, 0)\,(m_i / 2\pi kT(x, 0))^{3/2}\exp\{-m_i\mathbf{v}^2 / 2kT\},$$

причем $n_i(x, 0)$ и $T(x, 0)$ берутся из решения во внешней области.

Далее

$$n_i = n_i(x, 0)\,(1 + \nu_i), \qquad n_{ri} = n_i(x, 0)\,(1 + \nu_{ri})$$
$$T_i = T(x,0)\,(1 + \tau_i), \qquad T_{ri} = T(x, 0)\,(1 + \tau_{ri}) \tag{4}$$

Оставляя члены порядка ε в уравнении (1), получаем уравнение для φ_i

$$v_y\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \gamma_i\varphi_i = \gamma_i\nu_i + \frac{m_i}{kT(x,0)}v_x(A_{ii}V_i + A_{ij}V_j) +$$
$$+ \left(\frac{m_i}{2\pi kT(x,0)}\mathbf{v}^2 - \frac{3}{2}\right)[B_{ii}\tau_i + B_{ij}\tau_j] - v_x\frac{\partial \ln n(x,0)}{\partial x} - \tag{5}$$
$$- v_x\left(\frac{m_i\mathbf{v}^2}{2kT(x,0)} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\cdot\ln T(x,0)$$
$$\gamma_i = K_{ii}n_i(x, 0) + K_{ij}n_j(x, 0)$$

$$A_{ii} = K_{ii}n_i(x,\ 0) + K_{ij}n_j(x,\ 0)\mu_i, \qquad A_{ij} = K_{ij}n_j(x,\ 0)\mu_i$$
$$B_{ii} = K_{ii}n_i(x,\ 0) + K_{ij}n_j(x,\ 0)(1-2\mu_i\mu_j)$$
$$B_{ij} = 2K_{ij}n_j(x,\ 0)\mu_i\mu_j$$

При этом граничные условия на стенке принимают вид

$$\varphi_i|_{y=0} = \nu_{ri} + \left(\frac{m_i}{2kT}\mathrm{v}^2 - \frac{3}{2}\right)\tau_{ri} \tag{6}$$

На бесконечности φ_i стремится к выражению

$$\varphi_i = \frac{m_i}{kT}\mathrm{v}\cdot\mathrm{U} - \frac{1}{\gamma_i}\left[\frac{m_0 n_0 \gamma_i}{\rho n_i K_{12}}\mathbf{d}_i\mathrm{v} + \frac{m_i}{kT}\left(v_l v_r - \frac{1}{3}\delta_{lr}\mathrm{v}^2\right)\frac{\partial V}{\partial x_r} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{m_i}{2kT}\mathrm{v}^2 - \frac{5}{2}\right)\mathrm{v}\cdot\nabla\ln T\right] + y\left(\frac{\partial \ln n_i}{\partial y} + \left(\frac{m_i}{2kT}\mathrm{v}^2 - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\ln T\right) + \tag{7}$$
$$+ y\frac{m_i}{kT}v_x\frac{\partial U_x}{\partial y} + O(\varepsilon^2)$$

Ищем решение уравнения (5) в виде $\varphi_i = \chi_i + v_x\Omega_i$. Тогда задача о нахождении скорости скольжения отделяется от задачи нахождения температурного скачка. При этом для Ω_i получаем следующую систему уравнений:

$$v_y\frac{\partial\Omega_i}{\partial y} + \gamma_i\Omega_i = \frac{m_i}{kT}(A_{ii}V_i + A_{ij}V_j) - \Psi_i - \left(\frac{m_i}{2kT}\mathrm{v}^2 - \frac{3}{2}\right)\Phi$$
$$\Psi_i = \frac{\partial}{\partial x}\ln n_i, \qquad \Phi = \frac{\partial}{\partial x}\ln T \tag{8}$$

На стенке выполняется условие $\Omega_i|_{y=0} = 0$. Сведем эту систему к уравнениям относительно V_i и V_j. Для этого сначала представим (8) в интегральном виде. С учетом граничных условий на стенке получаем

$$\Omega_i^+(y) = \int_0^y (R_i/v_y)\exp\{-\gamma_i(y-s)/v_y\}\,ds, \qquad v_y > 0$$

$$\Omega_i^-(y) = -\int_y^\infty (R_i/v_y)\exp\{-\gamma_i(y-s)/v_y\}\,ds, \qquad v_y < 0$$

$$R_i = \frac{m_i}{kT}(A_{ii}V_i + A_{ij}V_j) - \Psi_i - \left(\frac{m_i}{2kT}\mathrm{v}^2 - \frac{3}{2}\right)\Phi$$

Используя определение средней скорости i-й компоненты, найдем V_i

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\gamma_i}\int_0^\infty (A_{ii}V_i(s') + A_{ij}V_j(s'))I_{-1}(|I'-s'|)\,ds' -$$
$$-\frac{1}{\gamma_i}\frac{kT}{m_i}(\Psi_i + \Phi) + \frac{kT}{\sqrt{\pi}\,\gamma_i m_i}\left[\Psi_i I_0(y') + \Phi\left(\frac{I_0(y')}{2} + I_2(y')\right)\right] \tag{9}$$

$$I_m(y') = \int_0^\infty \eta^m l^{-\eta^2 - \frac{y'}{\eta}}\,d\eta, \qquad y' = y\gamma_i\left(\frac{m_i}{2kT}\right)^{1/2}$$

Из определения y' ясно, что фиксированное значение y' в уравнениях для $V_i(y')$ и $V_j(y')$ соответствует, вообще говоря, различным значениям физической переменной y. Если положить $\gamma_i\sqrt{m_1} = \gamma_2\sqrt{m_2}$, то это различие исчезает, и система допускает простое решение. Ниже условие $\gamma_1\sqrt{m_1} = \gamma_2\sqrt{m_2}$ везде предполагается выполненным.

Прежде чем получить условия на внешней границе слоя Кнудсена, отметим, что во внешнем течении могут реализоваться случаи $\mathrm{Re} \lessapprox 1$ и $\mathrm{Re} \gg 1$. Как показано в [8], при $\mathrm{Re} \gg 1$ можно пренебречь с рассматриваемой точностью градиентами ψ_i и Φ. Способом, описанным ниже, можно показать, что при этом уравнения, определяющие численный коэффициент в выражении для скорости скольжения, сводятся к уравнению аналогичной задачи для однокомпонентного газа, а сама скорость скольжения U_1 принимает вид

$$U_1 = 1.012\left(\frac{2kT}{m_1}\right)^{1/2}\frac{1}{\gamma_1}\frac{\partial V}{\partial y}$$

При $\mathrm{Re} \lessapprox 1$ можно пренебречь величиной $\partial p / \partial x$. В этом случае градиенты Ψ_i и Φ оказываются зависимыми

$$\Phi = -\eta_1\Psi_1 - \eta_2\Psi_2, \qquad \eta_i = \eta_i / n_0$$

Умножим граничное условие (7) на $v_x f_{i0}$ и проинтегрируем по всем скоростям, получим следующее выражение:

$$V_i = V(x, 0) + y'\frac{\partial V}{\partial y'} - \frac{1}{\rho}\frac{m_0 kT(x, 0)}{m_i K_{12}}\frac{n_j(x, 0)}{n_0}(\Psi_i - \Psi_j)$$

В силу линейного характера уравнений (8) можно отыскивать вклады градиентов $\partial V / \partial y$ и Ψ_i в скорость скольжения отдельно. Так как вклад от $\partial V / \partial y$ известен, остается определить скорость скольжения, обусловленную градиентами плотности. Для этой задачи получается следующее граничное условие:

$$V_i = U^*(x, 0) - \frac{1}{\rho}\frac{m_0 kT(x, 0)}{m_i K_{12}}\frac{n_j(x, 0)}{n_0}(\Psi_i - \Psi_j) \tag{10}$$

где $U^*(x, 0)$ — скорость скольжения, обусловленная градиентами Ψ_i. Введем

$$P_i = V_i + \frac{1}{\rho}\frac{kT(x, 0)}{\mu_i K_{12}}\frac{n_j(x, 0)}{n_0}\Psi_{ij} \qquad (\Psi_{ij} = \Psi_i - \Psi_j) \tag{11}$$

Смысл величины P_i можно понять, если перейти в (11) к пределу $y \to \infty$; учитывая (10), можно видеть, что $P_i \to U^*(x, 0)$, т. е. совпадает со скоростью скольжения. Относительно P_i уравнения (9) примут вид

$$P_i - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{A_{ii}}{\gamma_i}P_i + \frac{A_{ij}}{\gamma_i}P_j\right)I_{-1}(|y' - s'|)\,ds' =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\rho}\frac{kT}{K_{ij}}\left(\frac{\eta_j A_{ii}}{\mu_i\gamma_i} - \frac{\eta_i A_{ij}}{\mu_j\gamma_i}\right)I_0(y')\Psi_{ij} +$$
$$+ \frac{kT}{\sqrt{\pi}\,\gamma_i m_i}\left[\Psi_i I_0(y') + \Phi\left(\frac{I_0(y')}{2} + I_2(y')\right)\right]$$

Для упрощения выкладок положим $\Psi_2=0$. Предварительно введем обозначения

$$\rho_0=\eta_1\mu_1+\eta_2\mu_2,\quad \gamma_i'=\gamma_i/n_0,\quad A_{ij}'=A_{ij}/n_0$$

$$D_1=\frac{1}{\rho_0 n_0 m_0}\frac{kT}{K_{12}}\left(\frac{\eta_2 A_{11}'}{\mu_1\gamma_1'}-\frac{\eta_1 A_{12}'}{\mu_2\gamma_1'}\right)+\frac{kT}{\gamma_1' n_0 m_0\mu_1}\left(1-\frac{\eta_1}{2}\right)$$

$$D_2=-\frac{1}{\rho_0 n_0 m_0}\frac{kT}{K_{12}}\left(\frac{\eta_1 A_{22}'}{\mu_2\gamma_2'}-\frac{\eta_2 A_{21}'}{\mu_1\gamma_2'}\right)-\frac{kT}{\gamma_2' n_0 m_0\mu_2}\frac{\eta_1}{2}$$

$$B_1=-\frac{kT}{\gamma_1' n_0 m_0\mu_1}\eta_1,\qquad B_2=-\frac{kT}{\gamma_2' m_0 n_0\mu_2}\eta_1,\qquad P_i=P_i'\Psi_1$$

Уравнения для P_i' запишутся в виде

$$P_1'-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{A_{11}'}{\gamma_1'}P_1'+\frac{A_{12}'}{\gamma_1'}P_2'\right)I_{-1}(|y'-s'|)\,ds'=$$
$$=D_1\frac{I_0(y')}{\sqrt{\pi}}+B_1\frac{I_2(y')}{\sqrt{\pi}}\tag{12}$$
$$P_2'-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\left(\frac{A_{21}'}{\gamma_2'}P_1'+\frac{A_{22}'}{\gamma_2'}P_2'\right)I_{-1}(|y'-s'|)\,ds'=$$
$$=D_2\frac{I_0(y)}{\sqrt{\pi}}+B_2\frac{I_2(y')}{\sqrt{\pi}}$$

Представим P_1' и P_2' в виде

$$P_1'=C_1-\eta_2\mu_2\gamma_2'C_2,\qquad P_2'=C_1+\eta_1\mu_1\gamma_1'C_2.$$

Аналогично

$$D_1=d_1-\eta_2\mu_2\gamma_2'd_2,\qquad B_1=b_1-\eta_2\mu_2\gamma_2'b_2$$
$$D_2=d_1+\eta_1\mu_1\gamma_1'd_2,\qquad B_2=b_1+\eta_1\mu_1\gamma_1'b_2$$

При этом

$$\frac{A_{11}'}{\gamma_1'}P_1'+\frac{A_{12}'}{\gamma_1'}P_2'=C_1-C_2\eta_2\mu_2\gamma_2'\delta$$
$$\frac{A_{21}'}{\gamma_2'}P_1'+\frac{A_{22}'}{\gamma_2'}P_2'=C_1+C_2\eta_1\mu_1\gamma_2'\delta$$

где

$$\delta=A_{11}'/\gamma_1'+A_{22}'/\gamma_2'-1$$

Можно показать, что δ и $\delta-1$ не обращаются в нуль при любых значениях параметров, входящих в выражение для δ. После такой замены уравнения (12) распадутся на более простые уравнения для C_1 и C_2

$$C_1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty C_1 I_{-1}(|y'-s'|)\,ds'=d_1\frac{I_0(y')}{\sqrt{\pi}}+b_1\frac{I_2(y')}{\sqrt{\pi}}$$

$$C_2-\frac{\delta}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty C_2 I_{-1}(|y'-s'|)\,ds'=d_2\frac{I_0(y')}{\sqrt{\pi}}+b_2\frac{I_2(y')}{\sqrt{\pi}}$$

Можно показать далее, что $C_2(y' \to \infty) \to 0$. Следовательно, вклад в скорость скольжения дает только C_1. Представим C_1 в виде

$$C_1 = \alpha_1(y')d_1 + \alpha_2(y')b_1$$

$\alpha_1(y')$ и $\alpha_2(y')$ удовлетворяют уравнениям

$$\alpha_1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \alpha_1 I_{-1}(|y'-s'|)\,ds' = I_0(y')/\sqrt{\pi}$$

$$\alpha_2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \alpha_2 I_{-1}(|y'-s'|)\,ds' = I_2(y')/\sqrt{\pi} \tag{13}$$

Решением первого уравнения (13) будет $\alpha_1 \equiv 1$, второго — функция, которую без труда можно найти, зная решение задачи о скорости скольжения для однокомпонентного газа. Для определения скорости скольжения нужен лишь $\lim\limits_{y'\to\infty} \alpha_2(y')$. В [8] решено уравнение вида

$$\sqrt{\pi}G(y') = \int_0^{\infty} G(s')I_{-1}(|y'-s'|)\,ds' + {}^1\!/_4 I_0(y') - {}^1\!/_2 I_2(y')$$

При этом для $G(\infty)$ дано численное значение

$$G(\infty) = -0.42$$

Представим $G(y')$ в виде

$$G(y') = {}^1\!/_4 - {}^1\!/_2\alpha(y')$$

В силу сделанных выше замечаний уравнение для $\alpha(y')$ примет вид

$$\alpha(y') = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \alpha(s')I_{-1}(|y'-s'|)\,ds' = I_2(y')/\sqrt{\pi}$$

что совпадает со вторым уравнением (13). Теперь нетрудно найти, что $\alpha(\infty) = 1.34$.

Найдем d_1 и d_2 в явном виде, используя их определение

$$d_1 = \frac{1}{\Delta}(D_1\eta_1\mu_1\gamma_2' + D_2\eta_2\mu_2\gamma_2'), \qquad b_1 = \frac{1}{\Delta}(B_1\eta_1\mu_1\gamma_1' + B_2\eta_2\mu_2\gamma_2'),$$

$$\Delta = \eta_1\mu_1\gamma_1' + \eta_2\mu_2\gamma_2'$$

После преобразований получаем $P_1(\infty)$ в виде

$$P_1(\infty) = \frac{1}{\Delta}\frac{kT}{m_0 n_0}\left[\frac{\eta_1\eta_2}{\rho_0 K_{12}}(\gamma_1 - \gamma_2) - \eta_1 0.84\right]\Psi_1 \tag{14}$$

Чтобы найти скорость скольжения $P_1^*(\infty)$, обусловленную градиентом Ψ_2, достаточно поменять индексы в выражении (14)

$$P_1^*(\infty) = \frac{1}{\Delta}\frac{kT}{m_0 n_0}\left[\frac{\eta_1\eta_2}{\rho_0 K_{12}}(\gamma_2 - \gamma_1) - \eta_2 0.84\right]\Psi_2 \tag{15}$$

Складывая (14) и (15), получаем окончательное выражение для скорости скольжения

$$U^* = \frac{1}{\Delta}\frac{kT}{m_0n_0}\left[\frac{\eta_1\eta_2}{\rho_0K_{12}}(\gamma_1-\gamma_2)(\Psi_1-\Psi_2)+0.84\Phi\right] \tag{16}$$

Рассмотрим случай $\Phi=0$, $n_2 \ll n_1$. Тогда $\eta_1\Psi_1+\eta_2\Psi_2=0$ и скорость скольжения примет вид

$$U^* = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\left(1-\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)D_{12}\frac{1}{n_1}\frac{\partial n_2}{\partial x} \qquad (D_{12}=m_0kT/n_0m_1m_2K_{12})$$

D_{12} — коэффициент взаимной диффузии, полученный из гамелевской модели. Последнее выражение отличается от результата, данного в работе [2]. Это отличие можно объяснить, по-видимому, тем, что в [2] была использована более простая модель.

В заключение автор благодарит М. Н. Когана за руководство работы.

Поступило 28 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Девиеп М. Течения и теплообмен разреженных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Яламов Ю. И., Ивченко И. Н., Дерягин Б. В. Расчет скорости диффузного скольжения бинарной газовой смеси. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 2.
3. Darrozes J. Quelques aspects sur la resolution approchée des equations de Boltzmann pour un melange binaire de gaz. J. La Recherche Aerospatiale, 1969, No. 128.
4. Bernard B. Hamel. Kinetic model for binary gas mixtures. Phys. Fluids, 1963, vol. 8, No. 3, pp. 418—425.
5. Абрамов Ю. Ю., Гладуш Г. Г. Течение разреженного газа вблизи неоднородно нагретой поверхности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2, стр. 20—29.
6. Абрамов Ю. Ю. Приближенный метод решения кинетического уравнения вблизи границы. I. Скольжение. Теплофизика высоких температур, 1970, т. 8, № 4, стр. 828—832.
7. Абрамов Ю. Ю. Приближенный метод решения кинетического уравнения вблизи границы. II. Температурный скачок. Теплофизика высоких температур, 1970, т. 8, № 5, стр. 1013—1017.
8. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.