УДК 532.517.4:534.213:538.4

О ЗВУКОВОМ ПОЛЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Р. В. ГАНЕФЕЛЬД, В. В. НАЛЕТОВ

(*Киев*)

На основе теории Лайтхилла рассматривается влияние пульсаций джоулевой диссипации и пондеромоторных сил на генерацию звука турбулентным потоком проводящей жидкости.

Исследованию звукового поля, возбуждаемого турбулентным течением жидкости, уделяется большое внимание (см. обзоры [1, 2]). Как было показано Лайтхиллом [3], это поле можно определить при помощи решения неоднородного волнового уравнения, получаемого из уравнений сплошной среды

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}-a_0^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

$$T_{ij}=\rho u_iu_j+p_{ij}-a_0^2\rho\delta_{ij},\quad p_{ij}=p\delta_{ij}+\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\tag{1}$$

Здесь ρ — плотность среды, p — давление, u_i — возмущение скорости, a_0 — скорость звука в невозмущенной среде, ν — кинематическая вязкость, δ_{ij} — символ Кронекера, F_i — компоненты внешней силы.

Согласно теории Лайтхилла флуктуирующий объем жидкости в отсутствии внешних сил рассматривается как пространственное распределение акустических квадруполей с интенсивностью, определяемой тензором турбулентных напряжений T_{ij}. При наличии твердых границ кроме квадрупольных объемных источников имеются также поверхностные дипольные источники [4] с интенсивностью на единицу площади $P_i=-n_ip_{ij}$ (n_i — направляющие косинусы к поверхности S, ограничивающей объем V, в котором сосредоточены источники).

В газодинамических задачах по исследованию турбулентного шума обычно рассматривают адиабатическую модель и принимают $T_{ij}\approx\rho u_iu_j$.

Такая модель, как показано в [5], соответствует пренебрежению в правой части уравнения (1) вязкостной диссипацией и членами порядка M^2, определяемыми сжимаемостью среды, в то время как в левой части уравнения эти члены сохраняются ($M=u/a_0$ — число Маха). Анализ, проведенный на основе теории особых возмущений [5], показал, что результаты Лайтхилла справедливы вплоть до членов порядка M^4. Согласно [3, 4] мощности квадрупольного и дипольного излучений определяются соотношениями

$$W_q=k_q\frac{\rho_0L^2u_0^8}{a_0^5},\qquad W_d=k_d\frac{\rho_0L^2u_0^6}{a_0^3}$$

где L — характерный размер канала, k_q, k_d — эмпирические коэффициенты, u_0 — средняя скорость потока.

Определение рейнольдсовых напряжений ρu_iu_j выходит за рамки теории Лайтхилла, и они считаются в ней известными и пропорциональными ρu_0^2.

В этой работе исследуется влияние на шум турбулентного потока проводящей жидкости пульсаций джоулевой диссипации и пондеромоторных сил. Рассмотрение в основном проводится применительно к потоку плазмы продуктов сгорания.

При прохождении по проводящей жидкости электрического тока адиабатическая модель непригодна вследствие того, что джоулева диссипация может существенно превышать вязкостную, достигая (и даже превышая) уровень мощности инерционных сил.

Действительно, отношение соответствующих мощностей, выделяемых в объеме вихря, можно представить как

$$\beta\frac{j_0^2}{\sigma_0}:\frac{\rho_0\nu u^2}{l^2}:\frac{\rho_0 u^3}{l} \tag{2}$$

Здесь β — коэффициент, характеризующий неоднородность плотности тока и электропроводности, σ_0 — невозмущенная электропроводность, j_0 — плотность тока, ρ_0 — невозмущенная плотность среды, l — характерный размер вихря. В случае плазмы продуктов сгорания с параметрами $\sigma_0 = 10$ *мо/м*, $j_0 = 10^5$ *а/м*^{2}, $\beta = 0.1$, $\rho_0 = 0.1$ *кг/м*^{3}, $u = 100$ *м/сек*, $\nu = 5\cdot 10^{-4}$ *м*^{2}*/сек*, $l = 10^{-2}$ *м* отношение (2) приобретает вид

$$\beta\frac{j_0^2}{\sigma_0}:\frac{\rho_0\nu u^2}{l^2}:\frac{\rho_0 u^3}{l}\approx 10^8:10^4:10^7$$

Кроме непосредственного воздействия на излучаемый звук через неадиабатическую часть тензора турбулентных напряжений джоулева диссипация оказывает на него влияние и косвенно, изменяя турбулентную структуру потока. Изменение турбулентной структуры под действием джоулева нагрева от токов возмущения, индуцируемых вихрями в магнитном поле **B** при постоянной электропроводности, рассмотрено в работе [6], где показано, что джоулева диссипация нарушает изотропию турбулентности, приводит к снижению уровня возмущений, ориентированных в основном вдоль **B**, и, благодаря тому что она наиболее интенсивна в крупномасштабных вихрях, препятствует переносу энергии вверх по спектру возмущений.

В условиях отсутствия магнитного поля пространственная неоднородность диссипации представляет собой следствие лишь неоднородности электропроводности. Не останавливаясь подробно на турбулентной структуре потока с током, будем, как и в теории Лайтхилла, считать ее известной. Отметим лишь, что джоулева диссипация на неоднородностях электропроводности также приводит к анизотропии. Действительно, для возмущений, направленных вдоль по току, пространственно неизменной остается плотность тока j_0, а для возмущений, направленных поперек тока,— напряженность электрического поля E_0, приложенного к потоку. Поэтому тепло, выделяемое под действием тока, определяется соответственно выражениями

$$q_{\parallel} = \frac{j_0^2}{\sigma_0}\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}-1\right) = \beta_{\parallel}\frac{j_0^2}{\sigma_0} \tag{3}$$

$$q_{\perp} = \sigma_0 E_0^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right) = \frac{j_0^2}{\sigma_0}\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}-1\right) = \beta_{\perp}\frac{j_0^2}{\sigma_0}$$

где σ — возмущенная электропроводность. С учетом того, что $\sigma \sim T^n$, а $T \sim q$ (T — локальная температура, $n \approx 13$ для плазмы продуктов сгорания [7]), из выражений для q следует, что джоулев нагрев приводит к затуханию возмущений вдоль тока и их усилению в направлении поперек тока. Следовательно, можно ожидать, что при достаточно больших токах возмущения будут сосредоточены внутри некоторого объема вращения конуса перпендикулярно к направлению тока. При этом джоулева диссипация в отличие от случая, рассмотренного в [6], способствует переносу энергии по спектру возмущений и приводит, таким образом, к повышению частоты пульсации параметров потока и излучаемого им звука.

При наличии внешнего магнитного поля **B** влияние джоулевой диссипации на генерацию звука рассмотрим в случае возмущений, ориентированных перпендикулярно как к полю **B**, так и к току $\mathbf{j}_0$. Выбор этого частного случая обосновывается тем, что токи возмущения, индуцируемые во внешнем магнитном поле возмущениями скорости, гасят пульсации, ориентированные вдоль поля [6], а токи возмущения, индуцируемые на неоднородностях электропроводности внешним электрическим полем (им, в частности, может быть поле $E_0 = u_0 B_0$), гасят пульсации вдоль тока.

Используя выражение для обобщенного закона Ома

$$\mathbf{j} + \mathbf{j} \times \omega\tau = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})$$

где $\omega\tau$ — параметр Холла, находим, что в случае, когда можно пренебречь возмущениями магнитного поля (малые магнитные числа Рейнольдса) и $j_0 = \sigma_0 u_0 B$ (секционированный канал с поперечным током)

$$j = j_0(1 + \beta_\alpha), \quad \beta_\alpha = \beta_\perp(\alpha - 1) + \alpha, \quad \alpha = u / u_0 \tag{4}$$

где α — относительная среднеквадратичная пульсация скорости. Соответственно имеем

$$q = \left(\frac{j^2}{\sigma} - \frac{j_0^2}{\sigma_0}\right)_{B\neq 0} = \beta \frac{j_0^2}{\sigma_0}, \qquad \beta = [\beta_\alpha(\beta_\alpha + 2) - \beta_\perp](\beta_\perp + 1)^{-1} \tag{5}$$

Рассмотрение более общих случаев (произвольная ориентация возмущений поля $\mathbf{B}_0$ и тока $\mathbf{j}_0$) также приводит к выражению пульсаций джоулева нагрева вида $q = \beta j_0^2 / \sigma_0$ с более громоздкими соотношениями для β, которые здесь не приводятся.

Точное решение неоднородного волнового уравнения при наличии жестких границ имеет вид

$$\rho - \rho_0 = \frac{1}{4\pi a_0^2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\int\limits_V [T_{ij}] \frac{dV(\mathbf{y})}{r} - \frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_S [P_i] \frac{dS(\mathbf{y})}{r} - \right.$$
$$\left. - \int\limits_V \left[\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right] \frac{dV(\mathbf{y})}{r}\right\} \tag{6}$$

Здесь $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — координаты точки наблюдения, $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ — координаты вихря, возбуждающего звук. Выражения в квадратных скобках представляют собой функции $\mathbf{y}$ и запаздывающего времени $t - r/a_0$. В рассматриваемом случае внешней силой служит пондеромоторная сила $\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0$.

Используя теорему Остроградского, находим, что влияние этой силы на генерацию звука описывают два члена. Член

$$-\frac{1}{4\pi a_0^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\int\limits_V [F_i] \frac{dV}{r} = (\rho - \rho_0)_d$$

обусловлен объемным распределением диполей с интенсивностью, равной i-й компоненте пульсаций силы $\mathbf{F}'$, которая действует на единицу объема в направлении x_i. Член

$$-\frac{1}{4\pi a_0^2}\int\limits_S [n_i F_i'] \frac{dS}{r} = (\rho - \rho_0)_m$$

связан с поверхностным распределением монополей. Видно, что монопольное излучение возможно только с боковых стенок канала, если магнитное поле направлено сверху вниз или снизу вверх по отношению к потоку. Если рассматривать лишь точки наблюдения на большом расстоянии от области источников ($|\mathbf{x}| \gg |\mathbf{y}|$), то выражение (6) может быть приближенно записано в виде

$$\rho-\rho_0 \approx \frac{1}{4\pi a_0{}^2 r}\left\{\frac{1}{a_0{}^2}\int\limits_V \frac{\partial^2}{\partial t^2}[T_{ij}]\,dV+\frac{1}{a_0}\int\limits_S \frac{\partial}{\partial t}[P_i]\,dS-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{a_0}\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}[F_i]\,dV-\int\limits_S [n_iF_i']\,dS\right\} \tag{7}$$

В решении (7) уравнения (1) влияние джоулева нагрева на генерацию звука может быть учтено при помощи уравнения энергии [8]

$$\frac{\partial}{\partial t}(p-a_0{}^2\rho)+u_i\frac{\partial}{\partial y_i}(p-a_0{}^2\rho)=(\gamma-1)q \tag{8}$$

где γ — отношение удельных теплоемкостей.

В случае течений с малыми M, когда влиянием сжимаемости среды на поле течений можно пренебречь, имеем

$$\int\limits_V\left(u_i\frac{\partial}{\partial y_i}p\right)dV=\frac{\partial}{\partial y_i}\int\limits_V u_ip\,dV=0$$

$$\int\limits_S u_i\frac{\partial p}{\partial y_i}\,dS=\frac{\partial}{\partial y_i}\int\limits_S u_ip\,dS=0$$

Здесь учтено, что при $y\to\infty$ величина u_ip стремится к нулю значительно быстрее, чем y^{-3} [7]. Соответственно получаем

$$\rho-\rho_0 \approx \frac{1}{4\pi a_0{}^2 r}\left\{\frac{1}{a_0{}^2}\int\limits_V \frac{\partial}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_0u_iu_j+(\gamma-1)\frac{j_0{}^2}{\sigma_0}\beta\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{a_0}\int\limits_S\left[(\gamma-1)\frac{j_0{}^2}{\sigma_0}\beta\right]dS-\frac{1}{a_0}\int\limits_V\frac{\partial}{\partial t}[F_i]\,dV-\int\limits_S[n_iF_i']\,dS\right\} \tag{9}$$

При заданном параметре α, характеризующем уровень турбулентности, выражение (9) полностью определяет дальнее звуковое поле турбулентного потока с током, поскольку β всегда может быть выражено как функция от α. Так, для плазмы продуктов сгорания имеем [2, 7]

$$\frac{\sigma}{\sigma_0}\approx\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^n\approx\left(\frac{p}{p_0}\right)^{n+1/2},\qquad \frac{p}{p_0}\approx 1+6\alpha^2\frac{\rho_0u_0{}^2}{p_0}$$

причем $n\approx 13$ в области температур 2500—3000° K. Отсюда

$$\beta_\perp\approx 3\alpha^2(2n+1)\rho_0u_0{}^2/p_0$$

что в соответствии с (4), (5) определяет β через α.

Звуковое поле вблизи потока и внутри него не может быть определено по теории Лайтхилла. Согласно оценкам, проведенным в [2], уровень давлений в звуковой волне на несколько порядков ниже уровня пульсаций давления, определяемого непосредственно турбулентностью потока. Влияние джоулевой диссипации, очевидно, не может существенно сказаться на этом отношении, т. е. изменением структуры турбулентности под действием возбужденного звука можно пренебречь и в рассматриваемом случае.

Определяя акустическую мощность

$$W = \int_S a_0^3 \rho_0^{-1} < (\rho - \rho_0)^2 > dS$$

связанную с джоулевым нагревом и пондеромоторной силой, находим, применяя анализ размерностей, что для излучаемого звука

$$W = W_{qv} + W_{ds} + W_{dv} + W_{ms} = \frac{L^4 j_0^4/\sigma_0^2}{\rho_0 a_0^3}(k_{qv} + k_{ds}) + \frac{L^4 j_0^2 B_0^2}{\rho_0 a_0}(k_{dv} + k_{ms}) \tag{10}$$

где W_{qv} и W_{ds} — соответственно мощности объемного квадрупольного и поверхностного дипольного излучений, связанных с джоулевой диссипацией, W_{dv} и W_{ms} — мощности объемного дипольного и поверхностного монопольного излучений, связанных с пондеромоторной силой, k_{qv}, k_{ds}, k_{dv}, k_{ms} — безразмерные параметры.

Аналитические выражения для параметров k_{qv}, k_{ds}, k_{dv} и k_{ms} могут быть найдены при несколько ином определении акустической мощности. Вводя в рассмотрение корреляционную функцию [9]

$$\Psi(\tau) = \langle p'(r, t) p'(r, t - \tau) \rangle \tag{11}$$

где $p' = a_0^2(\rho - \rho_0)$, а символом $\langle\ \rangle$ обозначено усреднение во времени, можно представить акустическую интенсивность J как $\Psi(0)/\rho_0 a_0$, а спектральную интенсивность — в виде

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi\rho_0 a_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{12}$$

откуда следует, что

$$J = \frac{\Psi(0)}{\rho_0 a_0} = \int_{-\infty}^{\infty} J(\omega) d\omega$$

Для квадрупольного излучения имеем

$$p_q' = \frac{1}{4\pi a_0^2 r} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\gamma - 1) \frac{j_0^2}{\sigma_0} \beta \, dV$$

и корреляционную функцию Ψ можно выразить через пространственно-временную корреляцию параметра β

$$\Psi_q(\tau) = \left[\frac{(\gamma - 1) j_0^2/\sigma_0}{4\pi a_0^2 r} \right]^2 \int_{V_1} \int_{V_2} K_q(r_1, t_{r_1}; r_2, t_{r_2}) dV_1 dV_2 \tag{13}$$

$$K_q = \left\langle \frac{\partial \beta(r_1, t_{r_1})}{\partial t} \frac{\partial \beta(r_2, t_{r_2})}{\partial t} \right\rangle$$

$$t_{r_1} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}{a_0}; \qquad t_{r_2} = t - \tau - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|}{a_0}$$

Приведя интеграл в выражении (13) к безразмерному виду с параметрами $r^* \sim r/L$, $t^* \sim tau_0/L$, получим, что акустическая мощность может быть определена как

$$W_{qv}=\frac{4\pi r^2}{\rho_0 a_0}\Psi_q(0)=\frac{L^4 j_0^4/\sigma_0^2}{4\pi\rho_0 a_0^3}(\gamma-1)^2 M_0^2\int\limits_{V_1*}\int\limits_{V_2*} K_{qv}*dV_1*\,dV_2*$$

Отсюда следует:

$$k_{qv}=\frac{(\gamma-1)^2}{4\pi}M_0^2\int\limits_{V_1*}\int\limits_{V_2*} K_{qv}*dV_1*\,dV_2* \tag{14}$$

$$K_{qv}*=\left\langle\left[\alpha(r_1,t_{r_1})\frac{\partial\beta(r_1,t_{r_1})}{\partial t*}\right]\left[\alpha(r_2,t_{r_2})\frac{\partial\beta(r_2,t_{r_2})}{\partial t*}\right]\right\rangle$$

Аналогично можно показать, что

$$k_{ds}=\frac{(\gamma-1)^2}{4\pi}\int\limits_{S_1*}\int\limits_{S_2*} K_{ds}*dS_1*\,dS_2*$$

$$K_{ds}*=\langle\beta(r_1,t_{r_1})\beta(r_2,t_{r_2})\rangle$$

$$k_{dv}=\frac{M_0^2}{4\pi}\int\limits_{V_1*}\int\limits_{V_2*} K_{dv}*dV_1*\,dV_2*$$

$$K_{dv}*=\left\langle\left[\alpha(r_1,t_{r_1})\frac{\partial\beta_\alpha(r_1,t_{r_1})}{\partial t*}\right]\left[\alpha(r_2,t_{r_2})\frac{\partial\beta_\alpha(r_2,t_{r_2})}{\partial t*}\right]\right\rangle$$

$$k_{ms}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1*}\int\limits_{S_2*} K_{ms}*dS_1*\,dS_2*$$

$$K_{ms}*=\langle\beta_\alpha(r_1,t_{r_1})\beta_\alpha(r_2,t_{r_2})\rangle$$

Для численного определения параметров k по формулам (14), (15) необходимы более полные сведения о структуре турбулентности потока, чем те, которые имеются в настоящее время. Поэтому их величина пока может быть найдена лишь из эксперимента.

Поступило 31 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. Sound generated aerodynamically. Proc. Roy. Soc. A, 1962, vol. 267, No. 1329.
2. Haddle G. P., Skudrzyk E. J. The physics of flow noise. J. Acoust. Soc. Amer., 1969, vol. 46, No. 1, pt 2.
3. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General. theory. Proc. Roy. Soc. A, 1952, vol. 211, No. 1107; II. Turbulence as a source of sound. 1954, vol. 222, No. 1148.
4. Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound. Proc. Roy. Soc. A, 1955, vol. 231, No. 1187.
5. Crow S. C. Aerodynamic sound emission as a singular pertubation problem. Stud. Appl. Math., 1970, vol. 49, No. 1.
6. Моро Р. О магнитогидродинамической турбулентности. Магнитная гидродинамика, 1970, №4.
7. Ростас Ф. Сопротивление продуктов сгорания с присадкой. В сб. «МГД преобразования энергии», т. 1. Тр. Междунар. симпоз., Париж, 1964, М., 1966.
8. Маккьюн Дж. Возбуждение волн и неустойчивость в частично-ионизованных газах. В сб. «МГД преобразование энергии», т. 1, Тр. Междунар. симпоз., Париж, 1964, М., 1966.
9. Meecham V. C. Acoustic radiation from isotropic turbulence. J. Acoust. Soc. Amer., 1958, vol. 30, No. 4.