

УДК 533.6.011.5

## СИЛЬНЫЙ ВДУВ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. П. СТУЛОВ

(Москва)

Проведено теоретическое исследование обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком при условии, что через поверхность тела вдувается другой газ по заданному закону. Если пренебречь процессами молекулярного переноса, то течение между ударной волной и поверхностью тела следует рассматривать как двухслойное: течение в ударном слое между ударной волной и контактной поверхностью и течение в слое вдуваемого газа. Дано численное решение задачи у лобовой части тела и оценена его точность. Получены приближенные аналитические решения в слое вдуваемого газа: решение с постоянной плотностью и решение типа пограничного слоя в приближении локальной автомодельности течения. Вблизи оси течения численные и аналитические решения близки между собой, однако вдали от оси принятые предположения ухудшают точность приближенных решений.

Данное течение может служить газодинамической моделью ряда задач, описывающих лучистый нагрев затуплений, обтекаемых гиперзвуковым потоком. При интенсивном лучистом теплообмене испарение тела столь значительно, что толщина слоя паров оказывается сравнимой с толщиной ударного слоя. Кроме того, тепловая защита разного рода препятствий в канале, по которому движется излучающая плазма, может быть организована путем принудительного вдувания сильно поглощающего вещества.

Сообщение о постановке аналогичной задачи было сделано в работе [1], однако результаты решения не приводились. Двухслойная модель течения идеального газа перед затупленным телом использовалась в работах [2, 3] для анализа лучистого теплообмена. В работе [2] рассматривается окрестность критической точки. В работе [3] приведены предварительные результаты по двухслойному течению на затупленных конусах. Решение дается приближенным методом Маслена.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается осесимметричное течение идеального газа, возникающее при натекании сверхзвукового потока на затупленное тело, через поверхность которого происходит вдув другого газа по заданному закону. Схема течения изображена на фиг. 1. Набегающий газ проходит через ударную волну  $S$  и растекается около контактной поверхности  $C$ , отделяющей его от вдуваемого газа.

Течение описывается уравнениями газовой динамики

$$\nabla \rho v = 0, \quad (v \cdot \nabla) \cdot v + \rho^{-1} \nabla p = 0, \quad v \cdot \nabla (p / \rho^{\gamma_i}) = 0 \quad (1.1)$$

Показатели адиабаты  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2$  считаются различными в двух слоях. Граничные условия необходимо поставить на ударной волне, контактной поверхности и на теле. На ударной волне формулируются обычные условия Ренкина — Гюгонно. На контактной поверхности ставится условие равенства давлений и условие непроницаемости

$$p_1 = p_2, \quad v_{n1} = v_{n2} \quad (1.2)$$

На линии  $C$  могут иметь разрыв плотность, температура и касательная компонента скорости.

На поверхности тела задаются произвольная скорость вдува и одна из термодинамических переменных. В данной работе рассматриваются решения при заданной температуре

$$v = v_w, \quad T = T_w \quad (1.3)$$

Итак, следует задать условия в набегающем потоке, контур тела и распределения  $v_w$ ,  $T_w$ . Очевидно, для осесимметричного течения функции  $v_w$ ,  $T_w$  должны зависеть только от расстояния вдоль образующей контура осесимметричного тела, отсчитываемого от оси симметрии; кроме того, на оси симметрии должно быть  $v_{w\tau} = 0$ .

Положение ударной волны  $S$  и контактной поверхности  $C$  относительно поверхности тела определяется в результате решения задачи (1.1) — (1.3).

Перейдем к безразмерным переменным и рассмотрим полный набор безразмерных параметров, от которых зависит решение задачи. Положим

$$v_1 = v_\infty v_1', \quad p_1 = \rho_\infty v_\infty^2 p_1', \quad \rho_1 = \rho_\infty \rho_1', \quad T_1 = T_\infty T_1' \quad (1.4)$$

$$v_2 = v_{w0} v_2', \quad p_2 = \rho_{w0} v_{w0}^2 p_2', \quad \rho_2 = \rho_{w0} \rho_2', \quad T_2 = T_{w0} T_2' \quad (1.5)$$

Штрих у безразмерных величин в дальнейшем опускается. Все масштабы в формулах (1.4), (1.5) известны, за исключением  $\rho_{w0}$ . Эту величину легко определить по заданным параметрам (1.3) при условии изэнтропического течения вдоль оси симметрии в слоях 1 и 2. Индекс  $w0$  относится к параметрам газа в точке  $O$  (см. фиг. 1).

Первое условие (1.2) в переменных (1.4), (1.5) имеет вид

$$p_1 = K p_2, \quad K = \rho_{w0} v_{w0}^2 / \rho_\infty v_\infty^2 \quad (1.6)$$

Величина  $K$  представляет собой отношение удельных кинетических энергий вдуваемого газа и набегающего потока. Ее можно выразить через  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $M_\infty$ ,  $M_{w0}$ .

Решение всей задачи зависит от этих четырех параметров, а также от безразмерных распределений скорости вдува и температуры на теле и формы тела.

Заметим, что если вместо второго граничного условия (1.3) задать  $\rho = \rho_w$ , то влияние параметра  $M_{w0}$  на распределения  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$  в обоих слоях будет проявляться через параметр  $K$  (1.6). Поскольку  $K$  выражается через  $\gamma_1$ ,  $M_\infty$ ,  $M_{w0}$ , то вместо этого набора определяющих параметров часто удобно рассматривать  $\gamma_1$ ,  $M_\infty$ ,  $K$ .

В гиперзвуковом потоке течение перестает зависеть от  $M_\infty$ . Задача существенно упрощается, поскольку решение в слое 2 можно отделить от задачи в слое 1, задав давление на внешней стороне контактной поверхности, например, по формуле Ньютона

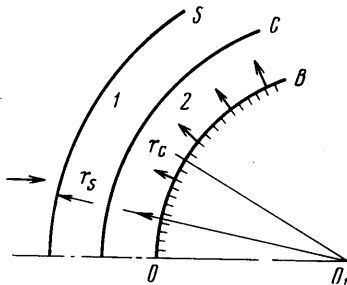
$$p_{1c} = p_1^* \sin^2 \sigma \quad (1.7)$$

где  $\sigma$  — угол между осью течения и контактной поверхностью, положение которой по-прежнему определяется в результате решения задачи. В такой постановке решение в слое 2 определяется параметрами  $p_1^*$ , который зависит от  $\gamma_1$  и близок к единице,  $\gamma_2$  и  $K$ .

**2. Численное решение.** При расчетах оказалось более удобным пользоваться едиными масштабами для переменных в слоях 1 и 2; были использованы формулы (1.4).

Численное решение задачи строится методом Г. Ф. Теленина. Вводится сферическая система координат с центром на оси течения. В двух слоях вводятся координаты  $\xi_i$ :

$$\xi_1 = \frac{r_1 - r_c}{r_s - r_c}, \quad \xi_2 = \frac{r_2 - r_c}{r_w - r_c} \quad (2.1)$$



Фиг. 1

преобразующие каждый слой в полуполосу. В переменных  $\xi, \theta$  система уравнений движения, разрешенная относительно производных по  $\xi$ , запишется так:

на оси течения

$$u_{\xi} = -\frac{1}{\rho u} p_{\xi}, \quad v_{0\xi} = -b'_i u_{\xi} - \frac{a_i}{u} \left[ \frac{1}{\rho} p_0'' + v_0(v_0 + u) \right] \quad (2.2)$$

$$p_{\xi} = \frac{a_i \rho}{1 - u^2 c_i^{-2}} 2u(u + v_0), \quad T_{\xi} = \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i} \frac{T}{p} p_{\xi}$$

вне оси

$$u_{\xi} = \frac{1}{A_i} \left[ -\frac{1}{\rho} p_{\xi} + a_i v(v - u') \right]$$

$$v_{\xi} = \frac{1}{A_i} \left[ -\frac{a_i}{\rho} p' + \frac{b_i}{\rho} p_{\xi} - a_i v(v' + u) \right] \quad (2.3)$$

$$p_{\xi} = \frac{a_i \rho}{1 + b_i^2 - A_i^2 c_i^{-2}} [v(v - u') + u(v' + 2u + v \operatorname{ctg} \theta) - b_i(uv + v^2 \operatorname{ctg} \theta - p'/\rho) + A_i v p'/\gamma_i p]$$

$$T_{\xi} = \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i} \frac{T}{p} p_{\xi} + \frac{1}{A_i} a_i v \left( \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i} \frac{T}{p} p' - T' \right)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_i &= \varepsilon_i / r_i, & c_i^2 &= \gamma_i p / \rho, & \varepsilon_1 &= r_s - r_c, & \varepsilon_2 &= r_w - r_c \\ A_i &= u - b_i v, & b_i &= (r_w' + \xi_1 \varepsilon_1' - \varepsilon_2') / r_1 \\ b_2 &= [r_w' + (\xi_2 - 1) \varepsilon_2'] / r_2, & v_0 &= dv/d\theta|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Штрих означает производную по  $\theta$ . Системы уравнений в двух слоях различаются лишь значениями  $\gamma_i, a_i, b_i$ . Выпишем граничные условия на контактной поверхности и поверхности тела. При  $\xi_1 = \xi_2 = 0$

$$p_1 = p_2, \quad u_1 - b_1 v_1 = 0, \quad b_1 = (r_w' - \varepsilon_2') (r_w - \varepsilon_2)^{-1} \quad (2.5)$$

При  $\xi_2 = 1$

$$u = u_w(\theta), \quad v = v_w(\theta), \quad T = T_w(\theta) \quad (2.6)$$

При отыскании численного решения естественно задачи в слоях 1 и 2 решать отдельно, а решение полной краевой задачи находить методом последовательных приближений. Если форма контактной поверхности задана, то задача в слое 1 сводится к обычной задаче обтекания затупленного тела: удовлетворение второго граничного условия (2.5) позволяет найти положение ударной волны  $\varepsilon_1$ . С другой стороны, решение задачи в слое 2 можно получить путем подбора распределения давления  $p_w(\theta)$  и положения контактной поверхности  $\varepsilon_2 = r_w - r_c$ , при которых условия (2.5) удовлетворяются. Таким образом, полная краевая задача сводится к последовательному решению задач Коши.

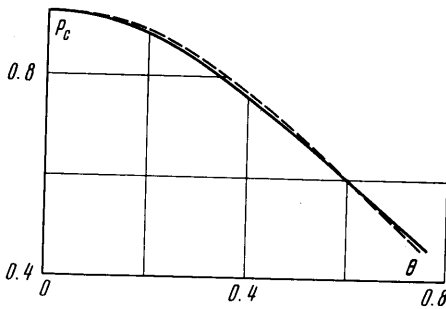
Для расчета течения в каждом слое использовалась трехлучевая аппроксимация неизвестных функций по  $\theta$ . Решение задачи в слое 1 сводится к подбору трех параметров  $\varepsilon_{1j}$  из трех условий  $(u_1 - b_1 v_1)_j = 0$  при  $\xi_1 = 0, j = 0, 1, 2$  — по числу лучей. Для нахождения решения в слое 2 нужно подобрать шесть параметров  $\varepsilon_{2j}, p_{wj}$  из шести условий  $p_{2j} = p_{1j}, (u_2 - b_2 v_2)_j = 0$  при  $\xi_2 = 0$ . Подбор неизвестных параметров проводится методом Ньютона. Решение задачи в приближенной постановке с использованием условия (1.7) сводится к подбору шести параметров  $\varepsilon_{2j}, p_{wj}$  путем выполнения шести условий (2.5) с учетом (1.7).

Расчеты проводились для сферы  $r_w = 1$  с постоянной температурой  $T_w(\theta) = T_{w0}$  при нормальном вдуве  $v_w(\theta) = 0$ . Изучалось влияние определяющих параметров и закона вдува  $u_w(\theta)$ . Рассматривался вдув по закону

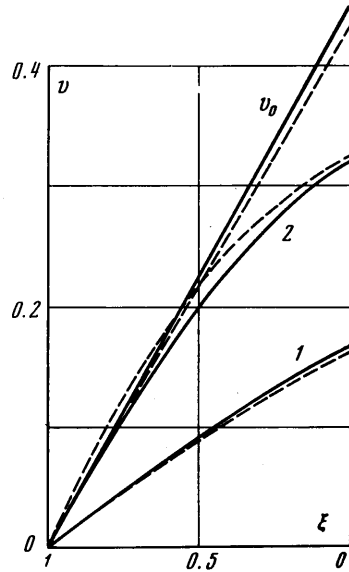
$$u_w = u_{w0} \cos^n \theta \quad (2.7)$$

поскольку такая формула описывает распределение лучистых потоков на лобовой поверхности затупленных тел при гиперзвуковом обтекании воздухом [4].

Вначале проведем сравнение численных решений в слое 2 в точной и приближенной постановках. Некоторые параметры течения для варианта при  $K = 0.0043$ ,  $M_\infty = 10$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.4$  представлены на фиг. 2, 3. Сплошные линии показывают решение в точной постановке, штриховые — в приближенной. На фиг. 2 сравниваются распределения давления вдоль контактной поверхности  $p_c$  в двух решениях, а на фиг. 3 — распределения окружной компоненты скорости вдоль лучей 1 ( $\theta_1 = 0.375$ ) и 2 ( $\theta_2 = 0.75$ ), а также величины  $v_0$ . Поскольку расхождение незначительное,



Фиг. 2

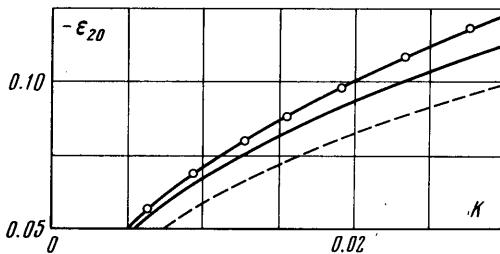


Фиг. 3

то для исследования течения в слое 2 ниже используется приближенная постановка задачи.

Опыт расчетов показал, что с увеличением параметра  $K$  выбранная здесь итерационная схема становится неустойчивой. Важно отметить, что в приближенной постановке предельное значение  $K$  для устойчивого решения превышает аналогичное значение для точной постановки.

Изменение параметров течения в слое 2 при различных значениях основного определяющего параметра  $K$  показано на фиг. 4—8. В этой серии расчетов полагалось  $n = 1$ ; параметр  $K$  изменялся путем изменения безразмерной скорости вдува  $u_{w0}$ .



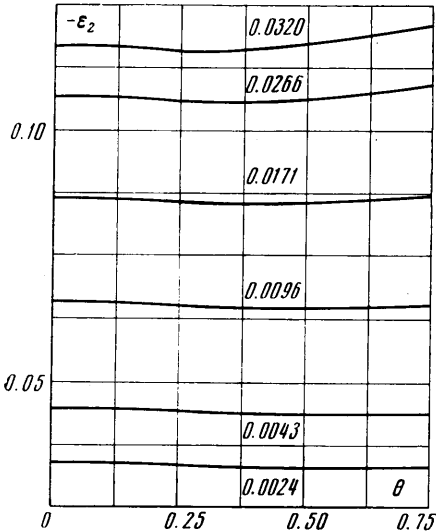
Фиг. 4

Толщина слоя вдуваемого газа на оси симметрии увеличивается с ростом  $K$  (см. фиг. 4, сплошная линия) по закону, близкому к  $K^{1/2}$ , как это будет следовать из проводимого ниже сравнения с приближенными аналитическими решениями. Форма контактной линии показана на фиг. 5 для различных значений  $K$ . Для  $n = 1$  толщина слоя 2 почти постоянна.

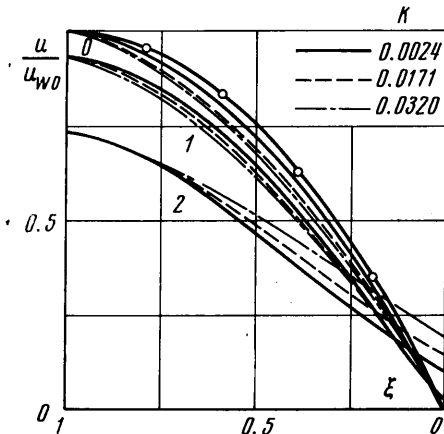
Профили компонент скорости, представленные на фиг. 6 и фиг. 7, обнаруживают весьма своеобразную зависимость от определяющих параметров. Как и следовало ожидать, компоненты скорости, отнесенные к  $u_{w0}$ , зависят только от  $K$ . Зависимость радиальной компоненты  $u / u_{w0}$

от  $K$  весьма слабая (см. фиг. 6). Окружная компонента сильно зависит от  $K$ . Если  $v$  отнесено к  $v_\infty$ , как это сделано на фиг. 7, то профили  $v$  почти совпадают для разных  $K$ , однако остается зависимость от характерной плотности в слое 2, или от  $M_\infty$ . Распределения окружной скорости примут универсальный характер, если  $v$  отнести к некоторому ее «начальному» значению на оси, например к значению  $v_{0c}$  в критической точке.

Аналогичная картина имеет место и для давления: распределение  $p / \rho_{w0} u^2_{w0}$  сильно зависит от  $K$ , а величина  $p / \rho_\infty u^2_\infty$  — сравнительно слабо (см. фиг. 8). Физически это объясняется тем, что распределения  $p$  и  $v$  в слое 2 определяются, во-первых, воздействием внешнего потока и формой тела и, во-вторых, начальными параметрами вдуваемого газа.



Фиг. 5



Фиг. 6

Картина течения существенно меняется в зависимости от закона вдува на поверхности тела. Проводились расчеты для закона вдува (2.7) при  $n = 0, 1, 2, 2.8, 3.6$  и при  $K = 0.017$ . Последнее значение  $n$  соответствует распределению относительного лучистого потока тепла при обтекании сферы воздухом со скоростью  $14 \text{ км/сек}$  [<sup>2</sup>]. Форма контактной линии изображена на фиг. 9 для различных  $n$  (сплошные линии). При значительном уменьшении скорости вдува вдоль образующей тела толщина слоя вдуваемого газа также уменьшается.

Оценка точности численного решения проводилась проверкой значений первых интегралов уравнений движения (2.2), (2.3). При разностной записи этих уравнений условия постоянства энтропии и полной энтальпии

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C_1, \quad \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 (u^2 + v^2) + T = C_2 \quad (2.8)$$

явно не используются. Приведем значения величин  $C_1, C_2$  из численного решения для  $K = 0.017$  в точках граничной линии тока с координатами  $(\xi_2, \theta)$ .

$(\xi_2, \theta)$	(1, 0)	(0, 0)	(0, 0.375)	(0, 0.75)
$C_1$	0.0333	0.0333	0.0333	0.0334
$C_2$	12.032	12.032	12.023	12.037

Таким образом, отклонение  $C_1, C_2$  от постоянных значений не превышает 0.3%.

**3. Сравнение с приближенными аналитическими решениями.** Первое решение получено в предположении о постоянных, но различных плотностях в слое 1 и в слое 2. Это решение основывается на частном решении уравнений гидродинамики, известном под названием сферического вихря Хилла и использовавшемся ранее Лайтхиллом [<sup>5</sup>] для построения модели

сверхзвукового обтекания сферы. Вихрь Хилла применялся также в работе [6] для анализа экспериментов по вдуву газа на затупленном конусе.

Решение в слое 1 совпадает с решением Лайтхилла с той разницей, что здесь радиус обтекаемой сферы  $r_c$  не задается, а определяется из условия сопряжения с решением в слое 2. Условие равенства давлений и условие непроницаемости в слое 2 на контактной поверхности дают уравнения для определения  $r_s$  и  $r_c$

$$3(1 - \kappa)^2 (r_c / r_s)^4 - 5(1 - 4\kappa) (r_c / r_s)^2 + 2(1 - \kappa) (1 - 6\kappa) r_s / r_c = 0 \quad (3.1)$$

$$\lambda^2(\kappa, r_c / r_s) = 2.25F^2(r_c)K \quad (3.2)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{10\kappa\sqrt{\kappa}} \left[ 6(1 - \kappa)^2 \left( \frac{r_c}{r_s} \right)^2 - 5(1 - 4\kappa) - (1 - \kappa) (1 - 6\kappa) \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^3 \right]$$

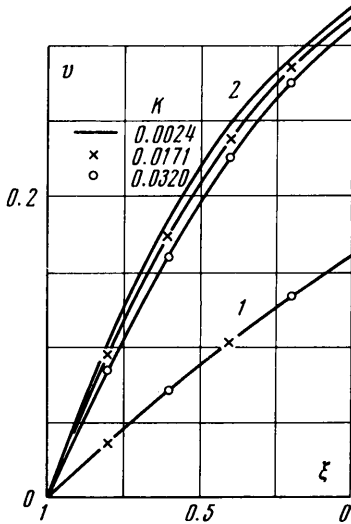
$$F(r_c) = \frac{f(r_c) - 1}{3r_c^3} + \frac{1 + 5f(r_c)}{3} - 2f(r_c)r_c^2 \quad (3.3)$$

$$f(r_c) = (2 + r_c^3)(2 - 5r_c^3 + 3r_c^5)^{-1}, \quad \kappa = \rho_\infty / \rho_s$$

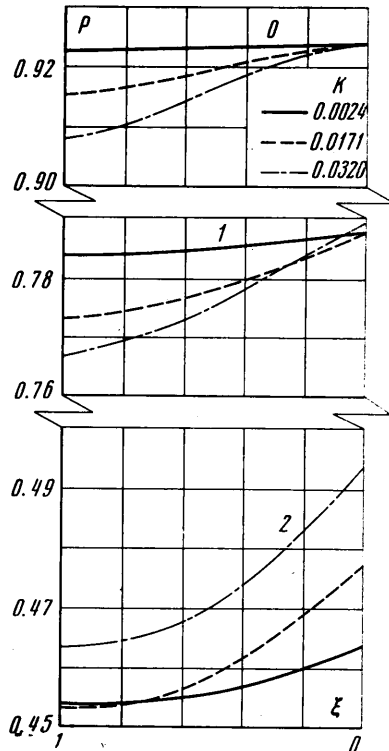
Приближенное решение уравнения (3.1) для толщины  $\Delta = 1 - r_c / r_s$  слоя 1 имеет вид

$$\Delta = \kappa(1 + \sqrt[3]{8\kappa/3})^{-1} \quad (3.4)$$

Это выражение хорошо аппроксимирует результаты численных расчетов обтекания различных тел в широком диапазоне параметров набегающего потока [7].



Фиг. 7



Фиг. 8

Подставляя (3.4) в (3.2), получим, что  $\lambda[\kappa, \Delta(\kappa)]$  очень слабо зависит от  $\kappa$ : при  $\kappa = 0, 0.1, 0.2, 0.25$  величина  $\lambda$  равна 2.449, 2.453, 2.446, 2.449 соответственно.

Численное решение уравнения (3.2) при  $\lambda = \sqrt[6]{\epsilon}$  изображено на фиг. 4 штриховой линией. Используя асимптотическую формулу  $F(\epsilon) = -(1 - 2\epsilon/3)/\epsilon$  при малом  $\tau = r_c - 1$ , решение уравнения (3.2) получим в виде

$$\epsilon = 1.5(1 + \sqrt[6]{6/K})^{-1} \quad (3.5)$$

Это решение практически совпадает со штриховой линией на фиг. 4.

Распределение окружной составляющей скорости вдоль контактной линии в слое 2 при  $\epsilon \ll 1$  запишется так:

$$\frac{v}{u_w} = \sin \theta \left( \frac{8}{3K} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

Таким образом, величина  $u/u_w$  на контактной линии и вблизи нее существенно зависит от  $K$ . В то же время

$$\frac{v}{u_\infty} = \sin \theta \left( \frac{8}{3} \frac{\rho_\infty}{\rho_w} \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

т. е. зависимость от  $K$  остается в отброшенных малых членах. Этот вывод согласуется с численными результатами п. 2.

Рассмотрим значение радиальной компоненты скорости  $u/u_w$ , например, в середине слоя 2. Полагая  $r = 1 + \epsilon/2$  и  $\epsilon \ll 1$ , из решения для сферического вихря получим

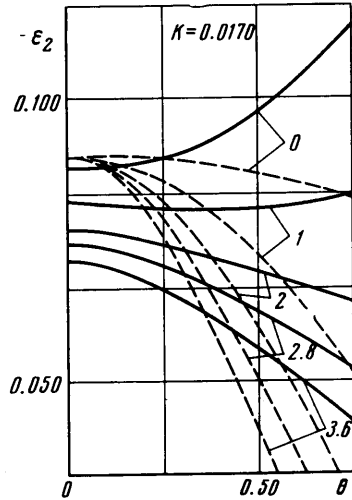
$$\frac{u}{u_w} \approx \frac{3}{4} \cos \theta \left[ 1 - \frac{11}{18} \left( \frac{3K}{8} \right)^{1/2} \right] \quad (3.8)$$

При значениях  $K$ , для которых получены численные решения, величина  $u/u_w$  изменяется незначительно и убывает с увеличением  $K$  (ср. с данными на фиг. 6).

Изменение давления поперек слоя при  $\theta = \text{const}$  запишется так:

$$p_c - p_w = \frac{4}{3}\epsilon(\epsilon \cos^2 \theta - \frac{2}{3}\sin^2 \theta) \quad (3.9)$$

Другое решение в слое вдуваемого газа было получено в рамках приближения пограничного слоя для уравнений движения идеального сжимаемого газа. Вводится система координат с началом в точке  $O$  (фиг. 1), осью  $y$  вдоль образующей поверхности тела и осью  $x$  по нормали к ней. Будем считать, что толщина слоя вдуваемого газа мала по сравнению с характерным размером тела, например, за счет малости скорости вдува по сравнению со скоростью набегающего потока. Вводя обычные для приближения пограничного слоя преобразования переменных, подставляя их в уравнения движения, записанные в криволинейной системе координат  $[\xi]$ , и пренебрегая малыми членами, получим



Фиг. 9

$$\rho u^\circ \frac{\partial v}{\partial x^\circ} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial x^\circ} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial(\rho u^\circ r)}{\partial x^\circ} + \frac{\partial(\rho v r)}{\partial y} = 0, \quad u^\circ \frac{\partial(p/\rho^v)}{\partial x^\circ} + v \frac{\partial(p/\rho^v)}{\partial y} = 0$$

где  $x^\circ = x / \varepsilon$ ,  $u^\circ = u / \varepsilon$ . В дальнейшем индекс над  $u$  и  $x$  опускается. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u &= u_w(y), \quad v = 0, \quad T = T_w(y) \quad (x = 0) \\ u &= \varepsilon'v, \quad p = \sin^2 \sigma \quad (x = \varepsilon(y)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Вводя новые переменные

$$\xi = \int_0^y r^3 dy, \quad \eta = \frac{r^2}{\sqrt{2\xi}} \int_0^x \rho dx, \quad \rho ur = -\psi_v, \quad \rho vr = \psi_x, \quad \psi = \sqrt{2\xi} f \quad (3.12)$$

преобразуем первое уравнение (3.10) к виду

$$2\xi(f_\eta f_{\eta\xi} - f_\xi f_{\eta\eta}) + 2\xi \frac{r_\xi}{r} f_\eta^2 - ff_{\eta\eta} = -\frac{2\xi}{\rho r^5} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.13)$$

с граничными условиями

$$f_\eta = 0, \quad f = -\frac{\sqrt{2\xi}}{r^5} \rho_w u_w = f_w, \quad \rho = \rho_w \quad (\eta = 0); \quad f = 0 \quad (\eta = \eta_*) \quad (3.14)$$

Здесь для удобства условие  $T = T_w(y)$  заменено на  $\rho = \rho_w(y)$ . Опуская в (3.13) производные по  $\xi$  и пренебрегая зависимостью правой части от  $\eta$ , получим решение <sup>1</sup>

$$\eta = \frac{f_w}{\sqrt{a/\alpha}} \int_{f/f_w}^1 \frac{d\varphi}{(1 - \varphi^{2\alpha})^{1/2}}, \quad a = -\frac{2\xi}{\rho r^5} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \alpha = \frac{2\xi r_\xi}{r} \quad (3.15)$$

Последнее уравнение (3.10) решается точно

$$\rho(y, \eta) = \rho_w(y_0) [p(y) / p(y_0)]^{1/\gamma} \quad (3.16)$$

причем координата  $y_0$  точки входа в слой линии тока, проходящей через текущую точку  $(x, y)$ , определяется из уравнения

$$\eta(y, y_0) = \frac{f_w(y)}{\sqrt{a(y)/\alpha(y)}} \int_{\mu}^1 \frac{d\varphi}{(1 - \varphi^{2\alpha})^{1/2}}, \quad \mu = \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{1/2} \frac{f_w(y)}{f_w(y_0)} \quad (3.17)$$

Решение в окрестности оси течения

$$\begin{aligned} f &= f_w \left(1 - \frac{\eta^2 b}{2\rho_w f_w^2}\right), \quad \rho = \rho_w, \quad x = \eta/\sqrt{2} \rho_w \\ f_w &= -\frac{1}{2} \rho_w u_w, \quad \frac{v}{y} = \frac{2x}{\rho_w u_w}, \quad u = u_w \left(1 - \frac{2bx^2}{\rho_w u_w^2}\right) \\ b &= -1/2 p''(0) \end{aligned} \quad (3.18)$$

при малых  $K$  совпадает с изложенным выше решением с постоянной плотностью, если положить  $b = 4/3$ . Для давления, заданного формулой (3.11),  $b = 1$ . Зависимость толщины слоя на оси

$$\varepsilon(0) = (K/2b)^{1/2} \quad (3.19)$$

<sup>1</sup> Аналогичное решение рассматривал Э. А. Гершбейн.



при  $b = 1$  изображена на фиг. 4 кривой с кружками. Распределение скорости  $u/u_w$  вдоль оси, вычисленное по (3.18), показано на фиг. 6 кривой с кружками.

Сравним толщину слоя 2 на сфере с численным решением. Пренебрегая изменением плотности поперек слоя в интеграле (3.12) и в множителе  $a/\alpha$ , получим уравнение контактной линии в следующем виде:

$$\varepsilon(y) = \frac{\alpha I(\alpha)}{\cos y} \left( \frac{K(y)}{2} \right)^{1/2}, \quad I(\alpha) = \int_0^1 \frac{d\varphi}{(1 - \varphi^{2\alpha})^{1/2}} \quad (3.20)$$

Здесь  $K(y)$  — локальное значение параметра  $K$ . Интеграл  $I(\alpha)$  легко вычисляется при  $\alpha = 1/m$  ( $m$  — целое число); его можно аппроксимировать формулой  $I(\alpha) = 3.08 - 2.16\alpha$ . Подставляя в (3.20) закон вдува (2.7) и учитывая, что  $\rho_w = \rho_{w0} \cos^2 \theta$ , так как в расчетах принималось  $T_w = \text{const}$ , получим

$$\varepsilon(y) = \alpha I(\alpha) \cos^n y [K(0)/2]^{1/2} \quad (3.21)$$

Функция (3.21) при различных  $n$  изображена на фиг. 9 штриховыми линиями. Толщина слоя в локально-автомодельном решении убывает значительно быстрее, чем в численном решении. При помощи (3.16) легко показать, что учет переменности  $\rho$  в интеграле (3.12) приведет к еще меньшим значениям  $\varepsilon(y)$ , так как плотность газа при удалении от тела вдоль луча падает.

Распределение окружной составляющей скорости вдоль контактной линии

$$v_c = \sin y (2/\rho_w)^{1/2} = \text{tg } y (2/\rho_{w0})^{1/2} \quad (3.22)$$

лежит близко к численному решению при  $\theta < 0.3$ ; расхождение вблизи крайнего луча составляет  $\sim 20\%$ .

Поступило 31 V 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Masson B. S. The numerical solution of supersonic flow past blunt bodies with large mass injection. IX Sympos. on Advanced Problems and Methods on Fluid Mech. Abstracts Papers, Warszawa, 1969.
2. Чин. Перенос излучения при течении в окрестности передней критической точки с учетом влияния излучения в линиях и слоя продуктов абляции. Ракетная техника и космонавтика, 1969, т. 7, № 7.
3. Олстед. Обтекание гладких симметричных тел потоком с селективным излучением. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 1.
4. Стулов В. П., Шапиро Е. Г. Излучение ударного слоя при гиперзвуковом обтекании затупленных тел воздухом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
5. Лайтхилл. Динамика диссоциирующего газа, ч. I. Равновесный поток. Вопр. ракетн. техн., Сб. перев. и обз. иностр. лит., 1957, № 5, 6.
6. Gresci R. G., Libby P. A. The downstream influence of mass transfer at the nose of a slender zone. J. Aero Space Sci., 1962, vol. 29, No. 7, p. 815.
7. Стулов В. П. О законе подобия при гиперзвуковом обтекании затупленных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
8. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз 1959.